

INGENIERÍA MECÁNICA

DINÁMICA

ANDREW PYTEL

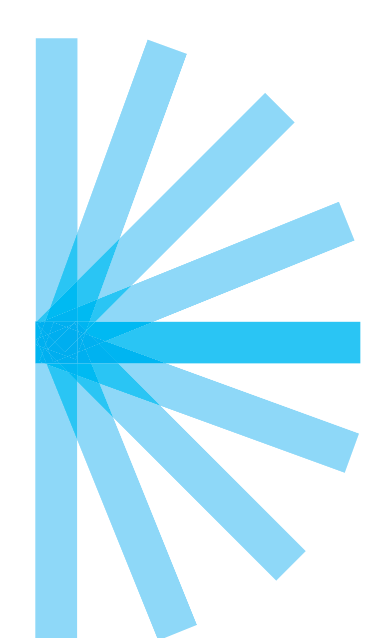
JAAN KIUSALAAS



Ingeniería mecánica

DINÁMICA

Tercera edición



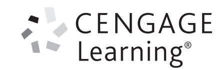
Andrew Pytel
The Pennsylvania State University

Jaan Kiusalaas
The Pennsylvania State University

Traducción:
Dra. Ana Elizabeth García Hernández
Universidad La Salle, Morelia

Revisión técnica:
Ing. Javier León Cárdenas
Profesor Departamento de Formación Básica
Escuela Superior de Ingeniería Química
e Industrias Extractivas (ESIQIE)
Instituto Politécnico Nacional (IPN)

Ing. José Nicolás Ponciano Guzmán
Instituto Tecnológico de Morelia
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores
de Monterrey, Campus Morelia



Ingeniería mecánica: dinámica,
Tercera edición
Andrew Pytel y Jaan Kiusalaas

Presidente de Cengage Learning Latinoamérica:
Fernando Valenzuela Migoya

Director editorial, de producción y de plataformas digitales para Latinoamérica:
Ricardo H. Rodríguez

Gerente de procesos para Latinoamérica:
Claudia Islas Licona

Gerente de manufactura para Latinoamérica:
Raúl D. Zendejas Espejel

Gerente editorial de contenidos en español:
Pilar Hernández Santamarina

Coordinador de manufactura:
Rafael Pérez González

Editores:
Ivonne Arciniega Torres
Timoteo Eliosa García

Diseño de portada:
Studio 2.0

Imagen de portada:
© fotomak/Shutterstock

Composición tipográfica:
Rogelio Raymundo Reyna Reynoso

Traducido del libro
Engineering Mechanics Dynamics, *Third Edition*.
Andrew Pytel, Jaan Kiusalaas
Publicado en inglés por Cengage Learning
© 2010
ISBN: 978-0-495-29561-7

Datos para catalogación bibliográfica:
Pytel, Andrew y Jaan Kiusalaas
Ingeniería mecánica: dinámica, Tercera edición
ISBN-13: 978-607-481-871-0
ISBN-10: 607-481-871-1

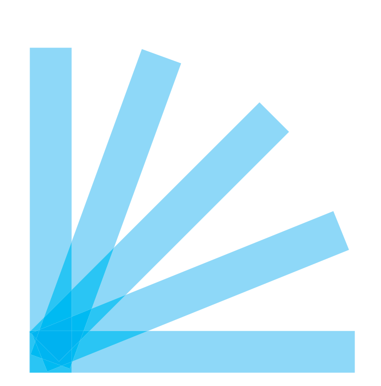
Visite nuestro sitio en:
http://latinoamerica.cengage.com

Impreso en México
1 2 3 4 5 6 7 15 14 13 12

Para Jean, Leslie, Lori, John, Nicholas

y

Para Judy, Nicholas, Jennifer, Timothy



Contenido

*Indica apartados opcionales



Prefacio

La estática y la dinámica son disciplinas básicas para muchas ramas de la ingeniería y se conocen como mecánica para ingeniería. La mecánica es, a su vez, básica en muchos campos de ingeniería, tales como la aeroespacial, la civil y mecánica. Además la mecánica desempeña un papel fundamental en diversas áreas como la medicina y la biología. Utilizar los principios de la estática y dinámica en un amplio rango de aplicaciones exige razonamiento y práctica más que memorización. Aunque los principios de estática y dinámica son relativamente pocos, sólo pueden dominarse verdaderamente con el estudio y análisis de los problemas. Por tanto, todos los libros de texto modernos, incluyendo los nuestros, tienen un gran número de problemas para que sean resueltos por el estudiante. El aprendizaje de un método de ingeniería para la solución de un problema es una de las lecciones más valiosas del estudio de la estática y dinámica.

En ésta nuestra tercera edición de *Estática* y *Dinámica* hemos realizado un gran esfuerzo para mejorar nuestra presentación sin comprometer los siguientes principios que conforman la base de nuestras ediciones anteriores.

- Cada problema de ejemplo se ha elegido de manera cuidadosa para ayudar a los estudiantes a dominar las complejidades del análisis del problema de ingeniería.
- La selección de problemas de tarea está balanceada entre los problemas del “libro de texto” que muestran los principios de mecánica de una forma sencilla y los problemas prácticos, que son aplicables a un diseño de ingeniería.
- El número de problemas que usan las unidades del sistema inglés y el número de los que usan unidades SI son aproximadamente iguales.
- En todo el libro se pone énfasis en la importancia de dibujar correctamente los diagramas de cuerpo libre.
- Cuando sea aplicable, se compara el número de ecuaciones independientes con el número de incógnitas antes de que se escriban las ecuaciones que gobiernan el problema.
- Se han integrado discretamente dentro del texto métodos numéricos para la solución de problemas, haciendo hincapié en las aplicaciones de la computadora, no en la programación.
- Se presentan problemas de repaso al final de cada capítulo para motivar a los estudiantes a sintetizar los temas que se tratan en el capítulo.

Tanto *Estática* como *Dinámica* contienen varios temas, que son opcionales y se han indicado con un asterisco (*). Éstos pueden omitirse sin arriesgar la presentación de otros. También se utiliza un asterisco para indicar los problemas que requieren un razonamiento avanzado. Los apartados, problemas de ejemplo y problemas asociados con los métodos numéricos son precedidos por un icono que representa un disco compacto.

En esta tercera edición de *Dinámica* hemos hecho lo que consideramos una serie de importantes mejoras con base en la retroalimentación recibida de los estudiantes y profesores que han utilizado las ediciones anteriores. Además hemos incorporado muchas de las sugerencias proporcionadas por los revisores de la segunda edición.

Se han reorganizado o reescrito varios apartados para hacerlos de más fácil comprensión para el alumno; por ejemplo, se ha simplificado el análisis del método de trabajo-energía del capítulo 18. También se ha reorganizado el capítulo 20 (Vibraciones) para proporcionar una presentación más concisa del material. Además, se han agregado las secciones tituladas "Repaso de ecuaciones" al final de cada capítulo como una ayuda para la solución de problemas.

El número total de problemas de ejemplo y problemas es el mismo que en la edición anterior; sin embargo, el uso de dos colores mejora la lectura general del texto y las ilustraciones. En comparación con la edición anterior, aproximadamente un tercio de los problemas son nuevos o se han modificado.

Lo novedoso en esta edición son los problemas de ejemplo que requieren soluciones numéricas que se han resuelto con MATLAB©, un software matemático que es conocido para muchos estudiantes de ingeniería.

Complemento (En inglés) *Study Guide to Accompany Pytel and Kiusalaas Engineering Mechanics, Dynamics, Third Edition,* J.L. Pytel y A. Pytel, 2009. Los objetivos de esta guía de estudio son de dos tipos. En primer lugar, se incluyen autoevaluaciones para ayudar al estudiante a centrarse en las características más sobresalientes de la lectura asignada. En segundo lugar, la guía de estudio emplea los problemas "guiados" que le dan al estudiante la oportunidad de trabajar con problemas representativos, antes de intentar resolver el problema del libro.

Reconocimientos Agradecemos a los siguientes revisores por sus valiosas sugerencias:

Hamid R. Hamidzadeh, Tennessee State University
Aiman S. Kuzmar, The Pennsylvania State University—Fayette, The Eberly Campus
Gary K. Matthew, University of Florida
Noel Perkins, University of Michigan
Corrado Poli, University of Massachusetts, Amherst

ANDREW PYTEL
JAAN KIUSALAAS



11

Introducción a la dinámica



Sir Isaac Newton (1643-1727), en su tratado Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, *estableció la base de la dinámica con sus tres leyes del movimiento y la teoría de la gravitación universal, que se analizan en este capítulo. (Time & Life Pictures/Getty Images)*

11.1 Introducción

La dinámica clásica estudia el movimiento de los cuerpos empleando los principios establecidos por Newton y Euler.* La organización de este libro se apoya en las subdivisiones de la dinámica clásica que se muestran en la figura 11.1.

*A Sir Isaac Newton se le acredita la aportación del fundamento de la mecánica clásica realizada en 1687 con la publicación de los *Principia*. Sin embargo, las leyes del movimiento, como actualmente se utilizan, fueron desarrolladas casi 60 años después por Leonhard Euler y sus contemporáneos. En particular, las leyes para el movimiento de cuerpos finitos son atribuibles a Euler.

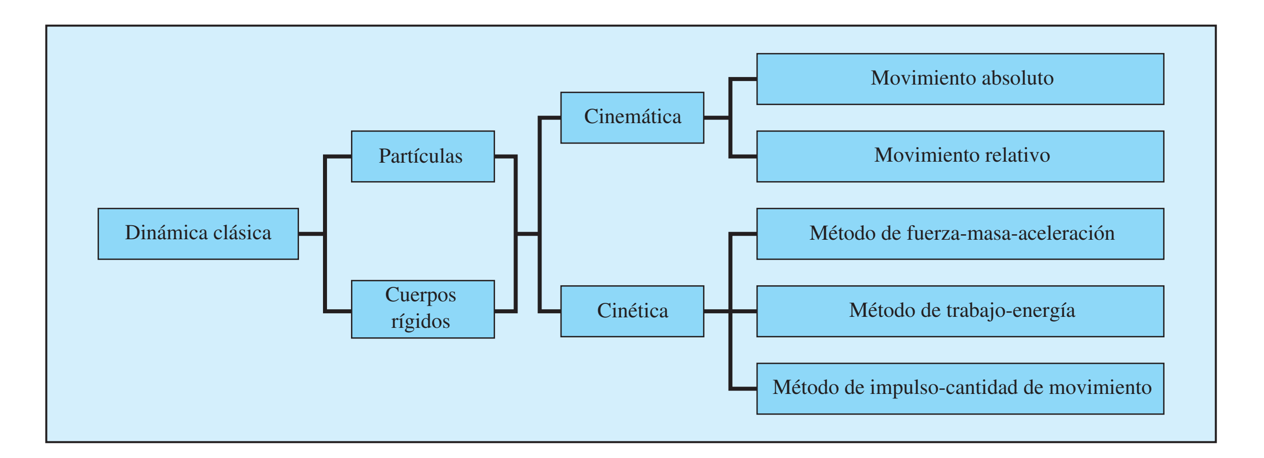


Fig. 11.1

La primera parte de este libro trata de la dinámica de partículas. Una *partícula* es una masa puntual; tiene una masa, pero carece de tamaño. La partícula es un modelo aproximado de un cuerpo cuyas dimensiones son despreciables en comparación con todas las otras medidas que aparecen en la formulación del problema. Por ejemplo, al estudiar el movimiento de la Tierra alrededor del Sol, se permite considerarla como una partícula porque su diámetro es mucho más pequeño que las dimensiones de su órbita.

La segunda parte de este libro está dedicada principalmente a la dinámica de *cuerpos rígidos*. Se dice que un cuerpo es rígido si la distancia entre dos puntos materiales cualesquiera del mismo se mantiene constante, es decir, si éste no se deforma. Debido a que todos los cuerpos experimentan una deformación cuando soportan cargas, entonces no existe uno verdaderamente rígido. Sin embargo, en muchas aplicaciones la deformación es tan pequeña (respecto a las dimensiones del cuerpo) que la idealización de cuerpo rígido es una buena aproximación.

Como se observa en la figura 11.1, las principales ramas de la dinámica son la cinemática y la cinética. La *cinemática* es el estudio de la geometría del movimiento, no se ocupa de sus causas. Por otro lado, la *cinética* trata con las relaciones entre las fuerzas que actúan sobre el cuerpo y el movimiento resultante. La cinemática no sólo es un tema importante por sí mismo, también es un prerrequisito para la cinética. Por tanto, el estudio de la dinámica siempre empieza con los fundamentos de la cinemática.

La cinemática puede dividirse en dos partes, como se muestra en la figura 11.1: movimiento absoluto y movimiento relativo. El término *movimiento absoluto* se utiliza cuando el movimiento se describe respecto a un marco de referencia fijo (sistema de coordenadas). Por otro lado, el relativo describe el movimiento respecto a un sistema de coordenadas móvil.

La figura 11.1 también lista los tres principales métodos de análisis cinético. El *método de fuerza-masa-aceleración* (FMA) es una aplicación directa de las leyes del movimiento de Newton-Euler, que relacionan las fuerzas que actúan sobre el cuerpo con su masa y aceleración. Esas relaciones, llamadas *ecuaciones del movimiento*, deben integrarse dos veces para obtener la velocidad y la posición como funciones del tiempo.

Los *métodos de trabajo-energía* e *impulso-cantidad de movimiento* son formas integrales de las leyes del movimiento de Newton-Euler (las ecuaciones de movimiento se integran respecto a la posición o al tiempo). En ambos métodos, la integra-

ción elimina la aceleración. Estos métodos pueden ser muy eficaces en la solución de problemas concernientes a las relaciones velocidad-posición o velocidad-tiempo.

El propósito de este capítulo es revisar los conceptos básicos de la mecánica newtoniana: desplazamiento, velocidad, aceleración, leyes de Newton y unidades de medición.

11.2 Derivadas de funciones vectoriales

Para estudiar dinámica es un prerrequisito conocer el cálculo vectorial. Aquí se analizan las derivadas de vectores; la integración se presenta en el libro conforme sea necesario.

El vector **A** es una función vectorial de un parámetro escalar u si la magnitud y dirección de **A** dependen de u. (En dinámica, con frecuencia el tiempo es dicho parámetro escalar.) Esta relación funcional se denota con $\mathbf{A}(u)$. Si la variable escalar cambia del valor u a $(u + \Delta u)$, entonces el vector **A** cambiará de $\mathbf{A}(u)$ a $\mathbf{A}(u + \Delta u)$. Por tanto, el cambio en el vector **A** se puede escribir como

$$\Delta \mathbf{A} = \mathbf{A}(u + \Delta u) - \mathbf{A}(u) \tag{11.1}$$

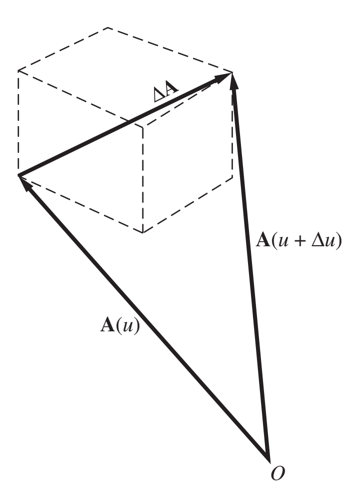


Fig. 11.2

Como se ve en la figura 11.2, $\Delta\mathbf{A}$ se debe a cambios en la magnitud y la dirección del vector **A**.

La derivada de **A** respecto al escalar u se define como

$$\frac{d\mathbf{A}}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta \mathbf{A}}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\mathbf{A}(u + \Delta u) - \mathbf{A}(u)}{\Delta u} \tag{11.2}$$

suponiendo que el límite existe. Esta definición es semejante a la derivada de la función escalar $y(u)$, que está dada por

$$\frac{dy}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{y(u + \Delta u) - y(u)}{\Delta u} \tag{11.3}$$

Precaución Al trabajar con una función vectorial, la magnitud de la derivada $|d\mathbf{A}/du|$ no debe confundirse con la derivada de la magnitud $d|\mathbf{A}|/du$. En general, esas dos derivadas no serán iguales. Por ejemplo, si la magnitud de un vector **A** es constante, entonces $d|\mathbf{A}|/du = 0$. Sin embargo, $|d\mathbf{A}/du|$ no será igual que cero a menos que la dirección de **A** también sea constante.

Las siguientes identidades útiles pueden obtenerse de las definiciones de derivadas (se supone que **A** y **B** son funciones vectoriales del escalar u y m también es un escalar):

$$\frac{d(m\mathbf{A})}{du} = m\frac{d\mathbf{A}}{du} + \frac{dm}{du}\mathbf{A} \tag{11.4}$$

$$\frac{d(\mathbf{A} + \mathbf{B})}{du} = \frac{d\mathbf{A}}{du} + \frac{d\mathbf{B}}{du} \tag{11.5}$$

$$\frac{d(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})}{du} = \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{du} + \frac{d\mathbf{A}}{du} \cdot \mathbf{B} \tag{11.6}$$

$$\frac{d(\mathbf{A} \times \mathbf{B})}{du} = \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{du} + \frac{d\mathbf{A}}{du} \times \mathbf{B} \tag{11.7}$$

11.3 *Posición, velocidad y aceleración de una partícula*

a. Posición

Considere el movimiento de una partícula sobre una curva suave como la que se muestra en la figura 11.3. La posición de la partícula al tiempo t se especifica por el *vector de posición* $\mathbf{r}(t)$, que es el vector que va desde un origen fijo O hasta la partícula. Sean A la ubicación de ésta al tiempo t y B al tiempo $t + \Delta t$, donde Δt es un intervalo de tiempo finito. El correspondiente cambio en el vector de posición de la partícula,

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t) \tag{11.8}$$

es el *vector de desplazamiento* de la partícula.

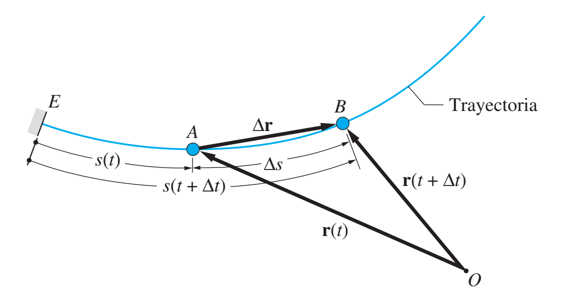


Fig. 11.3

Como se indica en la figura 11.3, la posición de la partícula al tiempo t se puede especificar por la *coordenada de trayectoria* $s(t)$, que es la longitud de la curva entre un punto fijo E y la partícula. El cambio en la longitud de la trayectoria durante el intervalo de tiempo Δt es

$$\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t) \tag{11.9}$$

Precaución El cambio en la longitud de la curva no debe confundirse con la *distancia que ha viajado* la partícula. Las dos son iguales sólo si la dirección del movimiento no cambia durante el intervalo de tiempo. Si la dirección del movimiento cambia durante Δt, entonces la distancia que ha recorrido será mayor que Δs.

b. Velocidad

La velocidad de la partícula al tiempo t se define por

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \dot{\mathbf{r}}(t) \tag{11.10}$$

donde el punto sobre la variable denota su derivación respecto al tiempo. La velocidad es un vector porque es la derivada de la función vectorial $\mathbf{r}(t)$.

En la figura 11.3 se observa que $\Delta\mathbf{r}$ será tangente a la curva en A cuando $\Delta t \to 0$. En consecuencia, el *vector de velocidad es tangente a la trayectoria* de la partícula.

De la figura 11.3 también se deduce que $|\Delta\mathbf{r}| \to \Delta s$ conforme $\Delta t \to 0$. Por tanto, la magnitud de la velocidad, que también se conoce como la *rapidez* de la partícula, es

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\mathbf{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \dot{s}(t) \tag{11.11}$$

La dimensión de la velocidad es [longitud/tiempo], así la unidad de velocidad es m/s o pies/s.

c. Aceleración

En la figura 11.4(a) se muestran los vectores velocidad de la partícula en A (tiempo t) y en B (tiempo $t + \Delta t$). Observe que ambos vectores son tangentes a la trayectoria. El cambio en la velocidad durante el intervalo de tiempo Δt, que se muestra en la figura 11.4(b), es

$$\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t) \tag{11.12}$$

La aceleración de la partícula al tiempo t se define como

$$\mathbf{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} = \dot{\mathbf{v}}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t) \tag{11.13}$$

La aceleración es un vector de dimensión [longitud/tiempo^2]; así su unidad es m/s^2 o pies/s^2.

Precaución En general, el vector aceleración *no es tangente a la trayectoria* de la partícula. La dirección de la aceleración coincide con $\Delta\mathbf{v}$ cuando $\Delta t \to 0$, que, como se observa en la figura 11.4(b), no necesariamente está en la misma dirección que $\mathbf{v}$.

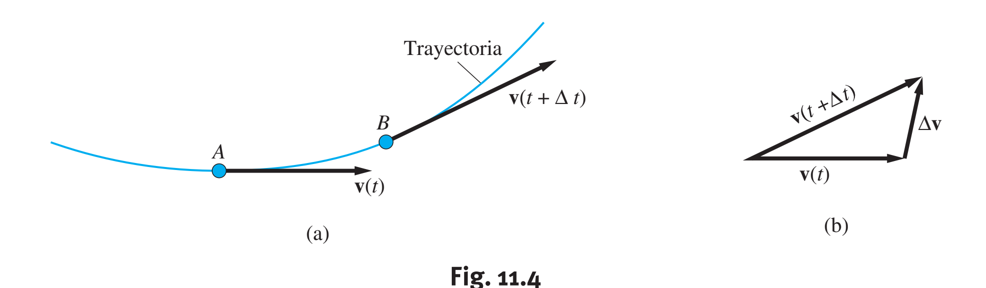


Fig. 11.4

11.4 Mecánica newtoniana*

a. Panorama de la mecánica newtoniana

En 1687, Sir Isaac Newton (1642-1727) publicó sus celebradas leyes del movimiento en los *Principia* (*Principios matemáticos de la filosofía natural*). Sin duda, este

*Este apartado, que coincide con lo expuesto en el apartado 1.2 de *Estática*, se repite aquí por su relevancia en el estudio de la dinámica.

trabajo se encuentra entre los libros científicos más prestigiosos que se han publicado en todo el mundo. Sin embargo, no debe pensarse que su divulgación estableció de inmediato la mecánica clásica. La labor de Newton en esta área consistió principalmente en la mecánica celeste y así se limitó al movimiento de partículas. Tuvieron que pasar alrededor de doscientos años para que se desarrollaran la dinámica del cuerpo rígido, la mecánica de fluidos y la mecánica de cuerpos deformables. Cada una de estas áreas requirió nuevos axiomas para tener una forma aplicable.

Sin duda, la obra de Newton es el fundamento de la mecánica clásica o newtoniana. Sus esfuerzos han influido sobre otras dos ramas de la mecánica que nacieron al inicio del siglo XX: las mecánicas relativista y cuántica. La *mecánica relativista* considera fenómenos que ocurren a escala cósmica (velocidades que se aproximan a la rapidez de la luz, campos gravitacionales intensos, etc.). Esto elimina dos de los postulados más objetables de la mecánica newtoniana: la existencia de un marco de referencia fijo o inercial y la suposición de que el tiempo es una variable absoluta, "que fluye" de manera uniforme en todas las partes del universo. (Existe evidencia de que el propio Newton se preocupaba por esos dos postulados.) La *mecánica cuántica* considera las partículas a escala atómica o subatómica. Elimina dos conceptos muy apreciados en mecánica clásica: determinismo y continuidad. La mecánica cuántica es en esencia una teoría probabilística; en lugar de predecir un evento, muestra la probabilidad de que ocurra un evento. Aún más, de acuerdo con esta teoría, los eventos suceden en pasos discretos (llamados *cuantos*) en lugar de hacerlo de manera continua.

Sin embargo, las mecánicas relativista y cuántica no han invalidado los principios de la newtoniana. En el análisis del movimiento de cuerpos en la vida diaria, ambas teorías convergen a las ecuaciones de la mecánica newtoniana. Así las teorías más esotéricas en realidad refuerzan la validez de las leyes del movimiento introducidas por Newton.

b. Leyes de Newton para el movimiento de partículas

Si se emplea terminología moderna, las leyes de Newton para el movimiento de las partículas pueden establecerse como sigue.

1. Si una partícula está en reposo (o se mueve con velocidad constante), permanecerá así (o continuará moviéndose con velocidad constante) a menos que una fuerza actúe sobre ella.
2. Una partícula sometida a una fuerza se acelerará en la dirección de ésta. La magnitud de la aceleración será proporcional a la magnitud de la fuerza e inversamente proporcional a la masa de la partícula.
3. Para toda acción existe una reacción igual y opuesta; es decir, las fuerzas de interacción entre dos partículas son iguales en magnitud y opuestas en dirección.

No obstante que la primera ley es simplemente un caso especial de la segunda, es costumbre establecer la primera ley por separado debido a su importancia en el campo de la estática.

c. Marcos de referencia inerciales

Cuando se aplica la segunda ley de Newton, debe prestarse atención al sistema de coordenadas respecto al que se miden las aceleraciones. Un marco de *referencia inercial* (que también se conoce como marco de referencia newtoniano o de Galileo) se define como el sistema de coordenadas rígido en el que las leyes de Newton son válidas, con un grado aceptable de exactitud, para el movimiento de partículas

respecto a dicho marco. En la mayoría de las aplicaciones sobre la superficie de la Tierra, un marco inercial puede aproximarse con suficiente exactitud al fijar a la Tierra el sistema de coordenadas. En el estudio de los satélites alrededor de nuestro planeta, en general es suficiente con un sistema de coordenadas que se ha fijado al Sol. Para un viaje interplanetario, sería necesario utilizar sistemas de coordenadas asignados a las estrellas fijas.

Es posible mostrar que también es inercial cualquier marco que se traslade a velocidad constante respecto a un marco inercial. Es una práctica común omitir la palabra *inercial* cuando se hace referencia a marcos para los que es obvio que las leyes de Newton son aplicables.

d. Unidades y dimensiones

A los estándares de medición se les llama *unidades*. El término *dimensión* se refiere al tipo de medición, sin considerar las unidades que se emplean. Por ejemplo, kilogramo y pie/segundo son unidades, mientras que masa y longitud/tiempo son dimensiones. A lo largo del libro se utilizan dos estándares de medición: el sistema estándar o inglés (U.S. Customary) y el Sistema SI (de *Systéme international d'unités; Sistema Internacional de Unidades*). En el *sistema inglés* las dimensiones básicas (fundamentales) son fuerza $[F]$, longitud $[L]$ y tiempo $[T]$. Las unidades básicas correspondientes son libra (lb), pie (ft) y segundo (s). Las dimensiones básicas en el *SI* son masa $[M]$, longitud $[L]$ y tiempo $[T]$, y las unidades básicas son kilogramo (kg), metro (m) y segundo (s). Todas las demás dimensiones o unidades son combinaciones de las cantidades básicas. Por ejemplo, la dimensión de velocidad es $[L/T]$, la unidad sería pie/s o m/s, y así sucesivamente.

Se llama *sistema gravitacional* a aquel que cuenta con dimensiones básicas $[FLT]$ (como el inglés). Si las dimensiones básicas son $[MLT]$ (como en el SI), se dice que es un *sistema absoluto*. En cada sistema de medición, las unidades básicas se definen por medio de fenómenos u objetos físicamente reproducibles. Por ejemplo, el segundo se define como la duración de un número de ciclos de radiación específica en cierto isótopo y el kilogramo se define como la masa de cierto bloque de metal que se conserva cerca de París, Francia.

Todas las ecuaciones que representan fenómenos físicos deben ser *dimensionalmente homogéneas*; es decir, cada término de la ecuación debe tener la misma dimensión. De lo contrario, la ecuación no tendrá sentido físico (digamos, no tiene significado sumar una fuerza a una longitud). Es un buen hábito aprender a comprobar la homogeneidad dimensional de las ecuaciones, con lo que es posible revelar errores que se han cometido durante las manipulaciones algebraicas.

e. Masa, fuerza y peso

Si una fuerza **F** actúa sobre una partícula de masa m, la segunda ley de Newton establece que

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \tag{11.14}$$

donde **a** es el vector aceleración de la partícula. Para un sistema gravitacional $[FLT]$, la homogeneidad dimensional de la ecuación (11.14) requiere que la dimensión de la masa sea

$$[M] = \left[\frac{FT^2}{L}\right] \tag{11.15a}$$

En el sistema inglés, la unidad derivada de la masa es el *slug*. Un slug se define como la masa que es acelerada a 1 pie/s^2 por una fuerza de 1.0 lb. Si en la ecuación (11.15a) se sustituyen las unidades para las dimensiones, se obtiene para la unidad de un slug

$$1.0 \text{ slug} = 1.0 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{pie}$$

Para un sistema de unidades absoluto [*MLT*], la homogeneidad dimensional de la ecuación (11.14) conduce a la dimensión de la fuerza

$$[F] = \left[\frac{ML}{T^2}\right] \tag{11.15b}$$

La unidad derivada de fuerza en el SI es un *newton* (N), que se define como la fuerza que acelera una masa de 1.0 kg a 1.0 m/s^2. De la ecuación (11.15b), se obtiene

$$1.0 \text{ N} = 1.0 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$$

Peso es la fuerza gravitacional que actúa sobre un cuerpo. Si la aceleración gravitacional (aceleración de un cuerpo en caída libre) se denota con g, el peso W de un cuerpo de masa m está dado por la segunda ley de Newton:

$$W = mg \tag{11.16}$$

Observe que la masa es una propiedad constante de un cuerpo, mientras que el peso es una variable que depende del valor local de g. La *gravedad estándar* es la aceleración gravitacional nominal al nivel del mar y se define como $g = 9.80665$ m/s^2 (32.174 pies/s^2). El valor de g varía de 9.78 a 9.84, dependiendo de la latitud y la proximidad de grandes masas de terreno. En este libro, en todos los cálculos se utiliza el valor promedio

$$g = 9.81 \text{ m/s}^2 \text{ (32.2 pies/s}^2\text{)}$$

Así la masa de un cuerpo que pesa 1.0 lb sobre la Tierra es (1.0 lb)/(32.2 pies/s^2) = 1/32.2 slugs. De manera similar, si la masa de un cuerpo es 1.0 kg, entonces su peso sobre la Tierra es (9.81 m/s^2)(1.0 kg) = 9.81 N.

En una época, la libra también se usó como unidad de masa. La *libra masa* (lbm) se definió como la masa de un cuerpo que pesa 1.0 lb sobre la superficie de la Tierra. No obstante que la libra masa es una unidad obsoleta, en ocasiones se utiliza, lo que genera confusión entre masa y peso. En este texto, la libra se emplea exclusivamente como una unidad de fuerza.

f. Conversión de unidades

Un método conveniente para convertir una medición de un conjunto de unidades a otro consiste en multiplicar por factores de conversión apropiados. Por ejemplo, para convertir 240 mi/h a pies/s, se procede como sigue:

$$240 \text{ mi/h} = 240 \frac{\cancel{\text{mi}}}{\cancel{\text{h}}} \times \frac{1.0 \cancel{\text{h}}}{3600 \text{ s}} \times \frac{5280 \text{ pies}}{1.0 \cancel{\text{mi}}} = 352 \text{ pies/s}$$

donde los multiplicadores 1.0 h/3600 s y 5280 pies/1.0 mi son factores de conversión. Como 1.0 h = 3600 s y 5280 pies = 1.0 mi, vemos que cada factor de conversión no tiene dimensiones y tiene magnitud 1. Por tanto, una medición no cambia cuando se multiplica por factores de conversión, sólo varían sus unidades. Observe que está permitido eliminar unidades durante la conversión como si fueran cantidades algebraicas.

Al final de esta obra se listan factores de conversión aplicables en mecánica.

g. Ley de la gravitación

Además de sus múltiples logros, Newton también propuso la ley de la gravitación universal. Considere dos partículas con masas m_A y m_B separadas por una distancia R, como se muestra en la figura 11.5. La ley de la gravitación establece que las dos partículas se atraen entre sí debido a las fuerzas de magnitud F que actúan sobre la recta que une a las partículas, donde

$$F = G\frac{m_A m_B}{R^2} \tag{11.17}$$

La constante gravitacional universal G es aproximadamente 3.44×10^{-8} pies^3/(slugs $\cdot$ s^2) o 6.67×10^{-11} m^3/(kg $\cdot$ s^2). No obstante que esta ley es válida para las partículas, Newton mostró que también es aplicable a los cuerpos esféricos si sus masas están distribuidas de manera uniforme. (Newton desarrolló el cálculo cuando obtuvo dicho resultado.)

Sean $m_A = M_T$ (la masa de la Tierra), $m_B = m$ (la masa de un cuerpo) y $R = R_T$ (el radio medio de la Tierra), entonces F en la ecuación (11.17) será el peso W del cuerpo. Al comparar $W = G\, M_T m/R^2{}_T$ con $W = mg$, se encuentra que $g = G\, M_T/R^2{}_T$. Por supuesto, es posible que se requieran ajustes en el valor de g en algunas aplicaciones con el fin de considerar la variación local de la atracción gravitacional.

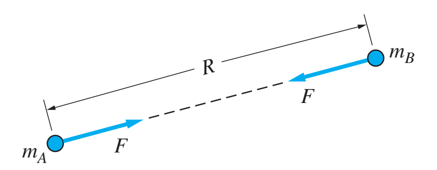


Fig. 11.5

Problema de ejemplo **11.1**

Convierta 1.5 mi/h a mm/s.

Solución

Al utilizar los factores de conversión que se listan al final del libro, se obtiene

$$1.5 \text{ mi/h} = \frac{1.5 \cancel{\text{mi}}}{\cancel{\text{h}}} \times \frac{1.0 \cancel{\text{h}}}{3600 \text{ s}} \times \frac{5280 \cancel{\text{pies}}}{1.0 \cancel{\text{mi}}} \times \frac{304.8 \text{ mm}}{1.0 \cancel{\text{pies}}} = 671 \text{ mm/s} \qquad \textit{Respuesta}$$

Problema de ejemplo **11.2**

La aceleración a de una partícula está relacionada con su velocidad v, con su coordenada de posición x y con el tiempo t por la ecuación

$$a = Ax^3t + Bvt^2 \tag{a}$$

donde A y B son constantes. La dimensión de la aceleración es longitud por unidad de tiempo al cuadrado, es decir, $[a] = [L/T^2]$. Las dimensiones de las otras variables son $[v] = [L/T]$, $[x] = [L]$ y $[t] = [T]$. Deduzca las dimensiones de A y B para que la ecuación (a) sea homogénea dimensionalmente. Exprese las unidades de A y B tanto en el SI como en el sistema inglés.

Solución

Para que la ecuación (a) sea dimensionalmente correcta, la dimensión de cada término en el lado derecho de la ecuación debe ser $[L/T^2]$, igual que la dimensión de a. Por tanto, la dimensión del primer término en el lado derecho de la ecuación (a) es

$$[Ax^3t] = [A][x^3][t] = [A][L^3][T] = \left[\frac{L}{T^2}\right] \tag{b}$$

Al resolver la ecuación (b) para la dimensión de A, se encuentra que

$$[A] = \frac{1}{[L^3][T]}\left[\frac{L}{T^2}\right] = \frac{1}{[L^2T^3]} \qquad \textit{Respuesta}$$

En el SI las unidades de A son $\text{m}^{-2}\text{s}^{-3}$, mientras que en el sistema inglés sus unidades son $\text{pies}^{-2}\text{s}^{-3}$.

Al efectuar un análisis dimensional similar sobre el segundo término del lado derecho de la ecuación (a) se obtiene

$$[Bvt^2] = [B][v][t^2] = [B]\left[\frac{L}{T}\right][T^2] = \left[\frac{L}{T^2}\right] \tag{c}$$

Cuando se resuelve la ecuación (c) para la dimensión de B, se encuentra

$$[B] = \left[\frac{L}{T^2}\right]\left[\frac{T}{L}\right]\left[\frac{1}{T^2}\right] = \left[\frac{1}{T^3}\right] \qquad \textit{Respuesta}$$

Las unidades de B son s^{-3} en cualesquiera de los sistemas SI o inglés.

Problema de ejemplo 11.3

Encuentre la fuerza gravitacional ejercida por la Tierra sobre un hombre de 70 kg cuya altura sobre la superficie de la Tierra es igual al radio de ésta. La masa y el radio de la Tierra son $M_T = 5.9742 \times 10^{24}$ kg y $R_T = 6378$ km, respectivamente.

Solución

Considere un cuerpo de masa m que se localiza a una distancia $2R_T$ del centro de la Tierra de masa M_T. La ley de la gravitación universal, de la ecuación (11.17), establece que el cuerpo es atraído hacia la Tierra con la fuerza F dada por

$$F = G\frac{mM_T}{(2R_T)^2}$$

donde $G = 6.67 \times 10^{-11}$ m^3/(kg · s^2) es la constante gravitacional universal. Al sustituir los valores para G y los parámetros dados, la fuerza gravitacional de la Tierra que actúa sobre el hombre de 70 kg es

$$F = (6.67 \times 10^{-11})\frac{(70)(5.9742 \times 10^{24})}{[2(6378 \times 10^3)]^2} = 171.4\ \text{N}$$ *Respuesta*

Repaso de ecuaciones

Fórmulas de derivación para funciones vectoriales

$$\frac{d(m\mathbf{A})}{du} = m\frac{d\mathbf{A}}{du} + \frac{dm}{du}\mathbf{A}$$

$$\frac{d(\mathbf{A}+\mathbf{B})}{du} = \frac{d\mathbf{A}}{du} + \frac{d\mathbf{B}}{du}$$

$$\frac{d(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})}{du} = \mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{B}}{du} + \frac{d\mathbf{A}}{du}\cdot\mathbf{B}$$

$$\frac{d(\mathbf{A}\times\mathbf{B})}{du} = \mathbf{A}\times\frac{d\mathbf{B}}{du} + \frac{d\mathbf{A}}{du}\times\mathbf{B}$$

Posición, velocidad y aceleración de una partícula

Desplazamiento: $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$

Cambio en la longitud de la trayectoria: $\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$

Velocidad: $\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \dot{\mathbf{r}}(t) \quad v(t) = \dot{s}(t)$

Aceleración: $\mathbf{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} = \dot{\mathbf{v}}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t)$

Segunda ley de Newton

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

Relación peso-masa

$$W = mg \quad g = 9.81\ \text{m/s}^2 = 32.2\ \text{pies/s}^2$$

Ley de la gravitación universal

$$F = G\frac{m_A m_B}{R^2}$$

$$G = 6.67 \times 10^{-11}\ \text{m}^3/(\text{kg}\cdot\text{s}^2) = 3.44 \times 10^{-8}\ \text{pies}^3/(\text{slugs}\cdot\text{s}^2)$$

Problemas

11.1 Una persona pesa 30 lb sobre la Luna, en donde $g = 5.32$ pies/s^2. Determine: (a) la masa de la persona y (b) su peso sobre la Tierra.

11.2 El radio y la longitud de un cilindro de acero son 60 mm y 120 mm, respectivamente. Si la densidad de masa del acero es 7850 kg/m^3, determine el peso del cilindro en libras.

11.3 Realice las siguientes conversiones: (a) 100 kN/m^2 a lb/pulg^2; (b) 30 m/s a mi/h; (c) 800 slugs a Mg; (d) 20 lb/pie^2 a N/m^2.

11.4 El momento de inercia de cierto cuerpo es $I = 20$ kg · m^2. Exprese I en términos de las unidades básicas del sistema inglés.

11.5 Cuando un cuerpo rígido de masa m se mueve en un plano, su energía cinética (Ec) es

$$Ec = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mk^2\omega^2$$

donde v es la velocidad de su centro de masa, k es una constante y ω es la velocidad angular del cuerpo en rad/s. Exprese las unidades de Ec y k en términos de las unidades básicas del (a) sistema SI, y (b) sistema inglés.

11.6 En cierta aplicación, la aceleración a y la coordenada de posición x de una partícula están relacionadas por

$$a = \frac{gkx}{W}$$

donde g es la aceleración gravitacional, k es una constante y W es el peso de la partícula. Demuestre que esta ecuación es dimensionalmente consistente si la dimensión de k es $[F/L]$.

11.7 Cuando una fuerza F actúa sobre un resorte lineal, la elongación x del mismo está dada por $F = kx$, donde k es la constante de *rigidez* del resorte. Determine la dimensión de k en términos de las dimensiones básicas de un sistema absoluto de unidades $[MLT]$.

11.8 Determine las dimensiones de lo siguiente en términos de las dimensiones básicas de un sistema gravitacional de unidades $[FLT]$: (a) mv^2; (b) mv, y (c) ma. Las dimensiones de las variables son $[m] = [M]$, $[v] = [L/T]$ y $[a] = [L/T^2]$.

11.9 Un libro de geometría presenta la ecuación de una parábola como $y = x^2$, donde x y y se miden en pulgadas. ¿Cómo puede esta ecuación ser dimensionalmente correcta?

11.10 El momento de inercia I, de una esfera homogénea, respecto a un diámetro es $I = (2/5)mR^2$, en donde m y R son la masa y el radio de la esfera, respectivamente.

Encuentre la dimensión de I en términos de las dimensiones básicas de (a) un sistema gravitacional $[FLT]$ y (b) uno absoluto $[MLT]$.

11.11 Determine las dimensiones de las constantes A y B en las ecuaciones siguientes, suponiendo que cada una de ellas es dimensionalmente correcta: (a) $v^3 = Ax^2 + Bvt^2$ y (b) $x^2 = At^2e^{Bt^2}$. Las dimensiones de las variables son $[x] = [L]$, $[v] = [L/T]$ y $[a] = [L/T^2]$.

11.12 En cierto problema de vibración, la ecuación diferencial que describe el movimiento de una partícula de masa m es

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = P_0 \operatorname{sen} \omega t$$

donde x es el desplazamiento de la partícula. ¿Cuáles son las dimensiones de las constantes c, k, P_0 y ω en términos de las dimensiones básicas de un sistema gravitacional $[FLT]$?

11.13 Con la ecuación (11.17) obtenga las dimensiones de la constante gravitacional universal G, en términos de las dimensiones básicas de (a) un sistema gravitacional $[FLT]$ y (b) uno absoluto $[MLT]$.

11.14 Una famosa ecuación de Einstein es $E = mc^2$, donde E es energía, m es masa y c es la rapidez de la luz. Determine la dimensión de la energía en términos de las dimensiones básicas de (a) un sistema gravitacional $[FLT]$ y (b) uno absoluto $[MLT]$.

11.15 Dos partículas de 10 kg se colocan a 500 mm entre sí. Exprese la atracción gravitacional, que actúa sobre una de ellas, como un porcentaje de su peso sobre la Tierra.

11.16 Dos esferas idénticas de 3 lb de peso y radio de 9 pulg se ponen en contacto. Encuentre la atracción gravitacional entre ellas.

En los problemas del 11.17 al 11.21 utilice los siguientes datos:

Masa de la Tierra $= 5.9742 \times 10^{24}$ kg
Radio de la Tierra $= 6378$ km
Masa de la Luna $= 0.073483 \times 10^{24}$ kg
Radio de la Luna $= 1737$ km
Masa del Sol $= 1.9891 \times 10^{30}$ kg
Distancia entre la Tierra y el Sol $= 149.6 \times 10^6$ km

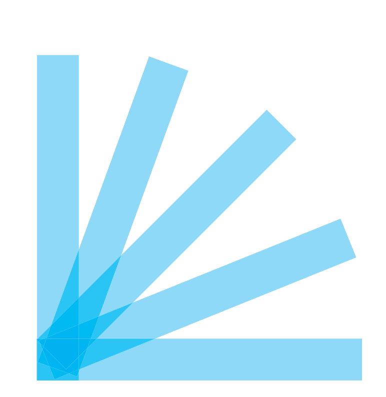
11.17 Encuentre la masa de un objeto (en kg) que pesa 2 kN a una altura de 1800 km sobre la superficie terrestre.

11.18 Pruebe que el peso de un objeto sobre la Luna es aproximadamente una sexta parte de su peso sobre la Tierra.

11.19 Un hombre pesa 150 lb sobre la superficie terrestre. Determine su peso en una elevación igual al radio de la Tierra.

11.20 Determine la fuerza gravitacional ejercida por el Sol sobre un objeto de 1.0 kg en la superficie terrestre.

11.21 Una nave espacial viaja sobre una línea recta que conecta a la Tierra con el Sol. ¿A qué distancia de la Tierra serán iguales las fuerzas gravitacionales de la Tierra y el Sol?



12 Dinámica de una partícula: coordenadas rectangulares

La caída de un paracaidista está regida por las fuerzas de gravedad y arrastre aerodinámico. Cuando esas dos fuerzas están en balance, entonces el paracaidista desciende con una rapidez constante conocida como velocidad terminal. La determinación de la velocidad terminal es el tema del problema 12.47. (Roberto Mettifogo/Photonica/Getty Images)

12.1 Introducción

En este capítulo se estudia la dinámica (tanto cinemática como cinética) de una partícula en un sistema de coordenadas rectangulares. El análisis se limita a una *sola partícula* y se supone que los ejes de coordenadas son *fijos*; es decir, no se mueven. En el capítulo 15 se trata la dinámica de dos o más partículas que interactúan y la cinemática del movimiento relativo (sistemas de coordenadas en traslación).

La definición de las variables cinemáticas básicas (posición, velocidad y aceleración), que se presentaron en el capítulo anterior, no hace referencia a un sistema de coordenadas. Por tanto, esas definiciones son aplicables en cualquier marco de referencia fijo. Sin embargo, cuando se requiere describir el movimiento es esencial un sistema de coordenadas específico. Aquí se emplea el más sencillo de todos los marcos de referencia: el sistema de coordenadas cartesiano rectangular. No obstante que las coordenadas rectangulares podrían utilizarse en la solución de cualquier problema, no siempre es conveniente emplearlas. Con frecuencia, los sistemas de coordenadas curvilíneas descritos en el capítulo siguiente permiten efectuar análisis más sencillos.

Las coordenadas rectangulares son naturalmente más adecuadas para analizar el movimiento rectilíneo (movimiento sobre una línea recta) o el curvilíneo que se puede describir como una superposición de movimientos rectilíneos, como el vuelo de un proyectil. Estas dos aplicaciones conforman el volumen de este capítulo.

Un problema importante de la cinemática se presenta en el análisis del movimiento rectilíneo: dada la aceleración de una partícula, determine su velocidad y su posición. Esta tarea, que es equivalente a integrar (o resolver) la ecuación diferencial de segundo orden $\ddot{x} = f(\dot{x}, x, t)$, aparece con frecuencia en la dinámica. La mayoría de las ecuaciones diferenciales que se encuentran en este libro son suficientemente simples para resolverse desde el punto de vista analítico. Sin embargo, se incluyen algunos problemas que deben integrarse de manera numérica. No obstante que esos problemas son opcionales, representan un recordatorio significativo de que la mayoría de los problemas prácticos carecen de soluciones analíticas.

12.2 Cinemática

La figura 12.1(a) muestra la trayectoria de la partícula A, que se mueve en un marco de referencia rectangular fijo. Sean **i**, **j** y **k** los vectores base (vectores unitarios), el vector de posición de la partícula se puede escribir como

$$\mathbf{r}(t) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \tag{12.1}$$

donde x, y y z son las coordenadas rectangulares dependientes del tiempo de la partícula.

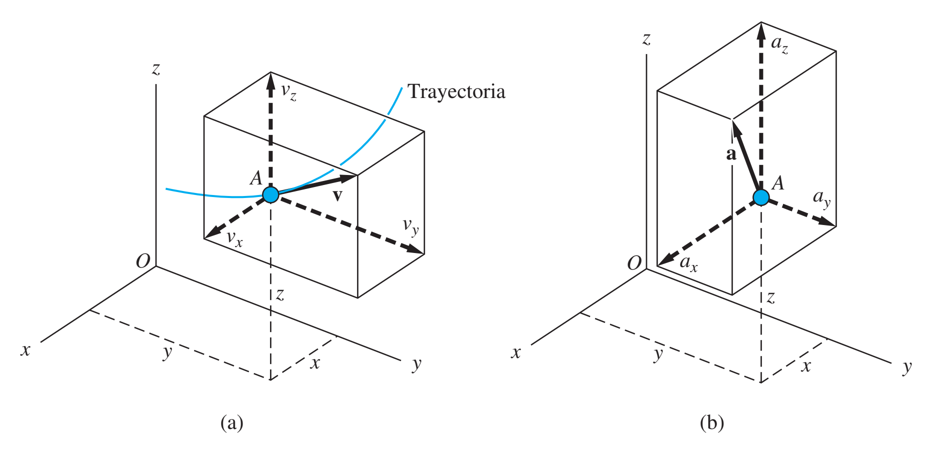


Fig. 12.1

Aplicando la definición de velocidad, ecuación (11.10), y la regla de la cadena de la derivación, ecuación (11.4), se obtiene

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \\ &= x\frac{d\mathbf{i}}{dt} + \dot{x}\mathbf{i} + y\frac{d\mathbf{j}}{dt} + \dot{y}\mathbf{j} + z\frac{d\mathbf{k}}{dt} + \dot{z}\mathbf{k}\end{aligned}$$

Como los ejes de coordenadas son fijos,* los vectores base permanecen constantes, así $d\mathbf{i}/dt = d\mathbf{j}/dt = d\mathbf{k}/dt = \mathbf{0}$. Por tanto, la velocidad será

$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k} \tag{12.2}$$

donde las componentes rectangulares, que se muestran en la figura 12.1(a), son

$$v_x = \dot{x} \qquad v_y = \dot{y} \qquad v_z = \dot{z} \tag{12.3}$$

De modo similar, la definición de aceleración, ecuación (11.13), conduce a

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}) = \dot{v}_x\mathbf{i} + \dot{v}_y\mathbf{j} + \dot{v}_z\mathbf{k}$$

Así la aceleración es

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k} \tag{12.4}$$

con las componentes rectangulares [véase la figura 12.1(b)]

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x} \qquad a_y = \dot{v}_y = \ddot{y} \qquad a_z = \dot{v}_z = \ddot{z} \tag{12.5}$$

a. Movimiento en un plano

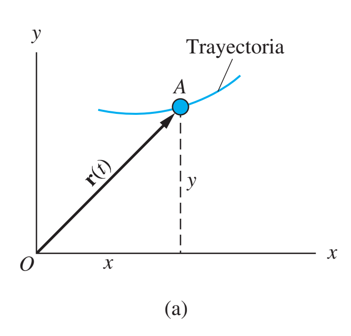
El movimiento en un plano se presenta con frecuencia en aplicaciones de ingeniería, así que merece atención especial. La figura 12.2(a) muestra la trayectoria de una partícula A que se mueve en el plano xy. Para obtener las componentes rectangulares bidimensionales de $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{a}$, se coloca $z = 0$ en las ecuaciones de la (12.1) a la (12.5). Los resultados son

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \qquad \mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} \qquad \mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} \tag{12.6}$$

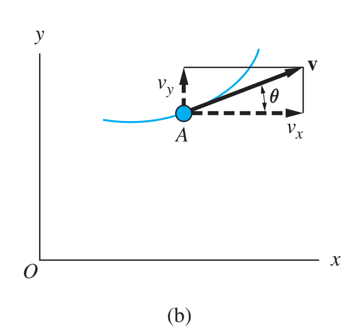
donde

$$\begin{aligned} v_x &= \dot{x} & v_y &= \dot{y} \\ a_x &= \dot{v}_x = \ddot{x} & a_y &= \dot{v}_y = \ddot{y}\end{aligned} \tag{12.7}$$

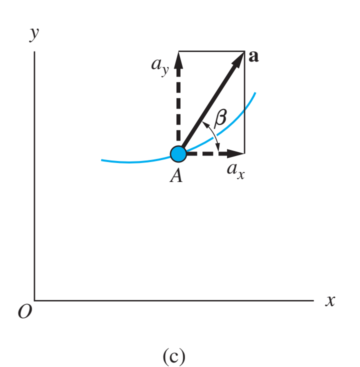
*En realidad esta suposición es muy restrictiva. Como se muestra en el capítulo 16, los resultados continúan siendo válidos si el sistema de coordenadas se traslada sin rotar.



(a)



(b)



(c)

Fig. 12.2

La figura 12.2(b) muestra las componentes rectangulares de la velocidad. El ángulo θ, que define la dirección de **v**, se puede obtener de

$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{dy}{dx}$$

Como la pendiente de la trayectoria es igual a dy/dx, se observa que **v** es tangente a la curva, un resultado que ya se ha indicado en el capítulo anterior.

En la figura 12.2(c) se muestran las componentes rectangulares de **a**. El ángulo β que define la dirección de **a** puede calcularse con la relación

$$\tan\beta = \frac{a_y}{a_x} = \frac{d^2y/dt^2}{d^2x/dt^2}$$

Ya que en general β no es igual a θ, la aceleración no necesariamente es tangente a la trayectoria.

b. Movimiento rectilíneo

Si la trayectoria de una partícula es una línea recta, el movimiento se llama *rectilíneo*. En la figura 12.3 se muestra un ejemplo de movimiento rectilíneo, en el que la partícula A se mueve sobre el eje x. En este caso, se emplea $y = 0$ en las ecuaciones (12.6) y (12.7), para obtener $\mathbf{r} = x\mathbf{i}$, $\mathbf{v} = v_x\mathbf{i}$ y $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i}$. Cada uno de esos vectores se dirige sobre la curva (es decir, el movimiento es unidimensional). Como los subíndices ya no se necesitan, las ecuaciones para el movimiento rectilíneo sobre el eje x se escriben en la forma usual

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} \qquad \mathbf{v} = v\mathbf{i} \qquad \mathbf{a} = a\mathbf{i} \tag{12.8}$$

donde

$$v = \dot{x} \qquad a = \dot{v} = \ddot{x} \tag{12.9}$$

En algunos problemas, es más conveniente expresar la aceleración en términos de la velocidad y la posición, en lugar de la velocidad y el tiempo. Este cambio de variable puede lograrse mediante la regla de la cadena de la derivada: $a = dv/dt = (dv/dx)(dx/dt)$. Al observar que $dx/dt = v$, se obtiene

$$a = v\frac{dv}{dx} \tag{12.10}$$

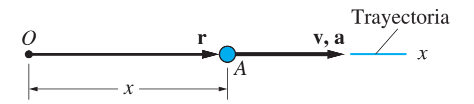


Fig. 12.3

Problema de ejemplo 12.1

La posición de una partícula que se mueve sobre el eje x está definida por $x = -3t^2 + 12t - 6$ pies, donde t está en segundos. Para el intervalo de tiempo de $t = 0$ a $t = 3$ s: 1. trace la gráfica de la posición, la velocidad y la aceleración como funciones del tiempo; 2. calcule la distancia recorrida, y 3. determine el desplazamiento de la partícula.

Solución

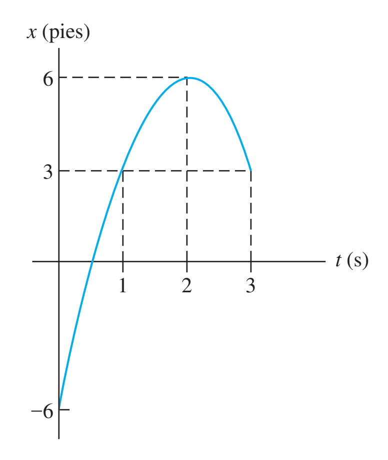
Parte 1

Ya que el movimiento es rectilíneo, es posible calcular la velocidad y la aceleración como sigue

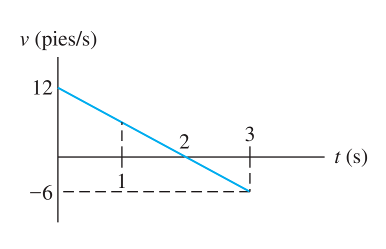
$$x = -3t^2 + 12t - 6 \text{ pies} \tag{a}$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -6t + 12 \text{ pies/s} \tag{b}$$

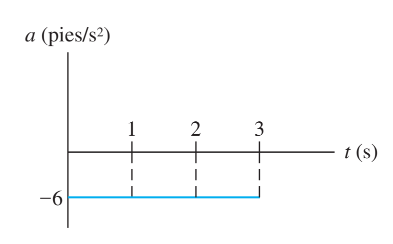
$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -6 \text{ pies/s}^2 \tag{c}$$



(a)



(b)



(c)

Estas funciones están graficadas en las figuras de la (a) a la (c) para el intervalo de tiempo indicado, $t = 0$ a $t = 3$ s. Observe que la gráfica de x es parabólica, así que las sucesivas derivadas conducen a una función lineal para la velocidad y a un valor constante para la aceleración. El tiempo correspondiente al valor máximo (o mínimo) de x puede encontrarse al efectuar $dx/dt = 0$ o al utilizar la ecuación (b), $v = -6t + 12 = 0$, que da $t = 2$ s. Cuando se sustituye $t = 2$ s en la ecuación (a), se obtiene

$$x_{max} = -3(2)^2 + 12(2) - 6 = 6 \text{ pies}$$

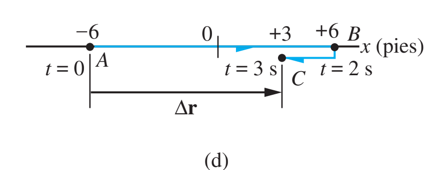
Parte 2

La figura (d) muestra cómo se mueve la partícula durante el intervalo de tiempo de $t = 0$ a $t = 3$ s. Cuando $t = 0$, la partícula abandona A ($x = -6$ pies), moviéndose hacia la derecha. Cuando $t = 2$ s, la partícula se detiene en B ($x = 6$ pies). Después se mueve hacia la izquierda, llegando a C ($x = 3$ pies) cuando $t = 3$ s. Por tanto, la distancia recorrida es igual a la que el punto recorrió hacia la derecha ($\overline{AB}$) más la distancia recorrida hacia la izquierda ($\overline{BC}$), lo que da

$$d = \overline{AB} + \overline{BC} = 12 + 3 = 15 \text{ pies} \qquad \textit{Respuesta}$$

Parte 3

El desplazamiento durante el intervalo de tiempo, de $t = 0$ a $t = 3$ s, es el vector que va desde la posición inicial del punto hasta su posición final. Este vector, que se indica como $\Delta\mathbf{r}$ en la figura (d), es

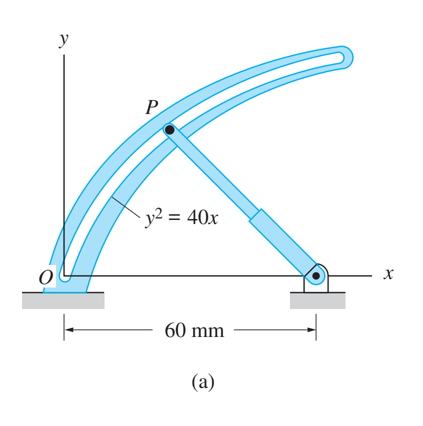


(d)

$$\Delta\mathbf{r} = 9\mathbf{i} \text{ pies} \qquad \textit{Respuesta}$$

Observe que la distancia total recorrida (15 pies) es más grande que la magnitud del vector desplazamiento (9 pies) ya que la dirección del movimiento cambia durante el intervalo de tiempo.

Problema de ejemplo **12.2**



(a)

El perno P en el extremo de la varilla telescópica de la figura (a) se desliza sobre la trayectoria parabólica fija $y^2 = 40x$, donde x y y se miden en milímetros. La coordenada y de P varía con el tiempo t (que se mide en segundos) de acuerdo con $y = 4t^2 + 6t$ mm. Cuando $y = 30$ mm, calcule: 1. el vector de velocidad de P y 2. el vector de aceleración de P.

Solución

Parte 1

Al sustituir

$$y = 4t^2 + 6t \text{ mm} \tag{a}$$

en la ecuación de la trayectoria y al despejar a x, se obtiene

$$x = \frac{y^2}{40} = \frac{(4t^2 + 6t)^2}{40} = 0.40t^4 + 1.20t^3 + 0.90t^2 \text{ mm} \tag{b}$$

Las componentes rectangulares del vector de velocidad son

$$v_x = \dot{x} = 1.60t^3 + 3.60t^2 + 1.80t \text{ mm/s} \tag{c}$$

$$v_y = \dot{y} = 8t + 6 \text{ mm/s} \tag{d}$$

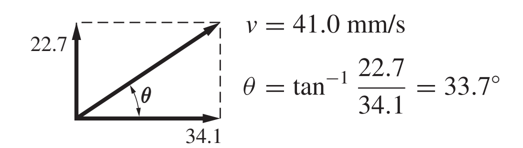
Al efectuar $y = 30$ mm en la ecuación (a) y despejar el tiempo t se obtiene $t = 2.090$ s. Cuando se sustituye este valor de t en las ecuaciones (c) y (d), se deduce que

$$v_x = 34.1 \text{ mm/s} \quad \text{y} \quad v_y = 22.7 \text{ mm/s}$$

En consecuencia, el vector de velocidad en $y = 30$ mm es

$$\mathbf{v} = 34.1\mathbf{i} + 22.7\mathbf{j} \text{ mm/s}$$ *Respuesta*

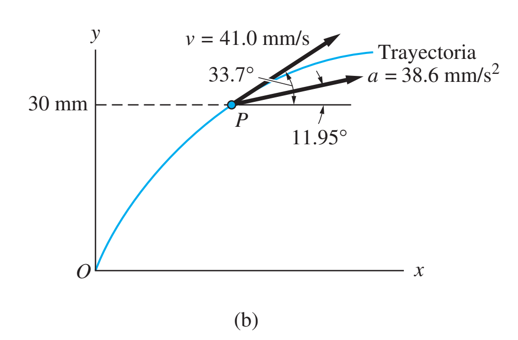
A continuación, en la figura (b) se muestra la representación pictórica de este resultado.



$$v = 41.0 \text{ mm/s}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{22.7}{34.1} = 33.7°$$

Al evaluar la pendiente de la trayectoria, dy/dx, en $y = 30$ mm, es fácil comprobar que el vector de velocidad que se ha determinado antes es tangente a la curva.



(b)

Parte 2

De las ecuaciones (c) y (d), es posible determinar por medio de derivación las componentes del vector aceleración:

$$a_x = \dot{v}_x = 4.80t^2 + 7.20t + 1.80 \text{ mm/s}^2$$
$$a_y = \dot{v}_y = 8 \text{ mm/s}^2$$

Al sustituir $t = 2.090$ s, se obtiene

$$a_x = 37.8 \text{ mm/s}^2 \qquad \text{y} \qquad a_y = 8 \text{ mm/s}^2$$

Por tanto, el vector aceleración en $y = 30$ mm es

$$\mathbf{a} = 37.8\mathbf{i} + 8\mathbf{j} \text{ mm/s}^2$$

Respuesta

La representación pictórica de **a** es

8 — 37.8 — β

$$a = 38.6 \text{ mm/s}^2$$
$$\beta = \tan^{-1} \frac{8}{37.8} = 11.95°$$

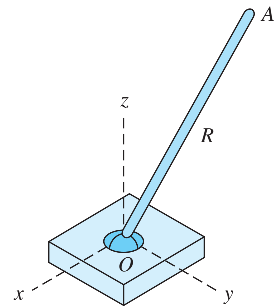
A partir del dibujo del vector aceleración en la figura (b) se observa que la dirección de **a** no es tangente a la trayectoria.

Problema de ejemplo **12.3**

El brazo rígido OA de longitud R rota respecto a la unión esférica en O. Las coordenadas x y y que describen el movimiento espacial del extremo A son

$$x = R \cos \omega t \qquad y = \frac{R}{2} \operatorname{sen} 2\omega t$$

donde ω es una constante. Encuentre la expresión para la coordenada z del extremo A.



Solución

Como el brazo OA es rígido, las coordenadas de posición del extremo A deben satisfacer la ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

Al sustituir las expresiones para x y y se obtiene

$$R^2 \cos^2 \omega t + \frac{R^2}{4} \operatorname{sen}^2 2\omega t + z^2 = R^2$$

Cuando se utilizan las identidades trigonométricas sen $2\omega t = 2\text{sen}\ \omega t\ \cos\omega t$ y $(1-\cos^2\omega t) = \text{sen}^2\omega t$, se obtiene

$$\begin{aligned} z^2 &= R^2(1-\cos^2\omega t - \text{sen}^2\,\omega t\cos^2\omega t) \\ &= R^2(\text{sen}^2\,\omega t - \text{sen}^2\,\omega t\cos^2\omega t) \\ &= R^2\,\text{sen}^2\,\omega t(1-\cos^2\omega t) \\ &= R^2\,\text{sen}^4\,\omega t \end{aligned}$$

Por tanto, la expresión para la coordenada z es

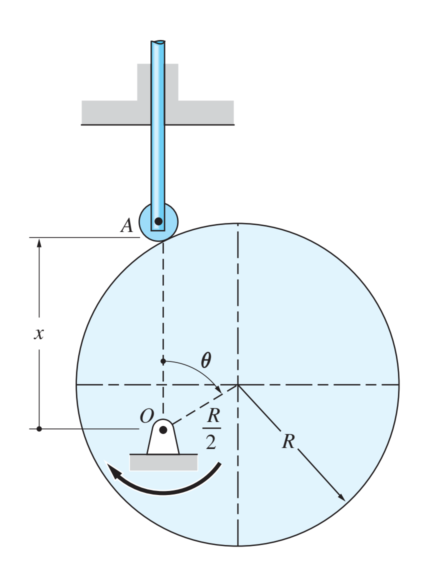
$$z = R\,\text{sen}^2\,\omega t$$ *Respuesta*

Problema de ejemplo **12.4**

Una rueda cuyo radio es $R = 16$ mm está pivoteada en O, con lo que produce una excentricidad de $R/2$. Empleando la geometría, es posible demostrar que la relación entre x, la coordenada de posición de A y el ángulo θ es

$$x(\theta) = \frac{R}{2}\left(\cos\theta + \sqrt{\cos^2\theta + 3}\right)$$

Si la rueda gira, respecto a O, en el sentido de las manecillas del reloj, con la rapidez angular constante $\dot{\theta} = 2000$ rev/min, determine la rapidez de A cuando $\theta = 45^\circ$.



Solución

$$\begin{aligned} v &= \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} \\ &= \frac{R}{2}\left[-\,\text{sen}\,\theta + \frac{1}{2}\left(\frac{-2\cos\theta\,\text{sen}\,\theta}{\sqrt{\cos^2\theta+3}}\right)\right]\dot{\theta} \\ &= -\frac{R}{2}\,\text{sen}\,\theta\left(1+\frac{\cos\theta}{\sqrt{\cos^2\theta+3}}\right)\dot{\theta} \end{aligned}$$

Cuando se sustituye $R = 0.016$ m, $\theta = 45^\circ$ y $\dot{\theta} = 2000(2\pi/60)$ rad/s, se obtiene

$$v = -\frac{0.016}{2}(\text{sen}\,45^\circ)\left(1+\frac{\cos 45^\circ}{\sqrt{\cos^2 45^\circ + 3}}\right)\frac{2000(2\pi)}{60} = -1.633\text{ m/s}$$ *Respuesta*

El signo menos indica que A se mueve hacia abajo.

Problemas

12.1 Al tiempo $t = 0$ se lanza un cohete en sentido vertical; su elevación está dada por

$$y = -0.13t^4 + 4.1t^3 + 0.12t^2 \text{ pies}$$

donde t está en segundos. Determine la velocidad máxima del cohete y la elevación a la que ésta ocurre.

12.2 Cuando un objeto se lanza verticalmente hacia arriba sobre la superficie de un planeta, el movimiento que sigue en ausencia de resistencia atmosférica puede describirse con

$$x = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t$$

donde g y v_0 son constantes. (a) Obtenga las expresiones para la velocidad y la aceleración del objeto. Utilice los resultados para demostrar que v_0 es la rapidez inicial del cuerpo y que g representa la aceleración gravitacional. (b) Determine la altura máxima que alcanza el objeto y el tiempo total de vuelo. (c) Evalúe los resultados del inciso (b) para $v_0 = 60$ mi/h y $g = 32.2$ pies/s^2 (superficie de la Tierra).

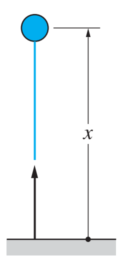


Fig. P12.2



12.3 La posición de una partícula que se mueve sobre el eje x se describe con

$$x = t^3 - 108t \text{ pulg}$$

donde t es el tiempo en segundos. Para el intervalo de tiempo, $t = 0$ a $t = 10$ s, (a) trace la gráfica de la posición, la velocidad y la aceleración como funciones del tiempo; (b) encuentre el desplazamiento de la partícula, y (c) determine la distancia recorrida por la partícula.

12.4 La posición de una partícula que se mueve sobre el eje x está dada por

$$x = t^3 - 3t^2 - 45t \text{ pulg}$$

donde t es el tiempo en segundos. Determine la posición, la velocidad, la aceleración y la distancia recorrida en $t = 8$ s.

12.5 La posición de un automóvil que se mueve en una autopista recta está dada por

$$x = t^2 - \frac{t^3}{90} \text{ pies}$$

donde t es el tiempo en segundos. Determine: (a) la distancia recorrida por el automóvil antes de detenerse y (b) la velocidad máxima que alcanza.

12.6 Un cuerpo se libera a partir del reposo en A y tiene una caída libre. Si se incluyen los efectos de la resistencia del aire, la posición del cuerpo como una función del tiempo transcurrido es

$$x = v_0(t - t_0 + t_0 e^{-t/t_0})$$

donde v_0 y t_0 son constantes. (a) Deduzca la expresión para la rapidez v del cuerpo. Utilice el resultado para explicar por qué v_0 se llama *velocidad terminal*. (b) Deduz-

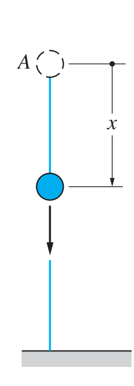


Fig. P12.6

ca las expresiones para la aceleración a del cuerpo como una función de t y como una función de v.

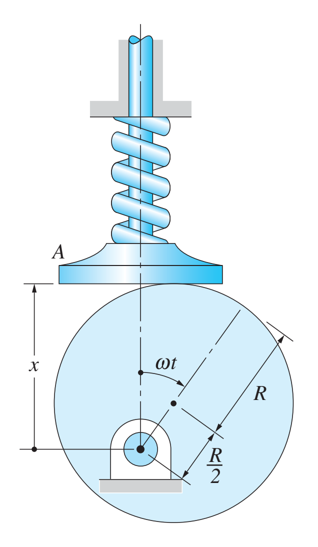


Fig. P12.9

12.7 Una cuenta se mueve sobre un alambre recto de 60 pulg que está sobre el eje x. La posición de la cuenta está dada por

$$x = 2t^2 - 10t \text{ pulg}$$

donde x se mide desde el centro del alambre y t es el tiempo en segundos. Determine: (a) el tiempo en el que la cuenta abandona el alambre y (b) la distancia que ésta recorre desde $t = 0$ hasta que deja el alambre.

12.8 Una partícula se mueve sobre la curva $x^2 = 12y$, donde x y y se miden en milímetros. La coordenada x varía con el tiempo de acuerdo con

$$x = 4t^2 - 2 \text{ mm}$$

donde el tiempo t está en segundos. Obtenga las magnitudes de los vectores de velocidad y aceleración cuando $t = 2$ s.

12.9 La leva circular de radio R y excentricidad $R/2$ rota, en el sentido de las manecillas del reloj, con una rapidez angular constante ω. Es posible demostrar que el movimiento vertical resultante de A es

$$x = R\left(1 + \frac{1}{2}\cos\omega t\right)$$

(a) Obtenga la velocidad y la aceleración de A como una función de t. (b) Si ω se duplica, ¿cómo cambiarían la velocidad máxima y la aceleración máxima de A?

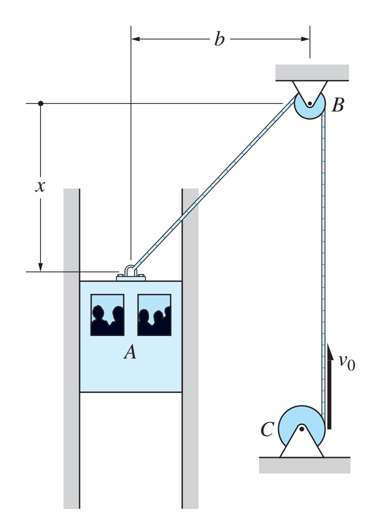


Fig. P12.10

12.10 El elevador A se baja con un cable que se desliza por la polea B. Si el cable se desenrolla del carrete C con velocidad constante v_0, el movimiento del elevador es

$$x = \sqrt{(v_0 t - b)^2 - b^2}$$

Determine la velocidad y aceleración del elevador en términos del tiempo t.

12.11 Un misil se lanza desde la superficie de un planeta con una rapidez v_0 en $t = 0$. De acuerdo con la teoría de la gravitación universal, la rapidez v del misil después del lanzamiento está dada por

$$v^2 = 2gr_0\left(\frac{r_0}{r} - 1\right) + v_0^2$$

donde g es la aceleración gravitacional sobre la superficie del planeta y r_0 es el radio medio del planeta. (a) Determine la aceleración del misil en términos de r. (b) Encuentre la *velocidad de escape*, es decir, el valor mínimo de v_0 para el cual el misil ya no regresará al planeta. (c) Con el resultado del inciso (b), calcule la velocidad de escape para la Tierra, donde $g = 32.2$ pies/s^2 y $r_0 = 3960$ millas.

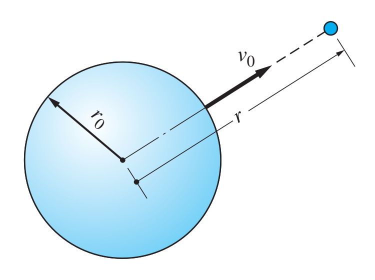


Fig. P12.11

12.12 Las coordenadas de una partícula que efectúa movimiento en un plano son

$$x = 15 - 2t^2 \text{ m}, \qquad y = 15 - 10t + t^2 \text{ m}$$

donde t es el tiempo en segundos. Encuentre los vectores de velocidad y aceleración en (a) $t = 0$ s y (b) $t = 5$ s.

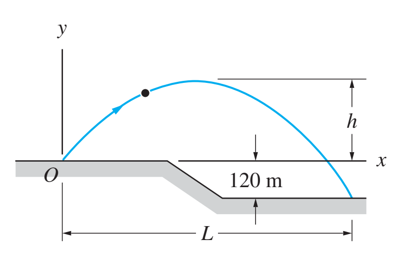


Fig. P12.13

12.13 Un proyectil que se dispara en O sigue una trayectoria parabólica, dada en forma paramétrica por

$$x = 66t \qquad y = 86t - 4.91t^2$$

donde x y y se miden en metros y t en segundos. Determine: (a) el vector de aceleración durante el vuelo; (b) el vector de velocidad en O; (c) la altura máxima h, y (d) el alcance L.

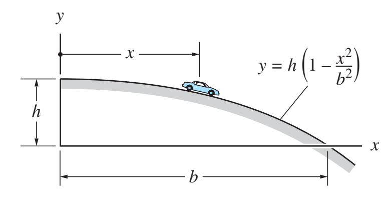


Fig. P12.14

12.14 Un automóvil desciende una montaña que tiene la sección transversal parabólica que se muestra. Si se supone que la componente horizontal del vector velocidad tiene una magnitud constante v_0, determine: (a) la expresión para la rapidez del automóvil en términos de x y (b) la magnitud y dirección de la aceleración.



12.15 La posición de una partícula que se mueve en un plano está dada por

$$x = a \cos \omega t \qquad y = b \operatorname{sen} \omega t$$

donde $a > b$ y ω es una constante. (a) Demuestre que la trayectoria de la partícula es una elipse. (b) Pruebe que el vector de aceleración siempre está dirigido hacia el centro de la elipse.

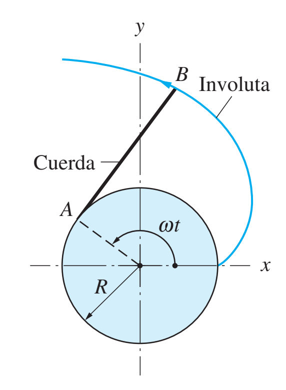


Fig. P12.16

12.16 Cuando una cuerda tensa se desenrolla de un cilindro estacionario, el extremo B de la misma genera una curva conocida como la *involuta* de un círculo. Si la cuerda se desenrolla con una rapidez angular constante ω, la ecuación de la involuta es

$$x = R \cos \omega t + R\omega t \operatorname{sen} \omega t \qquad y = R \operatorname{sen} \omega t - R\omega t \cos \omega t$$

donde R es el radio del cilindro. Obtenga la rapidez de B como una función del tiempo; demuestre que el vector de velocidad siempre es perpendicular a la cuerda.

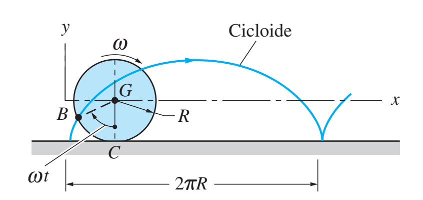


Fig. P12.17

12.17 Cuando una rueda cuyo radio R gira con velocidad angular constante ω, el punto B sobre la circunferencia de la rueda traza una curva llamada *cicloide*, cuya ecuación es

$$x = R(\omega t - \operatorname{sen} \omega t) \qquad y = R(1 - \cos \omega t)$$

(a) Demuestre que el vector de velocidad de B siempre es perpendicular a $\overline{BC}$. (b) Pruebe que el vector de aceleración de B está dirigido a lo largo de $\overline{BG}$.

Fig. P12.18

12.18 Cuando una partícula se mueve sobre la hélice que se muestra, las componentes de su vector de posición son

$$x = R\cos\omega t \qquad y = R\,\mathrm{sen}\,\omega t \qquad z = -\frac{h}{2\pi}\omega t$$

donde ω es constante. Demuestre que la velocidad y la aceleración tienen magnitudes constantes y calcule sus valores si $R = 1.2$ m, $h = 0.75$ m y $\omega = 4\pi$ rad/s.

12.19 La trayectoria OB de una partícula está sobre el paraboloide hiperbólico que se muestra. La descripción del movimiento es

$$x = \frac{4}{5}v_0 t \qquad y = \frac{3}{5}v_0 t \qquad z = -\frac{1}{25}v_0^2 t^2$$

donde las coordenadas se miden en pulgadas y v_0 es una constante. Determine: (a) la velocidad y aceleración cuando la partícula está en B y (b) el ángulo entre la trayectoria y el plano xy en B.

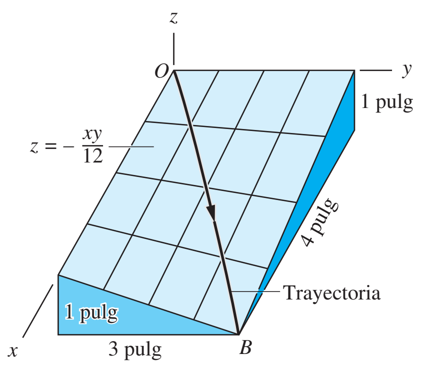


Fig. P12.19

12.20 El movimiento espacial de una partícula se describe por

$$x = 3t^2 + 4t \qquad y = -4t^2 + 3t \qquad z = -6t + 9$$

donde las coordenadas se miden en pies y el tiempo t está en segundos. (a) Determine los vectores de velocidad y aceleración de la partícula como funciones del tiempo. (b) Compruebe que la partícula realiza movimiento en un plano (el movimiento no está en un plano de coordenadas) al demostrar que el vector unitario perpendicular al plano formado por **v** y **a** es constante.

12.21 El movimiento tridimensional de un punto está descrito por

$$x = R\cos\omega t \qquad y = R\,\mathrm{sen}\,\omega t \qquad z = \frac{R}{2}\,\mathrm{sen}\,2\omega t$$

donde R y ω son constantes. Calcule la rapidez máxima y la aceleración máxima del punto.

12.22 Para el mecanismo que se muestra, determine: (a) la velocidad $\dot{x}$ del deslizador C en términos de θ y $\dot{\theta}$, y (b) la aceleración $\ddot{x}$ de C en términos de θ, $\dot{\theta}$ y $\ddot{\theta}$.

Fig. P12.22

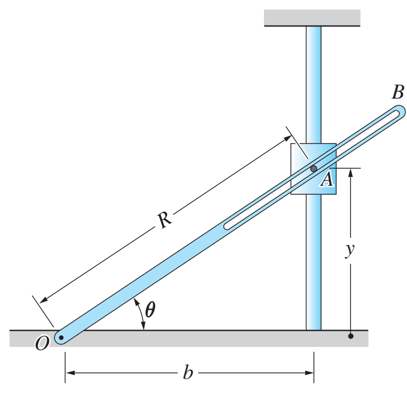


Fig. P12.23

12.23 El perno unido al collar deslizante A engarza la ranura en la barra OB. Determine: (a) la rapidez $\dot{y}$ de A en términos de θ y $\dot{\theta}$, y (b) la aceleración $\ddot{y}$ de A en términos de θ, $\dot{\theta}$ y $\ddot{\theta}$.

12.24 Es posible demostrar que la coordenada de posición del pistón A está relacionada con el ángulo θ de la rueda por

$$x = R\left(\cos\theta + \sqrt{9 - \operatorname{sen}^2\theta}\right)$$

La rueda gira con una rapidez angular constante $\dot{\theta}$. Deduzca la expresión para la velocidad $\dot{x}$ del pistón como una función de θ.

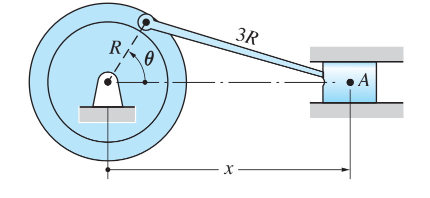


Fig. P12.24

12.25 El perfil de la leva es

$$r = 55 + 10\cos\theta + 5\cos 2\theta \text{ mm}$$

Si la leva gira con una velocidad angular constante de $\dot{\theta} = 1200$ rev/min determine la aceleración máxima de A.

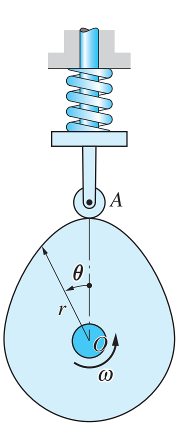


Fig. P12.25

***12.26** El avión C es rastreado por las estaciones de radar A y B. En el instante que se muestra, el triángulo ABC está en el plano vertical y las lecturas del radar son $\theta_A = 30^{\circ}$, $\theta_B = 22^{\circ}$, $\dot{\theta}_A = 0.026$ rad/s y $\dot{\theta}_B = 0.032$ rad/s. Determine: (a) la altura y; (b) la rapidez v, y (c) el ángulo de elevación α del avión en este instante.

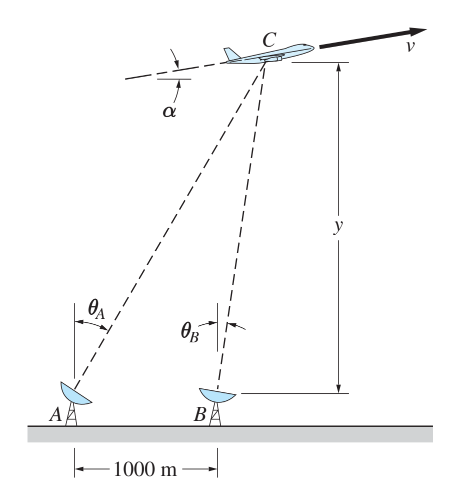


Fig. P12.26

12.3 Cinética: método fuerza-masa-aceleración

a. Ecuaciones de movimiento

Cuando varias fuerzas actúan sobre una partícula de masa m, la segunda ley de Newton tiene la forma $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, donde $\Sigma\mathbf{F}$ es la suma vectorial de las fuerzas (la fuerza resultante) y $\mathbf{a}$ es la aceleración de la partícula. La representación escalar de esta ecuación vectorial en coordenadas rectangulares es

$$\Sigma F_x = ma_x \qquad \Sigma F_y = ma_y \qquad \Sigma F_z = ma_z \tag{12.11}$$

Las ecuaciones (12.11) se conocen como las *ecuaciones de movimiento* de la partícula.

Si se conoce la aceleración de la partícula, es posible utilizar las ecuaciones del movimiento para determinar las fuerzas. Si se dan las fuerzas las ecuaciones del movimiento pueden resolverse para obtener las aceleraciones. Sin embargo, la mayoría de los problemas son de tipo mixto, donde sólo se conocen algunas fuerzas y componentes de las aceleraciones.

Se conoce como *método de fuerza-masa-aceleración* (*FMA*) al proceso de relacionar las fuerzas con la aceleración de la partícula mediante las ecuaciones (12.11). Posteriormente se aprenderán otros procedimientos, como los métodos trabajo-energía e impulso-cantidad de movimiento, que también se pueden utilizar para obtener relaciones entre las fuerzas y el movimiento.

b. *Diagramas de cuerpo libre y de masa-aceleración*

Es común iniciar el método FMA dibujando dos diagramas, cada uno de los cuales representa un lado de la segunda ley de Newton $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. El primero de ellos es el *diagrama de cuerpo libre* (*DCL*) que muestra todas las fuerzas que actúan sobre la partícula. El segundo, que se conoce como *diagrama masa-aceleración* (*DMA*), muestra el *vector de inercia* $m\mathbf{a}$ de la partícula. Ahora, la segunda ley de Newton puede satisfacerse al requerir que los dos diagramas sean estáticamente equivalentes, es decir, que tengan la misma resultante.

En la figura 12.4(a) se muestran el DCL y el DMA de una partícula. El signo de igual entre los diagramas indica equivalencia estática. Si se emplean coordenadas rectangulares, entonces el vector de inercia en general se representa por sus componentes rectangulares, como se muestra en la figura 12.4(b). Una vez que los diagramas se han trazado es hasta cierto punto fácil escribir las condiciones para la equivalencia estática, es decir, las ecuaciones de movimiento.

El diagrama de cuerpo libre es tan importante en dinámica como en estática. Éste identifica, de manera clara y concisa, todas las fuerzas que actúan sobre la partícula, define la notación que se utiliza para las cantidades incógnitas y presenta las cantidades conocidas. El diagrama masa-aceleración sirve para propósitos similares: también define la notación para las incógnitas e indica las magnitudes y direcciones conocidas. Pero quizás el más grande beneficio del DMA es que enfoca nuestra atención en la cinemática requerida para describir el vector de inercia. Después de todo, la cinemática es la que permite decidir cuáles componentes del vector de aceleración se conocen de antemano y cuáles son incógnitas.

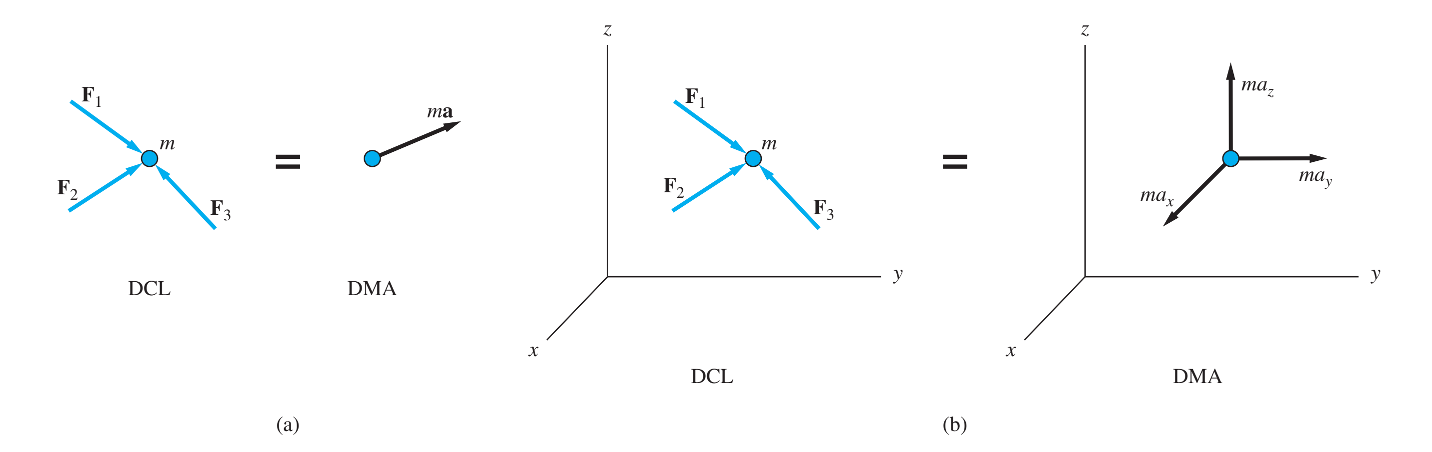


Fig. 12.4

En resumen, el método FMA consta de los siguientes pasos.

Paso 1: Dibujar el diagrama de cuerpo libre (DCL) de la partícula mostrando todas las fuerzas que actúan sobre ella.
Paso 2: Utilizar la cinemática para analizar la aceleración de la partícula.
Paso 3: Elaborar el diagrama masa-aceleración (DMA) para la partícula mostrando el vector de inercia $m\mathbf{a}$, con los resultados del paso 2.
Paso 4: Consultando el DCL y el DMA, relacionar las fuerzas con la aceleración aplicando la equivalencia estática de los dos diagramas.

12.4 *Dinámica del movimiento rectilíneo*

a. *Ecuaciones de movimiento*

La figura 12.5 muestra el DCL y el DMA de una partícula que está en movimiento rectilíneo sobre el eje x. Las correspondientes ecuaciones del movimiento son

$$\Sigma F_x = ma \tag{12.12}$$

$$\Sigma F_y = \Sigma F_z = 0 \tag{12.13}$$

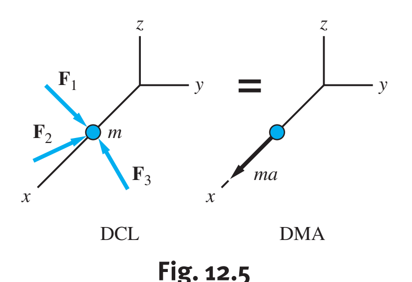


Fig. 12.5

En algunos problemas todas las fuerzas que actúan sobre las partículas están en la dirección del movimiento (la dirección x), en cuyo caso las ecuaciones (12.13) se cumplen de manera automática. Es decir, las ecuaciones (12.13) pueden utilizarse en el cálculo de fuerzas desconocidas, como las reacciones.

b. *Determinación de la velocidad y posición*

Suponga que se escriben las ecuaciones del movimiento para una *posición arbitraria* de la partícula y que se resuelven para la aceleración a. Como la posición de la partícula es arbitraria, en general la aceleración será una función de la posición y la velocidad de la partícula y del tiempo:

$$a = f(v, x, t) \tag{12.14}$$

Una forma equivalente de la ecuación (12.14) es

$$\ddot{x} = f(\dot{x}, x, t)$$

que es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden. La solución de esta ecuación diferencial sería $x(t)$, la posición como una función del tiempo.

Si las tres variables (x, v y t) aparecen de manera explícita en la ecuación (12.14) para a, entonces las posibilidades de lograr una solución analítica son escasas. La razón es que en general f es una función no lineal; es decir, contiene términos no lineales de las variables, como sen x o v^2. En la mayoría de los casos, las ecuaciones diferenciales no lineales sólo se pueden resolver numéricamente. Sin embargo, si f sólo contiene una de las variables, la ecuación diferencial puede integrarse en forma rutinaria, como se ilustra a continuación.

Caso 1: $a = f(t)$. De $a = dv/dt$, se tiene

$$dv = a(t)\,dt \tag{12.15}$$

Ahora es posible integrar ambos lados de la ecuación, con lo que se da la velocidad como una función del tiempo:

$$v(t) = \int a(t)\,dt + C_1 \tag{12.16}$$

Después de la determinación de la velocidad, la coordenada de posición x puede obtenerse de $v = dx/dt$ o $dx = v(t)\,dt$. Al integrar ambos lados se obtiene

$$x(t) = \int v(t)\,dt + C_2 \tag{12.17}$$

Las constantes de integración, C_1 y C_2, pueden evaluarse de las condiciones iniciales (en general son los valores de x y v en $t = 0$).

Caso 2: $a = f(x)$. Aquí se utiliza la ecuación (12.10): $a = v\,dv/dx$. Las variables pueden separarse de modo que x y v aparezcan en lados opuestos de la ecuación:

$$v\,dv = a(x)\,dx \tag{12.18}$$

Ahora puede integrarse la ecuación, con el resultado

$$\frac{1}{2}v^2 = \int a(x)\,dx + C_3$$

donde C_3 es la constante de integración. Por tanto,

$$v(x) = \sqrt{2\left[\int a(x)\,dx + C_3\right]} \tag{12.19}$$

En este momento, en la ecuación (12.19) se podría reemplazar v por dx/dt, separar las variables x y t e integrar otra vez para obtener $x(t)$. Pero la integración sería difícil debido a la presencia de la raíz cuadrada.

Caso 3: $a = f(v)$. Se puede empezar con la ecuación (12.18), la que, después de reemplazar $a(x)$ por $a(v)$, queda

$$v\,dv = a(v)\,dx$$

Al separar las variables x y v, se obtiene

$$dx = \frac{v\,dv}{a(v)} \tag{12.20}$$

Con la integración, se obtiene x como una función de v:

$$x(v) = \int \frac{v\,dv}{a(v)} + C_4 \tag{12.21}$$

Es posible invertir la ecuación (12.21) (despejar la velocidad) si se desea v como una función de x.

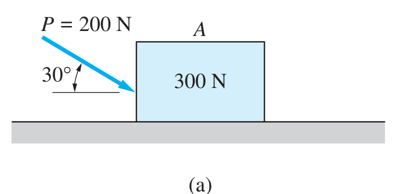
También sería posible empezar con la ecuación (12.15): $dv = a(v)\,dt$. Un reacomodo de términos para separar variables conduce a

$$dt = \frac{dv}{a(v)} \tag{12.22}$$

que se puede integrar, dando a t en términos de v:

$$t(v) = \int \frac{dv}{a(v)} + C_5 \tag{12.23}$$

Ahora se podría invertir el resultado con lo que se obtendría a v como función de t.



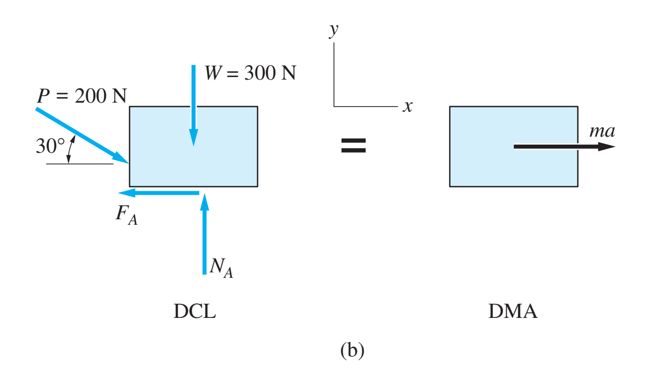
(a)

Problema de ejemplo **12.5**

En la figura (a), el bloque A de 300 N está en reposo sobre el plano horizontal cuando se aplica la fuerza P en $t = 0$. Encuentre la velocidad y la posición del bloque cuando $t = 5$ s. Los coeficientes de fricción estática y cinética son 0.2.

Solución

En la figura (b) se muestra el DCL del bloque, donde N_A y F_A son las fuerzas normal y de fricción ejercidas sobre el bloque por el plano. La figura (b) también muestra el DMA. Como el movimiento es rectilíneo, $a_y = 0$.



(b)

Respecto al DCL y al DMA, se obtiene

$$\Sigma F_y = 0 \quad +\uparrow \qquad N_A - W - P \operatorname{sen} 30^\circ = 0 \qquad \text{(a)}$$

$$\Sigma F_x = ma \quad \xrightarrow{+} \qquad P \cos 30^\circ - F_A = ma \qquad \text{(b)}$$

La ecuación (a) implica

$$N_A = W + P \operatorname{sen} 30^\circ = 300 + 200 \operatorname{sen} 30^\circ = 400 \text{ N}$$

Por tanto, la fuerza de fricción es

$$F_A = \mu_k N_A = 0.2\,(400) = 80 \text{ N}$$

De la ecuación (b), se deduce

$$a = \frac{1}{m}(P \cos 30^\circ - F_A) = \frac{9.81}{300}(200 \cos 30^\circ - 80) = 3.048 \text{ m/s}^2$$

Ahora la velocidad v y la coordenada de posición x del bloque se pueden encontrar integrando como sigue:

$$v = \int a\,dt = \int 3.048\,dt = 3.048t + C_1 \qquad \text{(c)}$$

$$x = \int v\,dt = \int (3.048t + C_1)dt = 1.524t^2 + C_1 t + C_2 \qquad \text{(d)}$$

donde C_1 y C_2 son constantes de integración para determinar a partir de las condiciones iniciales. La velocidad inicial dada es cero. Sin embargo, existe libertad para elegir el origen del eje x. La elección más conveniente es $x = 0$ cuando $t = 0$. Por tanto, las condiciones iniciales son

$$v = 0 \text{ y } x = 0 \text{ cuando } t = 0$$

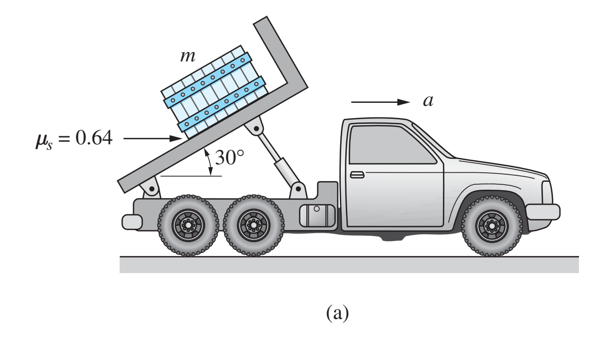
Al sustituir estos valores en las ecuaciones (c) y (d) se obtiene que $C_1 = 0$ y $C_2 = 0$. Así, la velocidad y la coordenada de posición del bloque en $t = 5$ s son

$$v = 3.048(5) = 15.24 \text{ m/s} \qquad \textit{Respuesta}$$

$$x = 1.524(5)^2 = 38.1 \text{ m} \qquad \textit{Respuesta}$$

Problema de ejemplo **12.6**

La figura (a) muestra un cajón de masa m que descansa sobre la plataforma de una camioneta. El coeficiente de fricción estática entre el cajón y la plataforma es 0.64. Con el objetivo de hacer deslizar el cajón cuando la plataforma se encuentre en la posición que se muestra, la camioneta debe acelerar hacia la derecha. Determine la aceleración a más pequeña para la cual el cajón empezará a deslizarse. Exprese la respuesta en términos de la aceleración gravitacional g.

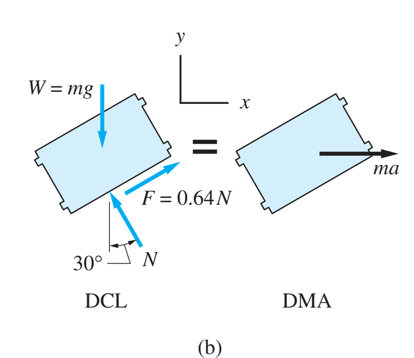


(a)

Solución

En la figura (b) se muestra el diagrama de cuerpo libre (DCL) del cajón. Además del peso $W = mg$, sobre el cajón actúan la fuerza de contacto normal N y la de fricción $F = 0.64N$ (el cajón está en una situación que impide su deslizamiento, entonces F es igual a su valor estático máximo $\mu_S N$). En la figura (b) también se observa el diagrama masa-aceleración (DMA) del cajón. Como éste y la camioneta tienen la misma aceleración antes de que ocurra el deslizamiento, entonces el vector de inercia del cajón es ma, dirigido en sentido horizontal.

Con referencia a la figura (b), las ecuaciones del movimiento del cajón son



(b)

$$\Sigma F_x = ma \quad \xrightarrow{+} \qquad -N \text{ sen } 30° + 0.64N \cos 30° = ma \qquad \text{(a)}$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad +\!\uparrow \qquad N \cos 30° + 0.64N \text{ sen } 30° - mg = 0 \qquad \text{(b)}$$

De la ecuación (b), se obtiene

$$N = \frac{mg}{\cos 30^\circ + 0.64 \operatorname{sen} 30^\circ} = 0.8432mg \qquad \text{(c)}$$

Sustituyendo la ecuación (c) en la ecuación (a) se obtiene

$$0.8432mg(-\operatorname{sen} 30^\circ + 0.64 \cos 30^\circ) = ma$$

de donde

$$a = 0.0458g \qquad \textit{Respuesta}$$

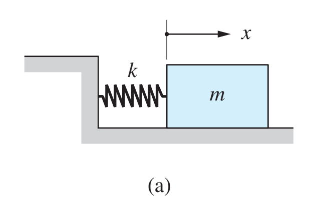
Observe que el resultado es independiente de m (la masa del cajón).

Nota

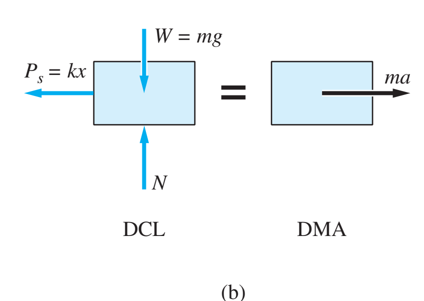
Esta aceleración está dentro de la capacidad de casi cualquier camioneta. Por ejemplo, si puede acelerar de 0 a 60 millas/h en 20 s, la aceleración promedio es 44 pies/s^2 o 0.1367g.

Problema de ejemplo 12.7

En la figura (a) el bloque de masa m se desliza sobre un plano horizontal con fricción despreciable. La coordenada de posición x se mide desde la posición no deformada del resorte ideal con k como constante de rigidez. Si el bloque se lanza en $x = 0$ con velocidad v_0 hacia la derecha, determine: 1. la aceleración del bloque como una función de x; 2. la velocidad del bloque como una función de x, y 3. el valor de x cuando el bloque regresa al reposo por primera vez.



(a)



(b)

Solución

Parte 1

En la figura (b) se muestra el DCL del bloque para un valor arbitrario de x, donde N es la fuerza normal ejercida por el plano sin fricción y $P_S = kx$ es la fuerza causada por el resorte. La figura (b) también muestra el DMA. Como el movimiento sólo ocurre en la dirección x, se tiene $a_y = 0$ y la magnitud del vector de inercia es $ma_x = ma$. Refiriéndose al DCL y al DMA, la ecuación del movimiento es

$$\Sigma F_x = ma \quad \xrightarrow{+} \quad -kx = ma$$

de donde

$$a = -\frac{k}{m}x \qquad \textit{Respuesta} \quad \text{(a)}$$

Parte 2

Es posible determinar la velocidad como una función de la posición si x se toma como la variable independiente. Al emplear $a = v\,dv/dx$ de la ecuación (12.10), entonces la ecuación (a) queda

$$v\frac{dv}{dx} = -\frac{k}{m}x$$

Al separar las variables x y v por medio de un reacomodo de términos se observa que

$$v\,dv = -\frac{k}{m}x\,dx \tag{b}$$

La integración de la ecuación (b) implica

$$\frac{v^2}{2} = -\frac{kx^2}{2m} + C \tag{c}$$

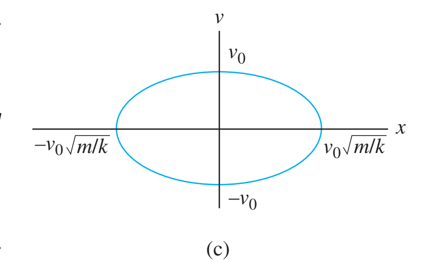
La constante de integración C se puede evaluar a partir de la condición inicial: $v = v_0$ cuando $x = 0$, de donde $C = v_0^2/2$. Por tanto, la velocidad se puede expresar como

$$v = \pm\sqrt{(-k/m)x^2 + v_0^2} \qquad \textit{Respuesta} \quad \text{(d)}$$

Parte 3

La posición del bloque cuando por primera vez llega al reposo se encuentra al sustituir $v = 0$ en la ecuación (d) y el resultado es

$$x = v_0\sqrt{m/k} \qquad \textit{Respuesta}$$



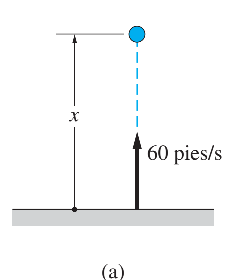
(c)

Nota

Con $C = v_0^2/2$, la ecuación (c) se puede escribir como $v^2 + (k/m)x^2 = v_0^2$. Si se grafica v en función de x, que se llama gráfica en el *plano fase*, el resultado es la elipse que se muestra en la figura (c). Como la gráfica es una curva cerrada, el movimiento del bloque es *oscilatorio* (se repite), como era de esperarse.

Problema de ejemplo **12.8**

La pelota que se muestra en la figura (a) pesa 4.8 oz y se lanza hacia arriba con una velocidad inicial de 60 pies/s. Calcule la altura máxima que alcanza la pelota si: 1. la resistencia del aire es despreciable, y 2. el aire origina una fuerza resistiva F_D, conocida como *arrastre aerodinámico*, que se opone a la velocidad. Suponga que $F_D = cv^2$, donde $c = 4 \times 10^{-5}$ lb · s²/pie².



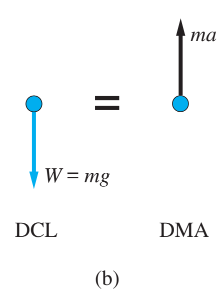
(a)

Solución

Parte 1

Cuando se desprecia la resistencia del aire, la única fuerza que actúa sobre la pelota durante el vuelo es su peso W, que se muestra en el DCL de la figura (b). Como el movimiento es rectilíneo, la magnitud del vector de inercia es $ma_x = ma$, como se muestra en el DMA de la figura (b). Aplicando la segunda ley de Newton, se tiene

$$\Sigma F_x = ma \quad +\!\uparrow \quad -mg = ma$$



(b)

de la cual se deduce que la aceleración es

$$a = -g = -32.2 \text{ pies/s}^2 \tag{a}$$

La aceleración se puede integrar respecto al tiempo para obtener la posición y la velocidad como sigue:

$$v = \int a\,dt = \int (-32.2)\,dt = -32.2t + C_1 \text{ pies/s} \tag{b}$$

$$x = \int v\,dt = \int (-32.2t + C_1)\,dt = -16.1t^2 + C_1 t + C_2 \text{ pies} \tag{c}$$

Las constantes de integración, C_1 y C_2, se evalúan al aplicar las condiciones iniciales $x = 0$ y $v = 60$ pies/s cuando $t = 0$, siendo los resultados $C_1 = 60$ pies/s y $C_2 = 0$. Por tanto, la velocidad y la posición están dadas por

$$v = -32.2t + 60 \text{ pies/s}$$

$$x = -16.1t^2 + 60t \text{ pies}$$

La pelota alcanza su altura máxima cuando $v = 0$. Al establecer que $v = 0$ en la ecuación (d), se obtiene:

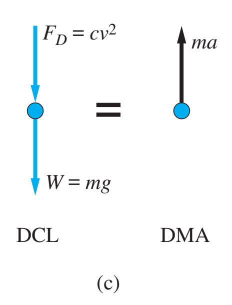
$$0 = -32.2t + 60 \quad \text{o} \quad t = 1.863 \text{ s}$$

Sustituyendo este valor del tiempo en la ecuación (e), resulta

$$x_{max} = -16.1(1.863)^2 + 60(1.863) = 55.9 \text{ pies} \qquad \textit{Respuesta}$$

Observe que en este caso la aceleración, y en consecuencia la velocidad y la posición, son independientes del peso de la pelota.

Parte 2



(c)

Cuando se considera el arrastre aerodinámico, el DCL y DMA de la pelota durante el vuelo hacia arriba son como se muestra en la figura (c). Observe que la fuerza de arrastre F_D, que siempre es opuesta a la velocidad, actúa hacia abajo porque la dirección positiva para v es hacia arriba (que también es la dirección positiva para x). De la segunda ley de Newton, se obtiene la siguiente ecuación del movimiento:

$$\Sigma F_x = ma_x \quad +\uparrow \quad -mg - cv^2 = ma \tag{f}$$

La solución completa (x y v como funciones de t) de la ecuación (f) se calcula mejor numéricamente. Sin embargo, es posible encontrar la velocidad como una función de la posición con integración directa si la variable independiente se cambia de t a x. Al sustituir $a = v\,dv/dx$ de la ecuación (12.10), la ecuación (f) se convierte en

$$-mg - cv^2 = m\frac{dv}{dx}v$$

en la cual se pueden separar las variables x y v como sigue:

$$dx = -\frac{mv\,dv}{mg + cv^2} \tag{g}$$

Cuando se integran ambos lados de esta ecuación (con el uso de una tabla de integrales si es necesario) se obtiene

$$x = -\frac{m}{2c}\ln(mg + cv^2) + C_3 \tag{h}$$

donde C_3 es una constante de integración. Al sustituir los valores numéricos $mg = W = 4.8/16 = 0.3$ lb, $m = 0.3/32.2 = 932 \cdot 10^{-5}$ slugs y $c = 4 \times 10^{-5}$ lb · s²/pie², la ecuación (h) se convierte en

$$x = -116.5 \ln[0.3 + (4 \times 10^{-5})v^2] + C_3 \text{ pies} \tag{i}$$

Cuando se aplica la condición inicial, $v = 60$ pies/s cuando $x = 0$, se encuentra que $C_3 = -94.6$ pies. Por tanto, la solución para x es

$$x = -116.5 \ln[0.3 + (4 \times 10^{-5})v^2] - 94.6 \text{ pies} \tag{j}$$

Como la altura máxima de la pelota se alcanza cuando $v = 0$, se tiene

$$x_{max} = -116.5 \ln 0.3 - 94.6 = 45.7 \text{ pies} \qquad \textit{Respuesta} \tag{k}$$

Por supuesto, este valor es más pequeño que la altura máxima obtenida en la parte 1, donde se despreció la resistencia del aire.

Para resumir, se utilizó el método FMA con el objetivo de determinar las ecuaciones del movimiento para ambas partes de este problema de ejemplo. Cuando en la parte 1 se despreció la resistencia del aire, la aceleración fue simplemente $-g$, independiente del peso de la pelota. Con integración directa fue posible obtener la velocidad y la posición en términos de t. En la parte 2, la inclusión del arrastre aerodinámico introdujo el término adicional $-cv^2$ en las ecuaciones del movimiento con el resultado de que la aceleración dependió de c, v y W. Para este caso, no se determinó la solución para $x(t)$ y $v(t)$ (hubiera sido muy tedioso hacerlo). Sin embargo, fue fácil obtener $x(v)$, lo que permitió calcular la altura máxima de la pelota.

Problema de ejemplo 12.9

Utilice la integración numérica para determinar el tiempo de vuelo y la velocidad de impacto de la pelota descrita en el problema de ejemplo 12.8, parte 2.

Solución

En la solución del problema de ejemplo 12.8, parte 2, la aceleración de la pelota durante su vuelo hacia arriba fue $a = -g - (c/m)v^2$. Como la resistencia del aire siempre se opone a la velocidad, la aceleración durante el movimiento de descenso es $a = -g + (c/m)v^2$. Ambas expresiones se pueden combinar en

$$a = -g - \frac{c}{m}\text{sgn}(v)\, v^2$$

donde sgn(v) denota "el signo de v". Al introducir la notación $x = x_1$, $v = x_2$, las ecuaciones diferenciales de primer orden equivalentes son

$$\dot{x}_1 = x_2 \qquad \dot{x}_2 = -g - \frac{c}{m}\text{sgn}(x_2)\, x_2^2$$

con las condiciones iniciales $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 60$ pies/s. Los parámetros son $g = 32.2$ pies/s² y

$$\frac{c}{m} = \frac{4 \times 10^{-5}}{(4.8/16)/32.2} = 4.2933 \times 10^{-3} \text{ pies}^{-1}$$

De acuerdo con la solución del problema de ejemplo 12.8, el tiempo de vuelo sin resistencia del aire es 2(1.863) = 3.726 s. Como la resistencia del aire reducirá este tiempo, se toma de $t = 0$ a 3.6 s como el periodo de integración. El programa MATLAB lista aquí la solución numérica en intervalos de 0.05 s.

```
function example12_9
[t,x] =ode45(@f, [0:0.05:3.6], [0 60]);
printSol(t,x)
  function dxdt = f(t,x)
  dxdt = [x(2)
          -32.2-4.2933e-3*sign(x(2))*x(2)^2];
  end
end
```

Los argumentos de la función `ode45` se explican en el apéndice E, que también lista la función `printSol` utilizada para imprimir los resultados. Los últimos seis renglones del impreso son

```
   t               x1              x2
3.3500e+000     9.3577e-001    -4.8904e+001
3.4000e+000    -1.5366e+000    -4.9989e+001
3.4500e+000    -4.0627e+000    -5.1051e+001
3.5000e+000    -6.6413e+000    -5.2090e+001
3.5500e+000    -9.2713e+000    -5.3106e+001
3.6000e+000    -1.1952e+001    -5.4099e+001
```

En el impacto con el suelo se tiene $x_1 = 0$. De los valores impresos se observa que esto ocurre en algún momento entre 3.35 s y 3.4 s. Con interpolación lineal se obtiene un valor más exacto, véase la ecuación (E.7) del apéndice E:

$$\frac{-1.5366 - 0.93577}{3.4 - 3.35} = \frac{0 - 0.93577}{t - 3.35}$$

lo que produce

$$t = 3.3689\ \text{s}$$ *Respuesta*

La velocidad de impacto es el valor de x_2 en $t = 3.3689$ s. Que también se puede determinar al emplear la interpolación lineal:

$$\frac{-49.989 - (-48.904)}{3.4 - 3.35} = \frac{v - (-48.904)}{3.3689 - 3.35}$$

lo que da

$$v = -49.3\ \text{pies/s}$$ *Respuesta*

Problemas

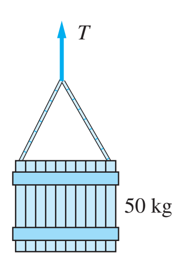


Fig. P12.27

12.27 Calcule la fuerza T que elevará el cajón de 50 kg con una rapidez $v = 4t$ m/s, donde t es el tiempo en segundos.

12.28 Un automóvil viaja a 100 km/h sobre una recta, al nivel del camino, cuando sus frenos quedan inmovilizados. Determine la distancia que el automóvil recorre para detenerse, si sabe que el coeficiente de fricción cinética entre las llantas y el camino es 0.65.

12.29 Resuelva el problema 12.28 si el mismo automóvil viaja hacia abajo con una inclinación de 5°.

12.30 Un bloque de 0.1 kg se mueve sobre el eje x. La resultante de todas las fuerzas que actúan sobre dicho bloque es $\mathbf{F} = -1.2t\mathbf{i}$ N, donde t está en segundos. Cuando $t = 0$, $x = 0$ y $\mathbf{v} = 64\mathbf{i}$ m/s. Determine la distancia recorrida por la partícula durante el intervalo de tiempo de $t = 0$ a $t = 4$ s.

12.31 Una cuenta de 10 g se desliza en un alambre sobre el eje x. La resultante de todas las fuerzas que actúan sobre la cuenta es $\mathbf{F} = 0.04\sqrt{v}\,\mathbf{i}$ N, donde la rapidez v está en m/s. Cuando $t = 0$, $x = 0$ y cuando $t = 0.6$ s, $\mathbf{v} = 0.16\mathbf{i}$ m/s. Encuentre x cuando $t = 0.8$ s.

12.32 Una pequeña pelota de masa m experimenta un movimiento rectilíneo sobre el eje (x). La resultante de todas las fuerzas que actúan sobre la pelota es $\mathbf{F} = -kmv^2\mathbf{i}$, donde k es una constante y v es la rapidez de la pelota. Cuando $t = 0$, $x = 0$ y $\mathbf{v} = v_0\mathbf{i}$. Encuentre la rapidez de la pelota como una función de (a) x y (b) t.

12.33 Un bloque de 4 kg se mueve sobre el eje y. La resultante de todas las fuerzas que actúan sobre el bloque es $\mathbf{F} = (4t - 4)\mathbf{j}$ N, donde t está en segundos. Cuando $t = 0$, $y = 0$, $\mathbf{v} = -8\mathbf{j}$ m/s. Obtenga la distancia recorrida por el bloque durante el intervalo de tiempo de $t = 0$ a $t = 8$ s.

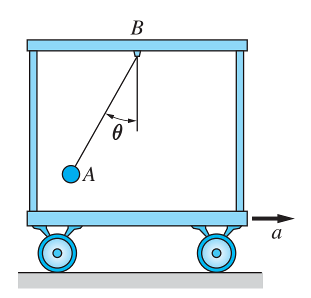


Fig. P12.34

12.34 El péndulo AB está suspendido en el techo de una carreta que tiene una aceleración constante a hacia la derecha. Determine el ángulo constante θ del péndulo.

12.35 Un cilindro uniforme está colocado en una muesca en V. ¿Cuál es la aceleración horizontal máxima que puede tener la muesca sin hacer que el cilindro se salga de su posición? Desprecie la fricción.

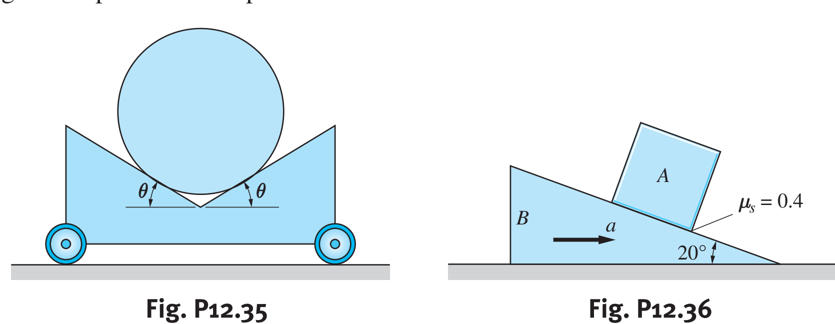


Fig. P12.35   Fig. P12.36

12.36 Un bloque A de masa m se encuentra sobre la superficie inclinada de la cuña B. El coeficiente de fricción estática entre A y B es 0.4. Determine la acelera-


ción a más pequeña de la cuña que hará deslizar hacia arriba de la superficie inclinada al bloque A.

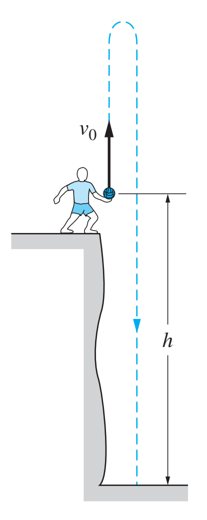


Fig. P12.37

12.37 La pelota se lanza verticalmente hacia arriba sobre el borde del acantilado con velocidad inicial v_0. Determine la expresión para la velocidad con la que la pelota golpea el fondo del acantilado, que es la distancia h abajo del punto de lanzamiento.

12.38 La carreta que lleva el pequeño paquete A de 2 lb se mueve hacia arriba sobre la pendiente con aceleración constante a. Si el paquete está en reposo respecto a la carreta en la posición $\theta = 45^\circ$ obtenga el valor de a. Desprecie la fricción.

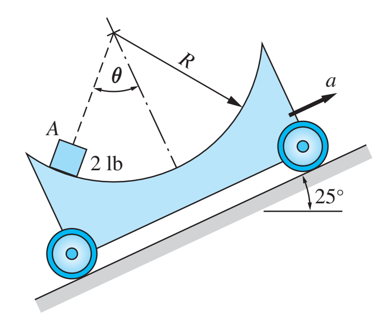


Fig. P12.38

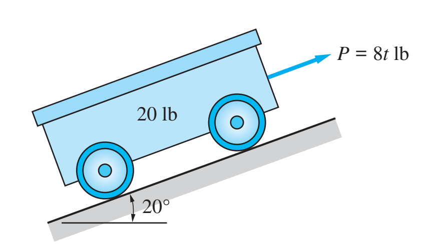


Fig. P12.39

12.39 La carreta de 20 lb se libera a partir del reposo al tiempo $t = 0$ sobre la superficie inclinada. La fuerza $P = 8t$ lb actúa sobre la carreta, donde t es el tiempo medido en segundos. (a) Calcule la distancia que se moverá la carreta hacia abajo de la superficie inclinada antes de invertir su dirección. (b) Encuentre la velocidad de la carreta cuando retorna al punto inicial donde fue liberada.

12.40 La fuerza horizontal $P = 8 - 2t$ lb (t es el tiempo medido en segundos) se aplica al collar de 5 lb que se desliza sobre la varilla inclinada. Al tiempo $t = 0$, la coordenada de posición del collar es $x = 0$ y su velocidad es $v_0 = 10$ pies/s dirigida hacia abajo sobre la varilla. Obtenga el tiempo y la rapidez del collar cuando regresa por primera vez a la posición $x = 0$. Desprecie la fricción.

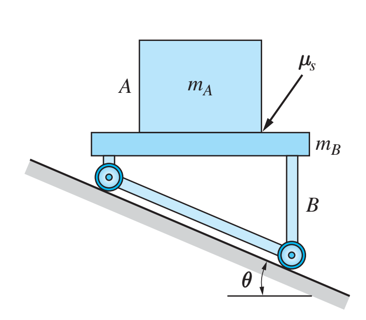


Fig. P12.41

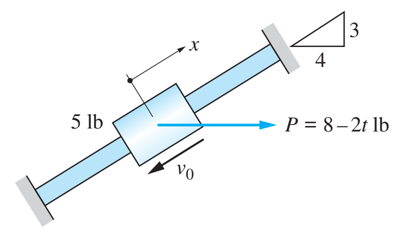


Fig. P12.40

12.41 El coeficiente de fricción estática entre el bloque A y la carreta B es μ_S. Si el montaje se suelta a partir del reposo sobre el plano inclinado, determine el valor más pequeño de μ_S que evitará el deslizamiento del bloque.

12.42 El cajón de 40 kg se coloca sobre el peldaño de una escaladora. Si el coeficiente estático de fricción entre el cajón y el peldaño es 0.4, obtenga la aceleración a

más grande de la banda escaladora para la cual el cajón no resbala. Suponga que la dirección de la aceleración es (a) hacia arriba y (b) hacia abajo.

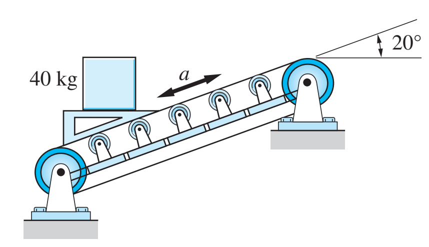


Fig. P12.42

12.43 Un cohete de 2000 kg se lanza verticalmente desde la superficie terrestre. El motor se apaga después de proporcionar, durante los primeros 20 segundos, una fuerza propulsora constante de 60 kN. Desprecie la reducción en la masa del cohete debida a la quema del combustible y la variación de la aceleración gravitacional con la altitud. Calcule la altura del cohete al final de la parte propulsada del vuelo.

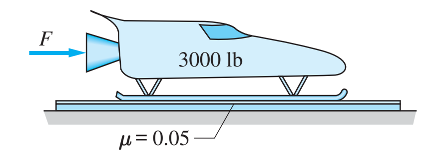


Fig. P12.44

12.44 Un cohete tipo trineo de 3000 lb es propulsado en una trayectoria de prueba rectilínea. El motor del cohete se enciende durante cuatro segundos, produciendo una fuerza propulsora de $F = 1000e^{-0.2t}$ lb y después se apaga el motor. Suponiendo que el trineo arranca del reposo al tiempo $t = 0$ y que el coeficiente de fricción cinética es 0.05, determine la rapidez máxima que alcanza el trineo.

12.45 La fuerza vertical constante P se aplica en el extremo de la cuerda que pasa por una clavija insertada al bloque de 0.2 kg. Despreciando la fricción, obtenga el valor de P para producir al bloque una aceleración de 1.5 m/s^2 (a) hacia arriba sobre el plano inclinado y (b) hacia abajo del plano.

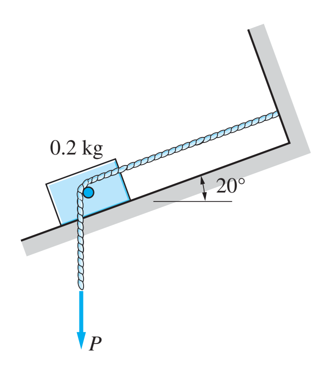


Fig. P12.45

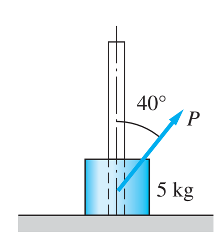


Fig. P12.46

12.46 Los coeficientes de fricción estática y cinética entre el collar deslizante de 5 kg y la varilla guía vertical son $\mu_s = 0.5$ y $\mu_k = 0.40$, respectivamente. Si la fuerza P se incrementa gradualmente hasta que el collar empieza a moverse, encuentre la aceleración inicial del collar.

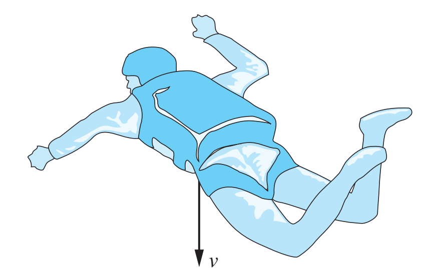


Fig. P12.47

12.47 La fuerza de arrastre que actúa sobre un paracaidista de 135 lb, en la posición "extendida" que se muestra, se puede aproximar con $F_D = 0.00436v^2$, donde F_D está en libras y v en pies/s (de *Scientific and Engineering Problem-Solving with the Computer*, W. R. Bennett, Jr., Prentice Hall, Nueva York, 1976). Suponiendo que el paracaidista sigue una trayectoria vertical, determine la velocidad terminal.

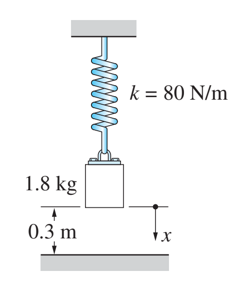


Fig. P12.48, P12.49

12.48 Cuando el bloque de 1.8 kg está en la posición que se muestra, el resorte unido no está deformado. Si el bloque se suelta a partir del reposo en esta posición obtenga su velocidad al golpear el piso.

12.49 El resorte unido al bloque de 1.8 kg no está deformado cuando el sistema está en la posición que se muestra. El bloque se jala hacia abajo hasta que toca el

piso y entonces se suelta a partir del reposo. Calcule la altura máxima (medida desde el piso) que alcanza el bloque.

12.50 Un resorte lineal de rigidez k está diseñado para detener un vagón de 20 Mg que viaja a 8 km/h dejando que éste sólo avance 400 mm después del impacto. Encuentre el valor de k más pequeño que producirá el resultado deseado.

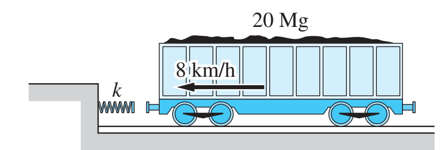


Fig. P12.50

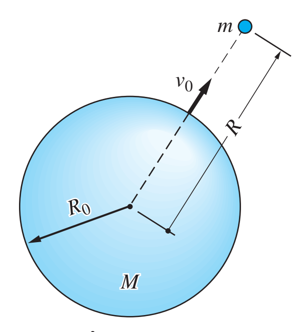


Fig. P12.51

12.51 De acuerdo con la ley de la gravitación, la fuerza que actúa sobre una partícula de masa m que se localiza a una distancia R del centro del planeta de masa M es $F = mg(R_0/R)^2$, donde R_0 es el radio del planeta y g es la aceleración gravitacional en su superficie. Si la masa m se lanza verticalmente desde la superficie de la Tierra ($R_0 = 3960$ mi y $g = 32.2$ pies/s^2) con la velocidad inicial $v_0 = 5000$ pies/s, ¿qué tan alto llegará sobre la superficie terrestre si se desprecia la resistencia del aire?

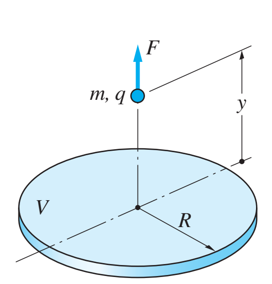


Fig. P12.52

12.52 El disco de radio R metros lleva una carga con un potencial electrostático de V volts. Una partícula de carga q coulombs está sobre el eje del disco a una distancia de y metros de este último. Se puede demostrar que la fuerza repulsiva F (en newtons) que actúa sobre la partícula es

$$F = \frac{Vq}{R}\left(1 - \frac{y}{\sqrt{R^2 + y^2}}\right)$$

Si una partícula arranca desde el centro del disco con velocidad cero, determine su rapidez en $y = R$. Desprecie el efecto de la gravedad.

***12.53** Un aeroplano ligero de 2500 lb de peso aterriza con una rapidez de 90 mi/h y empieza a detenerse debido al arrastre aerodinámico y al efecto inverso de la hélice. Determine la distancia de frenado si el efecto de la hélice es $T = 450$ lb (constante) y la fuerza de arrastre es $F_D = c_D v^2$, donde $c_D = 0.006$ lb · s^2/pie^2 y v es la velocidad en pies/s.

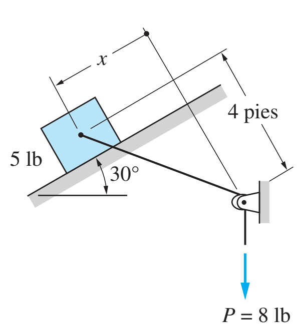


Fig. P12.54

***12.54** El bloque de 5 lb resbala sobre el plano inclinado bajo la acción de la fuerza constante $P = 8$ lb. Si se libera a partir del reposo en $x = 0$, determine su velocidad máxima y el valor de x donde ésta ocurre. Desprecie la fricción.

***12.55** Un objeto de masa m se suelta a partir del reposo para que realice una caída vertical. La fuerza de arrastre aerodinámico sobre el objeto es $F_D = c_D v$, donde v es la velocidad y c_D es una constante. Deduzca la expresión para el tiempo requerido a fin de que el objeto alcance 90% de su velocidad terminal después de que se suelta.

12.56 Un tren que viaja a 20 m/s se detiene debido a una emergencia. Durante el frenado, la aceleración es $a = -(7/4) + (v/16)$ m/s^2, donde v es la velocidad en m/s. Utilice la integración numérica para obtener la distancia de frenado del tren y compare el resultado con la solución analítica $x = 241$ m.

12.57 Un modelo de barco se remolca en un tanque de prueba con una rapidez de 20 pulg/s cuando se elimina la cuerda de remolque al tiempo $t = 0$. Debido a la resistencia hidrodinámica, la aceleración resultante del barco es $a = -(v^2/10)$ pulg/s^2, donde v es la rapidez en pulg/s. Aplique la integración numérica para determinar el tiempo en que la rapidez del barco se reduce a 10 pulg/s. Compare la respuesta con la solución analítica $t = 0.5$ s.

12.58 La aceleración del paracaidista descrito en el problema 12.47 es $a = 32.2(1 - 32.3 \times 10^{-6}v^2)$ pies/s^2, donde v es la rapidez en pies/s. Utilice la integración numérica para encontrar el tiempo requerido para que el paracaidista logre 100 mi/h después del salto. Compare la respuesta con la solución analítica $t = 6.55$ s.

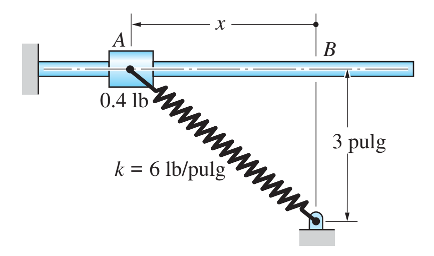


Fig. P12.59

12.59 La longitud libre del resorte unido al deslizador A de 0.4 lb es de 5 pulg. Cuando el deslizador se libera a partir del reposo en $x = 8$ pulg, la aceleración resultante es

$$a = -5796\left(1 - \frac{5}{\sqrt{x^2 + 9}}\right) x \text{ pulg/s}^2$$

donde x se mide en pulgadas. Utilice la integración numérica para calcular la rapidez del deslizador cuando alcanza el punto B. Compare su respuesta con $v = 223$ pulg/s, el valor obtenido analíticamente.

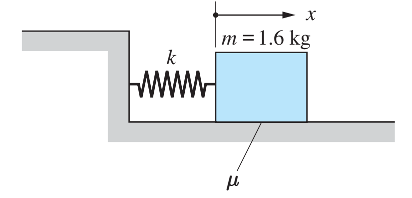


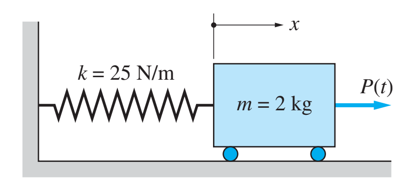
Fig. P12.61

12.60 Un objeto de 250 lb se suelta a partir del reposo a 30 000 pies sobre la superficie terrestre. Durante la caída, la aceleración del objeto es

$$a = -32.2\left(1 - 6.24 \times 10^{-4} v^2 e^{-3.211 \times 10^{-5} x}\right) \text{ pies/s}^2$$

donde v es la rapidez en pies/s y x es la elevación en pies. (El término exponencial considera la variación de la densidad del aire con la elevación.) (a) Utilice la integración numérica para obtener la rapidez máxima del objeto y la elevación donde ocurre. (b) Trace la gráfica de la rapidez en función de la elevación desde el tiempo en que se suelta hasta que se alcanza la rapidez máxima.

12.61 El coeficiente de fricción estática y dinámica entre el bloque de 1.6 kg y la superficie horizontal es $\mu = 0.2$. El resorte unido al bloque tiene una rigidez de 30 N/m y no está deformado cuando $x = 0$. Al tiempo $t = 0$, el bloque está en $x = 0$ y se mueve hacia la derecha con velocidad $v = 6$ m/s. (a) Deduzca una expresión para la aceleración del bloque que sea válida para los valores positivos y negativos de v. (b) Aplique la integración numérica para determinar cuándo queda el bloque en reposo durante el periodo de $t = 0$ a 1.2 s. (c) Grafique la velocidad en función de la posición para el intervalo de tiempo que se especifica en el inciso (b).



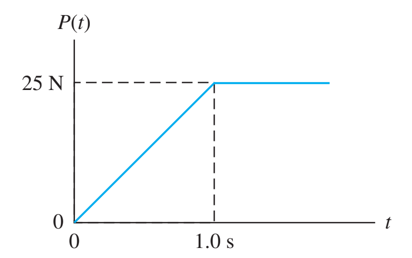


Fig. P12.62

12.62 El bloque de 2 kg está en reposo con el resorte sin estirar cuando la fuerza $P(t)$ se aplica al tiempo $t = 0$. (a) Deduzca la expresión para la aceleración del bloque. (b) Empleando la integración numérica, determine el máximo desplazamiento

y la máxima velocidad del bloque. (c) Trace la gráfica de la velocidad en función del desplazamiento durante el intervalo de tiempo $0 \leq t \leq 3$ s.

12.63 En el fondo del tanque de agua se origina una burbuja. La aceleración de ésta, que se determina por su flotabilidad y el arrastre viscoso del agua, es $a = 80 - 16v^{1.5}$ pies/s^2, donde v es la velocidad en pies/s. Por medio de la integración numérica obtenga la velocidad de la burbuja cuando llega a la superficie del agua.

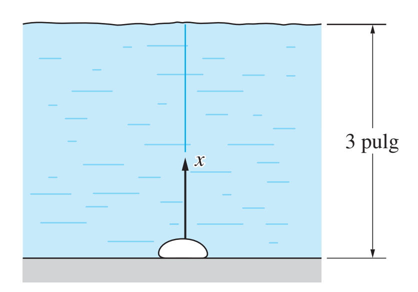


Fig. P12.63

12.5 Movimiento curvilíneo

a. Superposición de movimientos rectilíneos

Aquí se considera un caso especial de movimiento curvilíneo que puede representarse como una superposición de movimientos rectilíneos independientes. Esta situación ocurre cuando las componentes de la aceleración tienen la forma

$$a_x = f_x(v_x, x, t) \qquad a_y = f_y(v_y, y, t) \qquad a_z = f_z(v_z, z, t) \tag{12.24}$$

Se dice que las ecuaciones (12.24) están *desacopladas* porque la aceleración en cualquier dirección coordenada es independiente del movimiento en las otras dos direcciones. Por tanto, los movimientos en las direcciones x, y, z se pueden ver como rectilíneos independientes que es posible analizar con las herramientas que se han explicado en el apartado anterior.

Si la partícula se mueve en un plano, por ejemplo xy, su movimiento puede tratarse como una superposición de dos movimientos rectilíneos, uno en la dirección x y el otro en la dirección y. El vuelo de proyectiles en un campo gravitacional constante entra en esta categoría.

b. Movimiento curvilíneo general

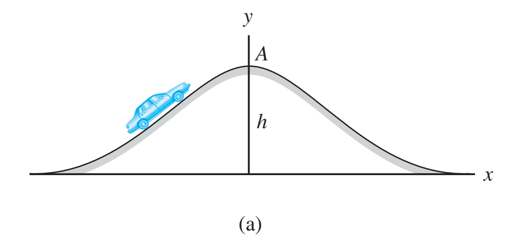
Si las ecuaciones (12.24) están acopladas, será difícil o imposible obtener una solución analítica. Las ecuaciones de este tipo deben resolverse con métodos numéricos: véase el apéndice E.3.

Problema de ejemplo **12.10**

Como el automóvil de 1200 kg de la figura (a) viaja sobre la cima de una montaña, su posición está dada por

$$x = v_0 t \qquad y = h \exp\left[-\left(\frac{v_0 t}{b}\right)^2\right] \tag{a}$$

donde $v_0 = 30$ m/s, $h = 10$ m, $b = 50$ m y t es el tiempo en segundos. En A determine la fuerza de contacto R entre el automóvil y el camino.



(a)

Solución

Las componentes de la aceleración del automóvil pueden obtenerse al derivar las ecuaciones (a):

$$\dot{x} = v_0$$

$$\ddot{x} = 0$$

$$\dot{y} = -2h\left(\frac{v_0}{b}\right)^2 t \exp\left[-\left(\frac{v_0 t}{b}\right)^2\right]$$

$$\ddot{y} = -2h\left(\frac{v_0}{b}\right)^2 \exp\left[-\left(\frac{v_0 t}{b}\right)^2\right] + 4h\left(\frac{v_0}{b}\right)^4 t^2 \exp\left[-\left(\frac{v_0 t}{b}\right)^2\right]$$

En el punto A se tiene $x = 0$ y de acuerdo con la ecuación (a), $t = 0$. Por tanto, las componentes de la aceleración en A son

$$a_x = \ddot{x} = 0$$

$$a_y = \ddot{y} = -2h\left(\frac{v_0}{b}\right)^2 = -2(10)\left(\frac{30}{50}\right)^2 = -7.2 \text{ m/s}$$

El signo menos implica que la aceleración va hacia abajo (en la dirección y negativa).

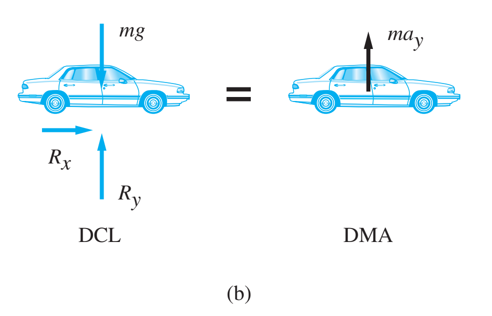
En la figura (b) se muestran el diagrama de cuerpo libre (DCL) y el de masa-aceleración (DMA) del automóvil en A, donde R_x y R_y representan las componentes

de la fuerza de contacto que actúan sobre el automóvil. Los diagramas conducen a las siguientes ecuaciones del movimiento:

$$\Sigma F_x = 0 \qquad R_x = 0$$
$$\Sigma F_y = ma_y \quad +\!\uparrow \quad R_y - mg = ma_y$$

Por tanto,

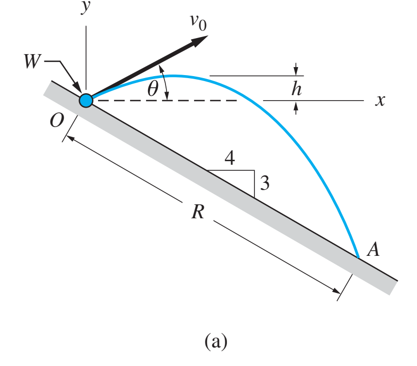
$$R = R_y = m(g + a_y) = 1200(9.81 - 7.2) = 3130 \text{ N} \qquad \textit{Respuesta}$$



(b)

Problema de ejemplo **12.11**

Como se muestra en la figura (a), un proyectil de peso W se lanza desde el origen O. La velocidad inicial v_0 forma un ángulo θ con la horizontal. El proyectil aterriza en A, a una distancia R de O, cuando se mide sobre el plano inclinado. 1. Suponiendo que v_0 y θ son conocidas, encuentre las componentes rectangulares de la velocidad y la posición del proyectil como funciones del tiempo. 2. Dado que $v_0 = 90$ pies/s y $\theta = 30^\circ$, determine la altura máxima h y la distancia R.



(a)

Solución

Parte 1

De los diagramas de cuerpo libre (DCL) y de masa-aceleración (DMA) de la figura (b), se obtienen las ecuaciones del movimiento.

DCL DMA

(b)

$$\Sigma F_x = ma_x \quad \xrightarrow{+} \quad 0 = \frac{W}{g} a_x$$

$$\Sigma F_y = ma_y \quad +\!\uparrow \quad -W = \frac{W}{g} a_y$$

Por lo que las componentes de la aceleración son $a_x = 0$ y $a_y = -g$. Como a_x y a_y son constantes, la velocidad y la posición se obtienen rápidamente por integración, como se muestra en la siguiente tabla.

Dirección *x*	Dirección *y*	
$a_x = 0$	$a_y = -g$	(a)
$v_x = \int a_x\,dt = C_1$	$v_y = \int a_y\,dt = -gt + C_3$	(b)
$x = \int v_x\,dt = C_1 t + C_2$	$y = \int v_y\,dt = -\frac{1}{2}gt^2 + C_3 t + C_4$	(c)

Las ecuaciones (c) son paramétricas (t es el parámetro) de una parábola sobre el plano xy. Por tanto, si no hay resistencia del aire, un proyectil sigue una trayectoria parabólica.

Para evaluar las constantes de integración (C_1 a C_4), deben identificarse cuatro condiciones impuestas sobre el movimiento. Un examen del enunciado del problema y de la figura (a) revela que existen cuatro condiciones iniciales. Si se elige $t = 0$ al momento del lanzamiento, esas condiciones son

1. $x = 0$ cuando $t = 0$.
2. $y = 0$ cuando $t = 0$.

Al sustituir las condiciones **1** y **2** en las ecuaciones (c), se obtiene que $C_2 = C_4 = 0$.

3. $v_x = v_0 \cos\theta$ cuando $t = 0$.
4. $v_y = v_0 \operatorname{sen}\theta$ cuando $t = 0$.

De acuerdo con las ecuaciones (c), las condiciones 3 y 4 se satisfacen si $C_1 = v_0 \cos\theta$ y $C_3 = v_0 \operatorname{sen}\theta$. Al sustituir de C_1 a C_4 en las ecuaciones (b) y (c), las componentes rectangulares de la velocidad y la posición son

$$v_x = v_0 \cos\theta \qquad v_y = -gt + v_0 \operatorname{sen}\theta \qquad \textit{Respuesta} \quad \text{(d)}$$

$$x = (v_0 \cos\theta)t \qquad y = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \operatorname{sen}\theta)t \qquad \textit{Respuesta} \quad \text{(e)}$$

Precaución Con frecuencia es conveniente emplear las ecuaciones (d) y (e) para resolver problemas de proyectiles cuando la resistencia del aire es despreciable. Sin embargo, no se aplican esas ecuaciones si las condiciones iniciales no coinciden con las que se han dado en las ecuaciones **1** a **4**.

Parte 2

Al sustituir $v_0 = 90$ pies/s y $\theta = 30^{\circ}$ en las ecuaciones (d) y (e), se obtiene la siguiente descripción del movimiento:

$$v_x = 77.94 \text{ pies/s} \qquad v_y = -32.2t + 45.0 \text{ pies/s} \quad \text{(f)}$$

$$x = 77.94t \text{ pies} \qquad y = -16.1t^2 + 45.0t \text{ pies} \quad \text{(g)}$$

Ahora todas las características del movimiento se pueden calcular con las ecuaciones (f) y (g).

La altura máxima h es igual al valor de y cuando $v_y = 0$. Sea t_1 el tiempo cuando esto ocurre. Entonces la segunda de las ecuaciones (f) se obtiene

$$0 = -32.2t_1 + 45.0 \quad \text{o} \quad t_1 = 1.3975 \text{ s}$$

Al sustituir este valor para t_1 en la segunda de las ecuaciones (g) se obtiene la altura máxima del proyectil

$$h = -16.1(1.3975)^2 + 45.0(1.3975) = 31.4 \text{ pies} \qquad \textit{Respuesta}$$

Ahora sea t_2 el tiempo cuando el proyectil aterriza en A sobre el plano inclinado. Al sustituir las coordenadas de A, $x = (4/5)R$ y $y = -(3/5)R$, en las ecuaciones (g), se obtiene

$$\frac{4}{5}R = 77.94t_2 \qquad \text{y} \qquad -\frac{3}{5}R = -16.1t_2^2 + 45.0t_2$$

La solución es $t_2 = 6.426$ s y

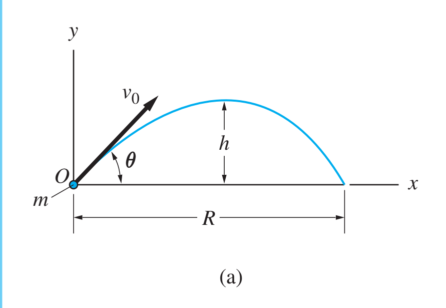
$$R = 626 \text{ pies} \qquad \textit{Respuesta}$$

Problema de ejemplo **12.12**

Un proyectil de masa m se lanza desde el punto O al tiempo $t = 0$ con velocidad v_0 como se muestra en la figura (a). El arrastre aerodinámico F_D es proporcional a la rapidez del proyectil: $F_D = cv$, donde c es una constante: 1. Obtenga las ecuaciones del movimiento. 2. Compruebe que la solución de las ecuaciones del movimiento es

$$x = C_1 e^{-ct/m} + C_2 \qquad \text{y} \qquad y = C_3 e^{-ct/m} - \frac{mgt}{c} + C_4$$

donde de C_1 a C_4 son constantes. 3. Encuentre la altura máxima h dado que $W = 2$ lb, $c = 0.04$ lb · s/pie, $v_0 = 80$ pies/s y $\theta = 30^\circ$.



(a)

mg Trayectoria
cv_x
cv_y
$F_D = cv$
ma_y
ma_x

DCL DMA

(b)

Solución

Parte 1

La figura (b) muestra el DCL y el DMA del proyectil. La dirección del arrastre F_D en el DCL es opuesta a la del vector velocidad (tangente a la trayectoria) y sus componentes rectangulares son cv_x y cv_y. En el DMA se muestran las componentes rectangulares del vector de inercia, ma_x y ma_y. Las correspondientes ecuaciones del movimiento son

$$\Sigma F_x = ma_x \quad \xrightarrow{+} \quad -cv_x = ma_x \qquad \textit{Respuesta} \quad \text{(a)}$$

$$\Sigma F_y = ma_y \quad +\!\uparrow \quad -mg - cv_y = ma_y \qquad \textit{Respuesta} \quad \text{(b)}$$

Parte 2

Para comprobar que las expresiones para $x(t)$ y $y(t)$ dadas en el enunciado del problema satisfacen las ecuaciones del movimiento, primero deben evaluarse sus derivadas.

$$x = C_1 e^{-ct/m} + C_2 \qquad y = C_3 e^{-ct/m} - \frac{mgt}{c} + C_4 \qquad \text{(c)}$$

$$v_x = \dot{x} = -C_1 \frac{c}{m} e^{-ct/m} \qquad v_y = \dot{y} = -C_3 \frac{c}{m} e^{-ct/m} - \frac{mg}{c} \qquad \text{(d)}$$

$$a_x = \ddot{x} = C_1 \left(\frac{c}{m}\right)^2 e^{-ct/m} \qquad a_y = \ddot{y} = C_3 \left(\frac{c}{m}\right)^2 e^{-ct/m} \qquad \text{(e)}$$

la sustitución de los resultados anteriores en las ecuaciones (a) y (b) muestra que las ecuaciones (c) representan la solución, puesto que satisfacen las ecuaciones del movimiento.

Parte 3

Al utilizar los valores numéricos dados para c y W, se tiene $c/m = 0.04(32.2)/2 = 0.6440 \text{ s}^{-1}$ y $mg/c = 2/0.04 = 50$ pies/s. Si se emplean esos valores en las ecuaciones (c) y (d) y se supone que el tiempo t se mide en segundos, se obtiene

$$x = C_1 e^{-0.6440t} + C_2 \text{ pies} \qquad y = C_3 e^{-0.6440t} - 50t + C_4 \text{ pies} \tag{f}$$

$$v_x = -0.6440 C_1 e^{-0.6440t} \text{pies/s} \quad v_y = -0.6440 C_3 e^{-0.6440t} - 50 \text{ pies/s} \tag{g}$$

Del enunciado del problema se deduce que el movimiento debe satisfacer las siguientes condiciones en $t = 0$:

1. $x = 0$
2. $y = 0$
3. $v_x = 80 \cos 30^\circ = 69.28$ pies/s
4. $v_y = 80 \text{ sen} 30^\circ = 40.00$ pies/s

Al sustituir estas cuatro condiciones en las ecuaciones (f) y (g) se obtienen igualdades que es posible resolver para determinar las constantes de integración. Al omitir los detalles algebraicos, se obtiene $C_1 = -107.58$ pies, $C_2 = 107.58$ pies, $C_3 = -139.75$ pies y $C_4 = 139.75$ pies. Cuando sustituimos estos valores en las ecuaciones (f) y (g) encontramos que

$$x = 107.58\left(1 - e^{-0.6440t}\right) \text{ pies} \tag{h}$$

$$y = 139.75\left(1 - e^{-0.6440t}\right) - 50t \text{ pies} \tag{i}$$

$$v_x = 69.28 e^{-0.6440t} \text{ pies/s} \tag{j}$$

$$v_y = 90 e^{-0.6440t} - 50 \text{ pies/s} \tag{k}$$

El valor máximo de y ocurre cuando $v_y = 0$. Si este tiempo es t_1, la ecuación (k) implica

$$0 = 90 e^{-0.6440 t_1} - 50$$

de la que encontramos

$$t_1 = -\frac{\ln(50/90)}{0.6440} = 0.9127 \text{ s}$$

Si se sustituye $t = t_1 = 0.9127$ s en la ecuación (i), se obtiene para el valor máximo de y

$$\begin{aligned} y_{\max} = h &= 139.75\left[1 - e^{-0.6440(0.9127)}\right] - 50(0.9127) \\ &= 16.48 \text{ pies} \end{aligned}$$

Respuesta

Problema de ejemplo 12.13

Integre numéricamente las ecuaciones del movimiento para el proyectil descrito en el problema de ejemplo 12.12 empleando $c = 0$, 0.02 y 0.04 lb · s/pie. Trace la gráfica de las tres trayectorias.

Solución

Las ecuaciones del movimiento se dedujeron en el problema de ejemplo 12.12 como:

$$a_x = -\frac{c}{m}v_x \qquad a_y = -g - \frac{c}{m}v_y$$

Al dejar

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

entonces las ecuaciones diferenciales de primer orden equivalentes y las condiciones iniciales son

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ -(c/m)x_3 \\ -g - (c/m)x_4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 80\cos 30^\circ = 69.282 \text{ pies/s} \\ 80 \text{ sen } 30^\circ = 40 \text{ pies/s} \end{bmatrix}$$

Con el programa MATLAB que se muestra a continuación se integran las ecuaciones diferenciales. La instrucción `hold on` permite agregar nuevas curvas a la gráfica usual. En el apéndice E se explican las otras instrucciones. El tiempo de vuelo se estimó en 2.5 s o menos. Si se toma 0.05 s como el incremento de tiempo para los resultados, aproximadamente 50 puntos están disponibles para cada gráfica.

```
function example12_13
g = 32.2; m = 2/g;
time = [0:0.05:2.5];
x0 = [0 0 69.282 40];

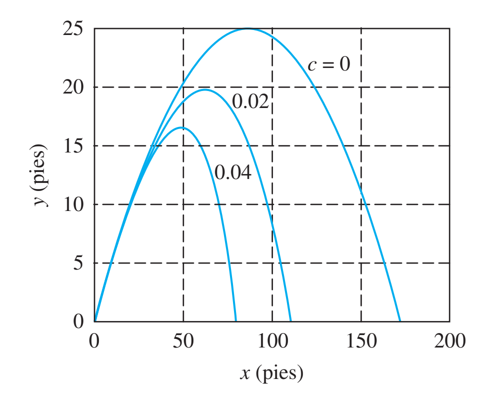
c = 0.04;
[t,x] = ode45(@f,time,x0);
axes('fontsize',14)
plot(x(:,1),x(:,2),'linewidth',1.5)
grid on
xlabel('x (ft)'); ylabel('y (ft)')
hold on

c = 0.02
[t,x] = ode45(@f,time,x0);
plot(x(:,1),x(:,2),'linewidth',1.5)

c = 0;
[t,x] = ode45(@f,time,x0);
plot(x(:,1),x(:,2),'linewidth',1.5)

  function dxdt = f(t,x)
  dxdt = [x(3); x(4); -c/m*x(3); -g - c/m*x(4)];
  end
end
```

Ahora se muestran las gráficas de y en función de x. La parte de la gráfica debajo del eje x se recortó empleando la función "edit" de MATLAB de su ventana de graficado.



Problemas

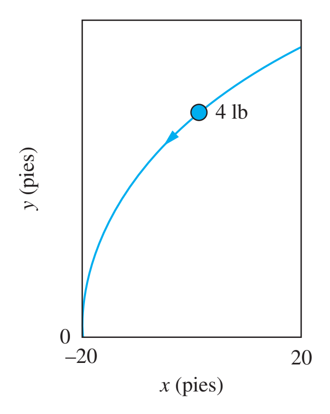


Fig. P12.65

12.64 Una masa de 0.5 kg se mueve sobre la trayectoria $x = \frac{1}{40}(y - 12)^2$, donde x y y se miden en metros. Conociendo que la componente y de la velocidad es constante con valor de 10 m/s, determine la fuerza que actúa sobre la masa.

12.65 Un objeto de 4 lb viaja sobre la trayectoria que se muestra. Las coordenadas de posición del objeto varían con el tiempo t (que se mide en segundos):

$$x = 20 \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) \text{ pies} \qquad y = 64.4(4 - t^2) \text{ pies}$$

Calcule las componentes de la fuerza que actúa sobre el objeto en $t = 0$, 1 y 2 s.

12.66 El balancín A de 2 oz está unido al rin de la llanta de un automóvil. Cuando éste viaja con rapidez constante v_0, la trayectoria de A es la cicloide acortada

$$x = v_0 t - r \operatorname{sen}\frac{v_0 t}{R} \qquad y = R - r \cos\frac{v_0 t}{R}$$

(a) Demuestre que la aceleración del peso A tiene una magnitud constante. (b) Calcule la magnitud de la fuerza que actúa entre el peso y la llanta si $v_0 = 60$ mi/h, $R = 1.25$ pies y $r = 0.8$ pies (desprecie la aceleración gravitacional).

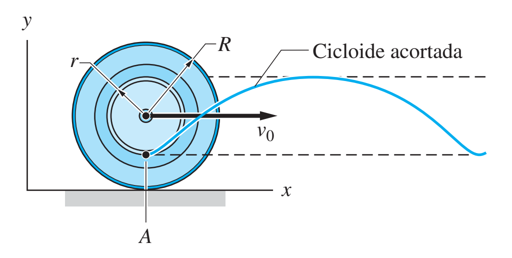


Fig. P12.66

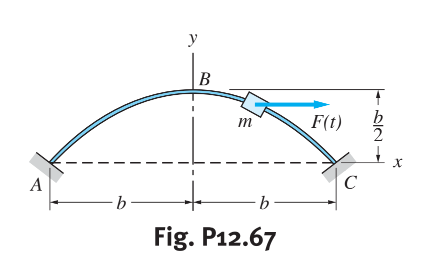


Fig. P12.67

12.67 El deslizador de masa $m = 0.5$ kg se mueve sobre la varilla guía parabólica ABC, impulsado por la fuerza horizontal $F(t)$. El coeficiente de fricción cinética entre el deslizador y la varilla guía es $\mu = 0.2$. La posición del deslizador está dada por

$$x = b \operatorname{sen}\frac{2\pi t}{t_0} \qquad y = \frac{b}{4}\left(1 + \cos\frac{4\pi t}{t_0}\right)$$

donde $t_0 = 0.8$ s y $b = 1.2$ m. Suponiendo que ABC está en el plano vertical, determine la fuerza F cuando el deslizador está en B.

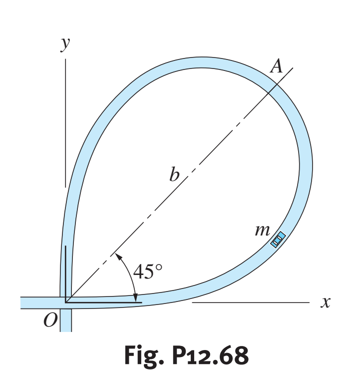


Fig. P12.68

12.68 Un automóvil de masa m viaja por la autopista de intercambio. Su posición está dada por

$$x = \frac{b}{2}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi t}{4t_0} + \operatorname{sen}\frac{3\pi t}{4t_0}\right) \qquad y = \frac{b}{2}\left(\cos\frac{\pi t}{4t_0} - \cos\frac{3\pi t}{4t_0}\right)$$

donde $b = 240$ m y $t_0 = 12$ s es el tiempo de viaje entre O y A. Determine el coeficiente de fricción más pequeño entre las llantas y el camino que evitaría que el automóvil patine en A (observe que $t = t_0$ cuando el automóvil está en A).

12.69 El aspersor de agua A se encuentra sobre una pendiente y oscila en el plano xy. El agua deja el aspersor a 20 pies/s y golpea el suelo en B, que está a una distancia R del aspersor. Deduzca la expresión para R como una función del ángulo θ. Desprecie la resistencia del aire.

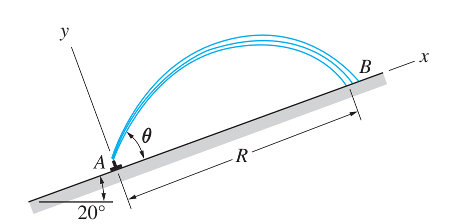


Fig. P12.69

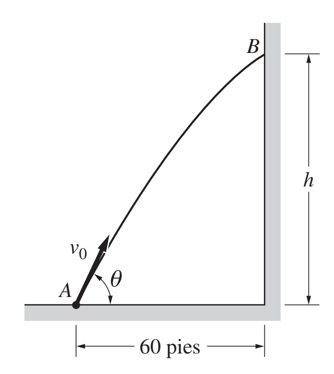


Fig. P12.70, P12.71

12.70 Se lanza un proyectil en A, con una velocidad inicial $v_0 = 70$ pies/s con un ángulo $\theta = 65^\circ$, que impacta la pared vertical en B. Calcule la altura h despreciando la resistencia del aire.

***12.71** Se lanza un proyectil en A, con una velocidad inicial de 80 pies/s con un ángulo θ, que impacta la pared vertical en B. Calcule el ángulo θ que maximizará la altura h del punto de impacto. ¿Cuál es esta altura máxima?

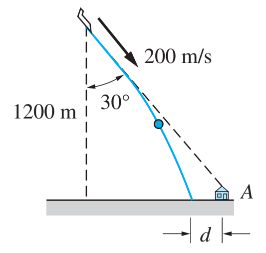


Fig. P12.72

12.72 Un avión se mueve a 30° a partir de la vertical con una rapidez de 200 m/s. La trayectoria de vuelo se dirige hacia el objetivo en A. Si el avión suelta un paquete a una altura de 1200 m, encuentre la distancia d entre el punto de impacto y el objetivo.

12.73 Se lanza un proyectil en A con rapidez v_0 para golpear un objetivo en B. (a) Deduzca la expresión que determine el ángulo de elevación θ requerido. (b) Encuentre las dos soluciones θ_1 y θ_2 de la expresión deducida en el inciso (a) si $v_0 = 250$ m/s y $R = 3$ km. Desprecie la resistencia del aire.

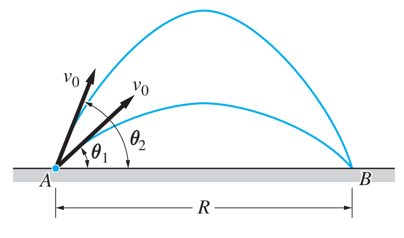


Fig. P12.73

12.74 Un jugador de voleibol sirve el balón desde el punto A con velocidad $v_0 = 42$ pies/s a un ángulo $\theta = 28^\circ$. (a) Deduzca la ecuación de la trayectoria (y como función de x) de la pelota. (b) Determine si la pelota pasa por encima de la red C y cae dentro de la base B.

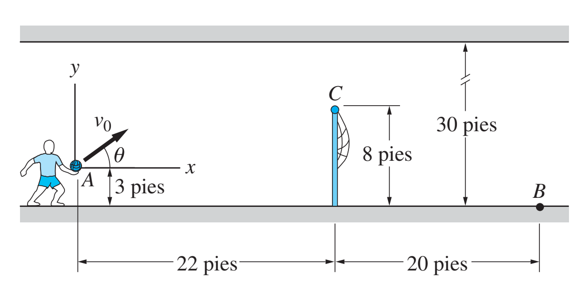


Fig. P12.74, P12.75

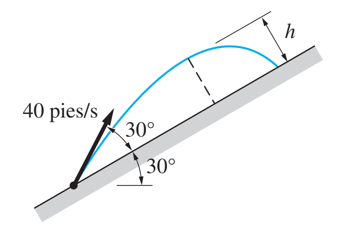


Fig. P12.76

12.75 El balón de voleibol se sirve desde el punto A con velocidad inicial v_0 a un ángulo $\theta = 70^{\circ}$. Calcule el valor más alto de v_0 para el que la pelota no golpeará en el techo.

12.76 Un proyectil se dispara desde un plano inclinado con la velocidad inicial que se muestra. Calcule la altura máxima h, medida de manera perpendicular al plano, que alcanza el proyectil. Desprecie la resistencia del aire.

12.77 Una partícula de masa m (kg) que lleva una carga q (coulombs) entra al espacio entre dos placas cargadas con la velocidad horizontal v_0 (m/s) que se muestra. Despreciando la aceleración gravitacional, la fuerza que actúa sobre la partícula mientras se encuentra entre las placas es $F = q\Delta V/2d$, donde $\Delta V = V_2 - V_1$ es la diferencia de potencial electrostático (en volts) entre las placas. Deduzca la expresión para el valor más grande de ΔV que se pueda aplicar si la partícula debe librar la esquina A de la placa.

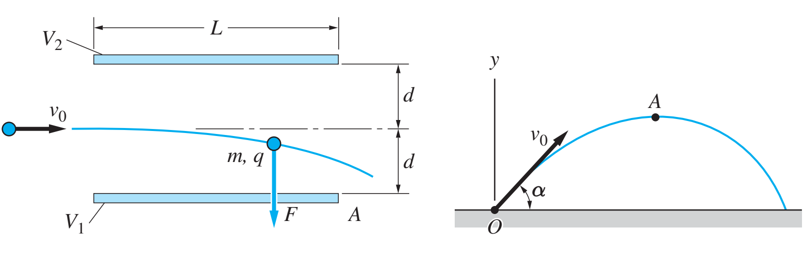


Fig. P12.77

Fig. P12.78

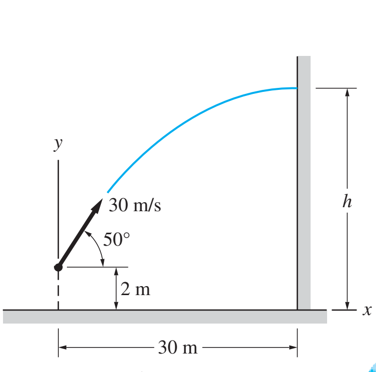


Fig. P12.79

***12.78** Un proyectil de masa m se lanza desde O con rapidez inicial v_0 a un ángulo α respecto a la horizontal. La fuerza de arrastre aerodinámico sobre el proyectil durante su vuelo es $\mathbf{F}_D = -c\mathbf{v}$, donde c es una constante. Si el punto A es el pico de la trayectoria, deduzca las expresiones para (a) el tiempo requerido para alcanzar A y (b) la rapidez del proyectil en A.

12.79 Una roca de 0.1 kg se lanza contra una pared desde una distancia de 30 m a una elevación de 2 m con la velocidad inicial que se muestra. El arrastre aerodinámico que actúa sobre la roca es $F_D = 0.0005\, v^2$, donde F_D está en newtons y la velocidad v en m/s. (a) Demuestre que las componentes de la aceleración son

$$a_x = -0.005\, v_x\sqrt{v_x^2 + v_y^2} \text{ m/s}^2$$

$$a_y = -0.005\, v_y\sqrt{v_x^2 + v_y^2} - 9.81 \text{ m/s}^2$$

(b) Utilice integración numérica para encontrar la altura h donde la roca golpea la pared y la velocidad del impacto. *Nota*: la solución analítica es $h = 24.0$ m, $v = 16.3$ m/s.

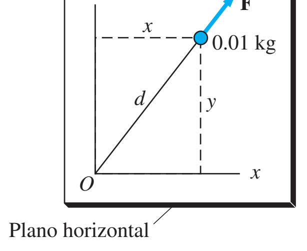


Fig. P12.80, P12.81

12.80 La partícula de 0.01 kg viaja libremente en una superficie horizontal lisa sobre el plano xy. La fuerza F que actúa sobre la partícula siempre se dirige lejos del origen O, con magnitud $F = 0.005/d^2$ N, donde d es la distancia en metros de la partícula a partir de O. Al tiempo $t = 0$, la posición de la partícula es $x = 0.3$ m, $y = 0.4$ m y su velocidad es $\mathbf{v} = -2\mathbf{j}$ m/s. (a) Obtenga las componentes de la aceleración de la

partícula y establezca las condiciones iniciales. (b) Utilice la integración numérica para determinar la coordenada x y la rapidez de la partícula cuando cruza el eje x.

12.81 Resuelva el problema 12.80 si la fuerza **F** está dirigida hacia el origen O.

12.82 Una pelota de 9 oz se lanza horizontalmente con velocidad de 120 pies/s desde una altura de 6 pies. La fuerza de arrastre aerodinámico que actúa sobre la pelota es $F_D = c_D v^{1.5}$ lb, donde v es la rapidez en pies/s y $c_D = 0.0012$ lb · (s/pie)$^{1.5}$. (a) Empleando el sistema de coordenadas que se muestra, deduzca a_x y a_y como funciones de v_x y v_y, y establezca las condiciones iniciales. (b) Determine el tiempo de vuelo y el alcance R mediante la integración numérica. (La solución analítica es $t = 0.655$ s y $R = 63.1$ pies).

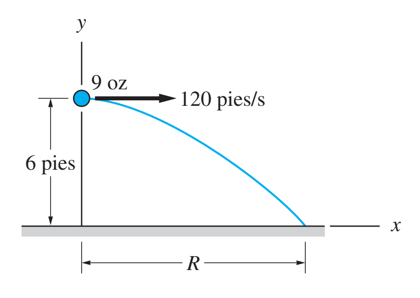


Fig. P12.82

12.83 Alguien patea una pelota de 1.0 kg con una velocidad inicial de 30 m/s, con un viento en contra de 20 m/s. La fuerza de arrastre aerodinámico que actúa sobre la pelota es $\mathbf{F}_D = -0.5\mathbf{v}$ N. La aceleración resultante de la pelota es

$$\mathbf{a} = -(10 + 0.5v_x)\mathbf{i} - (9.81 + 0.5v_y)\mathbf{j} \text{ m/s}^2$$

donde las componentes de la velocidad están en m/s. (a) Determine la distancia horizontal de viaje b y el tiempo de vuelo. (b) Grafique la trayectoria de la pelota (y en función de x).

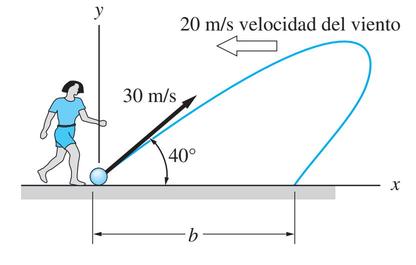


Fig. P12.83

12.84 La masa $m = 0.25$ kg, unida a un resorte lineal (con rigidez $k = 10$ N/m y longitud libre $L_0 = 0.5$ m), se mueve en el plano vertical. El resorte puede resistir tensión y compresión. Se suelta la masa a partir del reposo en $x = 0.5$ m, $y = -0.5$ m. (a) Deduzca la expresión para las componentes de la aceleración de la masa y establezca las condiciones iniciales. (b) Integre numéricamente las componentes de la aceleración para $0 \leq t \leq 2$ s y trace la gráfica de la trayectoria de la masa.

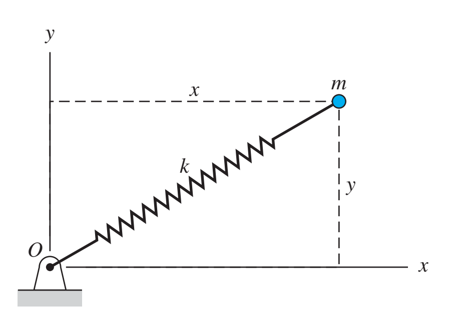


Fig. P12.84, P12.85

12.85 Resuelva el problema 12.84 si se suelta la masa a partir del reposo en $x = y = 0.5$ m y el resorte no resiste compresión.

12.86 El movimiento en un plano de una pelota de tenis de mesa de la figura (a) está regido por las tres componentes de la aceleración que se han dado en la figura (b). Además de la aceleración gravitacional g, existen los efectos del arrastre aerodinámico a_D y la elevación aerodinámica a_L (la elevación es causada por el efecto Bernoulli, es decir, la diferencia en la presión del aire originada por la rotación de la pelota). Aproximaciones realistas para esas aceleraciones son $a_D = 0.05v^2$ y $a_L =$

$0.16\omega v$, donde v está en pies/s y el espín ω está en rev/s. La pelota sale de la raqueta a la altura de la mesa con la velocidad inicial $v_0 = 60$ pies/s, una inclinación de $\theta_0 = 60^o$ con la horizontal y un espín $\omega = +10$ rev/s (que puede considerarse constante). (a) Obtenga las componentes de la aceleración en las direcciones x y y. (b) Suponga que la pelota aterriza sobre la mesa, entonces integre las componentes de la aceleración para la duración del tiempo de vuelo. Determine el tiempo de vuelo y la distancia horizontal que se ha viajado. (c) Trace la gráfica de la trayectoria de la pelota.

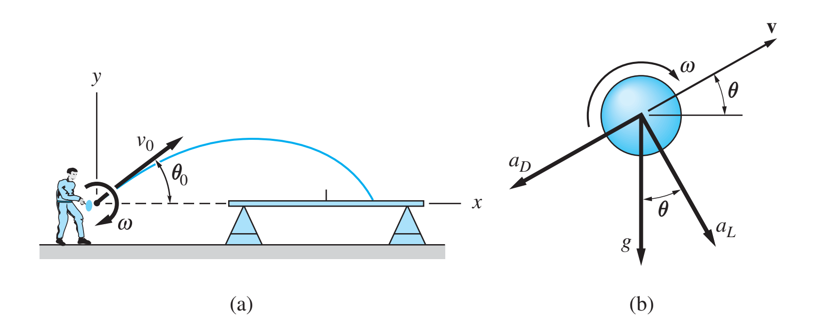


Fig. P12.86

*12.6 Análisis del movimiento por el método de áreas

Este apartado describe las relaciones geométricas entre los diagramas de aceleración, velocidad y posición de una partícula que se encuentra en movimiento rectilíneo. Estas relaciones se utilizan para desarrollar un método numérico simple destinado al análisis del movimiento rectilíneo, a saber, el *método de áreas*, que permite construir diagramas de velocidad y posición a partir de un diagrama de aceleración dado. El método de áreas es muy útil en los casos en que el diagrama de aceleración está formado por líneas rectas.

En la figura 12.6 se muestran gráficas típicas de aceleración, velocidad y posición de una partícula en movimiento rectilíneo. Al recordar que $a = dv/dt$ y $v = dx/dt$, se deducen las siguientes relaciones entre los diagramas:

1. La pendiente en el diagrama de velocidad al tiempo t_i es igual a la aceleración en ese tiempo; es decir, $(dv/dt)_i = a_i$, como se muestra en la figura 12.6(b).

2. La pendiente en el diagrama de posición al tiempo t_i es igual a la velocidad en ese tiempo; es decir $(dx/dt)_i = v_i$, como se muestra en la figura 12.6(c).

Ahora considere el intervalo de tiempo que inicia en t_0 y finaliza en t_n, como se muestra en la figura 12.6. Los valores iniciales y finales de la aceleración, velocidad y posición se denotan por a_0, v_0, x_0 y a_n, v_n y x_n, respectivamente. Al reescribir $a = dv/dt$ como $dv = a\,dt$ e integrar entre t_0 y t_n se obtiene

$$v_n - v_0 = \int_{t_0}^{t_n} a(t)\,dt$$

Si se reconoce el lado derecho de esta ecuación como el área del diagrama de aceleración entre t_0 y t_n, se tiene

$$v_n - v_0 = \text{área del diagrama } a\text{-}t \Big]_{t_0}^{t_n} \tag{12.25}$$

De modo similar, si se plantea $v = dx/dt$ como $dx = v\,dt$ y se integra entre t_0 y t_n, se obtiene

$$x_n - x_0 = \int_{t_0}^{t_n} v(t)\,dt$$

Como el lado derecho de esta ecuación es el área del diagrama de velocidad entre t_0 y t_n, se llega a

$$x_n - x_0 = \text{área del diagrama } v\text{-}t \Big]_{t_0}^{t_n} \tag{12.26}$$

Las ecuaciones (12.25) y (12.26) pueden establecerse de la siguiente manera.

3. El incremento en la velocidad durante un intervalo de tiempo dado es igual al área del diagrama *a-t* para ese intervalo [área sombreada en la figura 12.6(a)].
4. El incremento en la coordenada de posición durante un intervalo de tiempo dado es igual al área del diagrama *v-t* para ese intervalo [área sombreada en la figura 12.6(b)].

Las relaciones de la **1** a la **4** se establecieron para el movimiento rectilíneo. Sin embargo, también se aplican al caso especial de uno curvilíneo que pueda describirse como una superposición de movimientos rectilíneos, uno para cada eje de coordenados (apartado 12.5). Por ejemplo, en el caso bidimensional los movimientos pueden representarse con dos conjuntos de diagramas: $a_x - t$, $v_x - t$, $x - t$, para el que va en la dirección x y $a_y - t$, $v_y - t$, y-t para la dirección y.

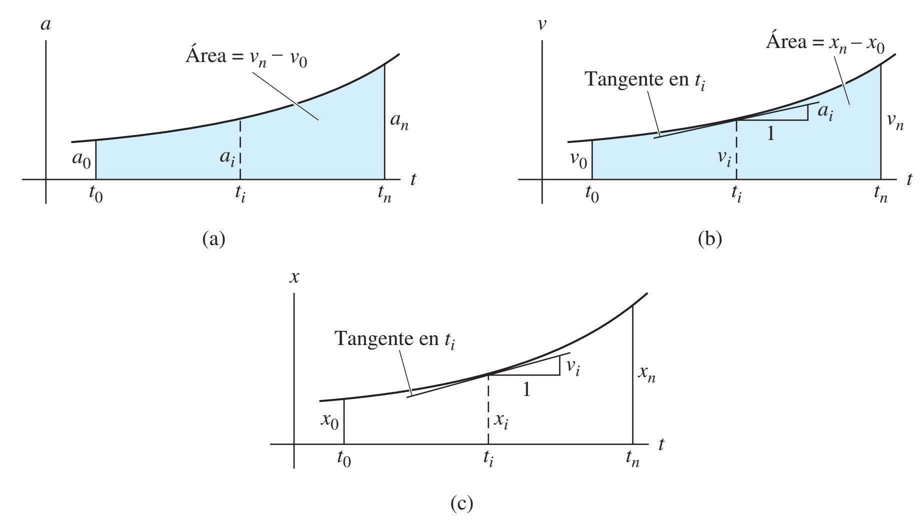
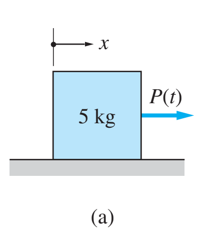


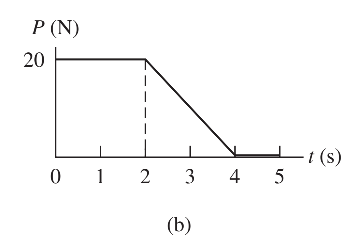
Fig. 12.6

Problema de ejemplo 12.14

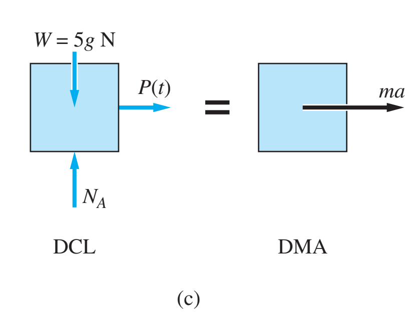
En la figura (a) el bloque de 5 kg está en reposo en $x = 0$ y $t = 0$ cuando se aplica la fuerza $P(t)$. En la figura (b) se muestra la variación en el tiempo de $P(t)$. Puede despreciarse la fricción entre el bloque y el plano horizontal. 1. Utilice el método de áreas para construir los diagramas *a-t*, *v-t* y *x-t*. 2. Determine la velocidad y posición del bloque en $t = 5$ s.



(a)



(b)



(c)

Solución

Parte 1

Diagrama a-t Del DCL y DMA del bloque que se mencionó en la figura (c), se obtiene la siguiente ecuación del movimiento:

$$\Sigma F_x = ma \quad \xrightarrow{+} \quad P = 5a$$

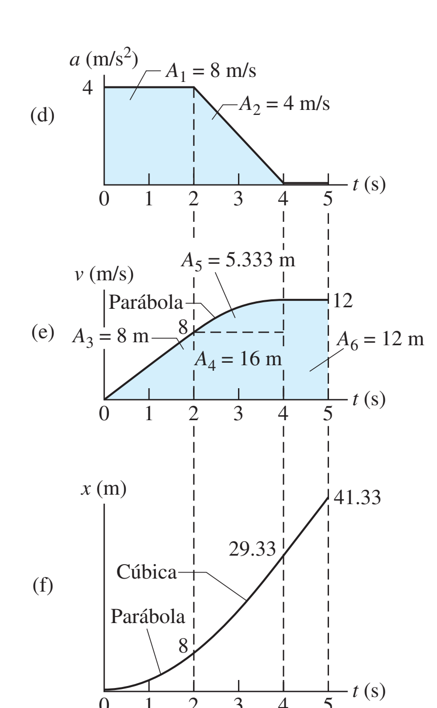
Por tanto, la aceleración es

$$a = \frac{P}{5}$$

El diagrama *a-t* resultante se muestra en la figura (d).

En lo que resta de la solución se utilizarán los subíndices sobre a, v y x para indicar los valores de esas variables en diversos tiempos. Por ejemplo, v_0, v_1, v_2, . . . se referirán a las velocidades en $t = 0$, 1 s, 2 s, . . . , respectivamente.

Diagrama v-t Antes de construir el diagrama *v-t*, se calculan las áreas bajo el diagrama *a-t* de la figura (d): $A_1 = 2(4) = 8$ m/s y $A_2 = (1/2)(2)(4) = 4$ m/s. Las velocidades v_2, v_4 y v_5 se encuentran al aplicar la ecuación (12.25). (Recuerde que $v_0 = 0$):



$$v_2 = v_0 + \text{área del diagrama } a\text{-}t \Big]_{t=0}^{t=2\text{ s}}$$
$$= v_0 + A_1 = 0 + 8 = 8 \text{ m/s}$$

$$v_4 = v_2 + \text{área del diagrama } a\text{-}t \Big]_{t=2\text{ s}}^{t=4\text{ s}}$$
$$= v_2 + A_2 = 8 + 4 = 12 \text{ m/s}$$

$$v_5 = v_4 + \text{área del diagrama } a\text{-}t \Big]_{t=4\text{ s}}^{t=5\text{ s}}$$
$$= v_4 + 0 = 12 \text{ m/s}$$

Los valores v_0, v_2, v_4 y v_5 se han graficado en la figura (e). La forma del diagrama *v-t* que conecta esos puntos se deduce de $a = dv/dt$, es decir, la aceleración es igual a la pendiente del diagrama *v-t*.

Diagrama x-t Primero deben calcularse las áreas bajo el diagrama v-t de la figura (e): $A_3 = (1/2)(2)(8) = 8$ m; $A_4 = (2)(8) = 16$ m; $A_5 = (2/3)(2)(4) = 5.333$ m; $A_6 = (1)(12) = 12$ m. Entonces las posiciones x_2, x_4 y x_5 se obtienen con la ecuación (12.26), iniciando con el valor conocido $x_0 = 0$:

$$x_2 = x_0 + \text{área del diagrama } v\text{-}t \Big]_{t=0}^{t=2\text{ s}}$$
$$= 0 + A_3 = 0 + 8 = 8 \text{ m}$$

$$x_4 = x_2 + \text{área del diagrama } v\text{-}t \Big]_{t=2\text{ s}}^{t=4\text{ s}}$$
$$= 8 + (A_4 + A_5) = 8 + 16 + 5.333 = 29.33 \text{ m}$$

$$x_5 = x_4 + \text{área del diagrama } v\text{-}t \Big]_{t=4\text{ s}}^{t=5\text{ s}}$$
$$= 29.33 + A_6 = 29.33 + 12 = 41.33 \text{ m}$$

Después de graficar los puntos x_0, x_2, x_4 y x_5 en la figura (f), es posible determinar la forma de la curva cuando se conectan por medio de $v = dx/dt$; es decir, la pendiente del diagrama x-t es igual a la velocidad.

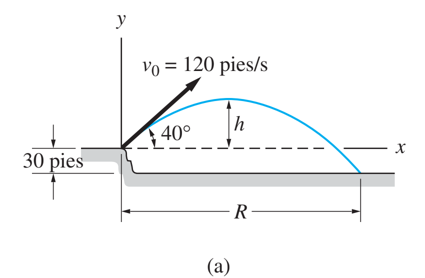
Parte 2

Después de que se han construido los diagramas en las figuras (d), (e) y (f), es sencillo determinar a, v o x en un tiempo dado. En particular, de las figuras (e) y (f) es claro que

$$v_5 = 12 \text{ m/s} \quad \text{y} \quad x_5 = 41.3 \text{ m} \qquad \textit{Respuesta}$$

Problema de ejemplo 12.15

Una pelota de golf se lanza desde una colina a 30 pies de la calle. En la figura (a) se muestra el vector velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ de la pelota. 1. Construya los diagramas de aceleración, velocidad y posición con el método de áreas. 2. Determine la altura máxima h de la pelota respecto a la colina, al alcance R y al vector velocidad de la pelota cuando golpea en el piso. Desprecie la resistencia del aire.



(a)

Solución

Comentarios introductorios

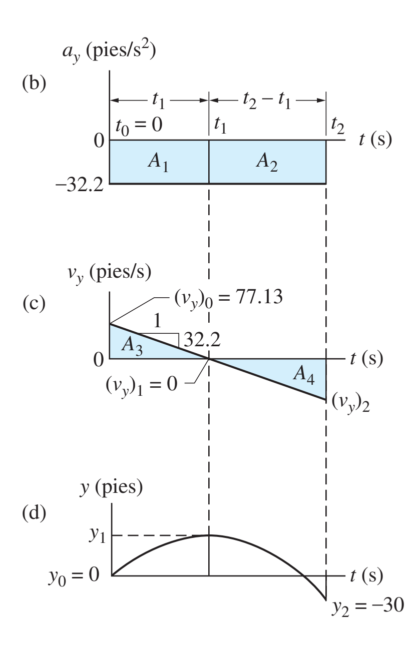
Ya que se desprecia la resistencia del aire, entonces la única fuerza que actúa sobre la pelota es su peso. Por tanto, $a_y = -g = -32.2$ pies/s^2 y $a_x = 0$. Como los movimientos en las direcciones x y y están desacoplados, es conveniente considerar el

movimiento curvilíneo de la pelota como una superposición vectorial de los movimientos en las direcciones x y y (véase el apartado 12.5). Por tanto, existirán dos conjuntos de diagramas, un conjunto para la dirección vertical y otro para la horizontal.

Para una referencia futura se presentan los siguientes tiempos: $t_0 = 0$, cuando se golpea la pelota; t_1 cuando ésta alcanza su altura máxima, y t_2 cuando cae en la calle. Además, los subíndices 0, 1 y 2 se emplean para indicar los valores de x, y, v_x y v_y en dichos tiempos.

De la figura (a) se tienen las siguientes cinco condiciones impuestas sobre el movimiento:

1. $x_0 = 0$
2. $y_0 = 0$
3. $y_2 = -30$ pies
4. $(v_y)_0 = 120 \text{ sen} 40^{\circ} = 77.13$ pies/s
5. $(v_x)_0 = 120 \cos 40^{\circ} = 91.93$ pies/s



Parte 1

Movimiento en la dirección y En la figura (b) se muestra el diagrama a_y-t, donde a_y es igual al valor constante -32.2 pies/s^2.

De $a_y = dv_y/dt$, se concluye que el diagrama v_y-t es una línea recta con una pendiente igual a -32.2 pies/s^2, como se muestra en la figura (c). El valor inicial de este diagrama es $(v_y)_0 = 77.13$ pies/s. Observe que $(v_y)_1 = 0$ porque t_1 representa el tiempo en que la pelota alcanza su altura máxima.

Como $v_y = dy/dt$, se deduce que el diagrama y-t es una parábola como la que se muestra en la figura (d). De las condiciones dadas se sabe que $y_0 = 0$ y $y_2 = -30$ pies. Note que esta curva es suave, porque no hay discontinuidades en el diagrama v_y-t.

Al aplicar el método de áreas a los diagramas de las figuras (b), (c) y (d), se encuentran las siguientes ecuaciones.

$(v_y)_1 = (v_y)_0 + A_1$	$0 = 77.13 - 32.2t_1$	(a)
$(v_y)_2 = (v_y)_1 + A_2$	$(v_y)_2 = 0 - 32.2(t_2 - t_1)$	(b)
$y_1 = y_0 + A_3$	$y_1 = 0 + \frac{1}{2}(77.13)t_1$	(c)
$y_2 = y_1 + A_4$	$-30 = y_1 - \frac{1}{2}(32.2)(t_2 - t_1)^2$	(d)

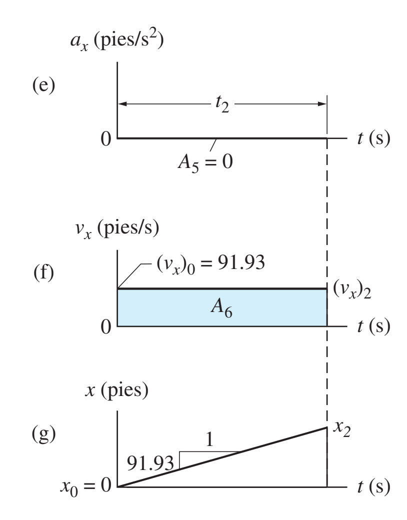
Cuando se resuelven las ecuaciones de la (a) a la (d) para las cuatro incógnitas, se encuentra $t_1 = 2.395$ s, $t_2 = 5.152$ s, $(v_y)_2 = -88.78$ pies/s y $y_1 = 92.37$ pies.

Movimiento en la dirección x En la figura (e) se muestra el diagrama a_x-t, con $a_x = 0$. De $a_x = dv_x/dt$, se concluye que el diagrama v_x-t de la figura (f) es una línea recta horizontal con el valor inicial $(v_x)_0 = 91.93$ pies/s. Al utilizar $v_x = dx/dt$, se encuentra que el diagrama x-t que se muestra en la figura (g) es una línea recta inclinada con pendiente 91.93 pies/s.

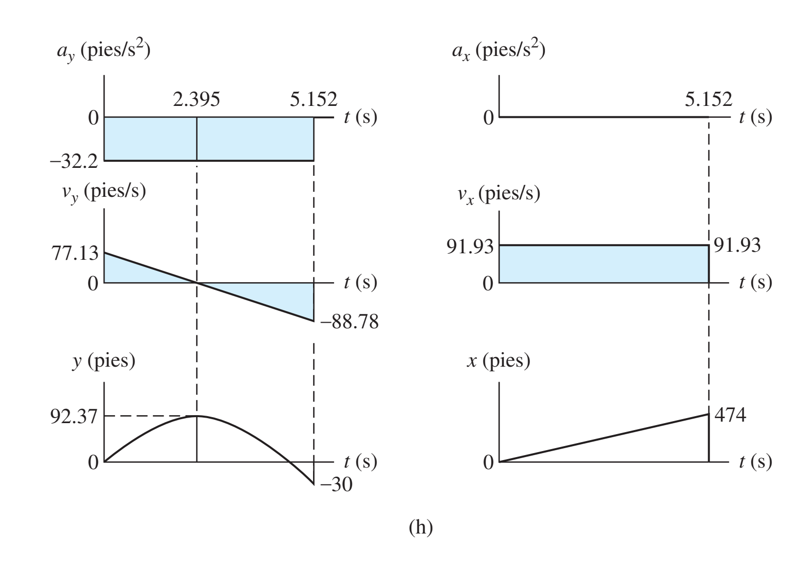
Las siguientes ecuaciones se obtienen al aplicar el método de áreas a los diagramas de las figuras (e) y (f).

$(v_x)_2 = (v_x)_0 + A_5$	$(v_x)_2 = 91.93 + 0$	(e)
$x_2 = x_0 + A_6$	$x_2 = 0 + 91.93t_2$	(f)

La ecuación (e) da $(v_x)_2 = 91.93$ pies/s. Al sustituir $t_2 = 5.152$ s en la ecuación (f) se obtiene $x_2 = 474$ pies.



En la figura (h) se muestran los diagramas finales.



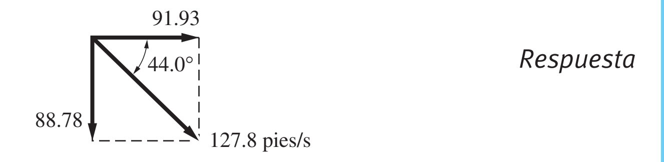
(h)

Parte 2

De los diagramas de posición de la figura (h) se encuentra que

$$h = 92.37 \text{ pies} \qquad \text{y} \qquad R = 474 \text{ pies}$$ *Respuesta*

De acuerdo con el diagrama de velocidad de la figura (h), el vector velocidad de la pelota al impactar el piso es



Respuesta

Problemas

Resuelva los siguientes problemas utilizando el método de áreas. Dibuje los diagramas de aceleración, velocidad y posición para cada problema.

12.87 La figura muestra el diagrama de aceleración para un tren que viaja en línea recta, entre dos estaciones. Dibuje los diagramas de aceleración, velocidad y posición para el tren. ¿Cuál es la distancia entre ambas estaciones?

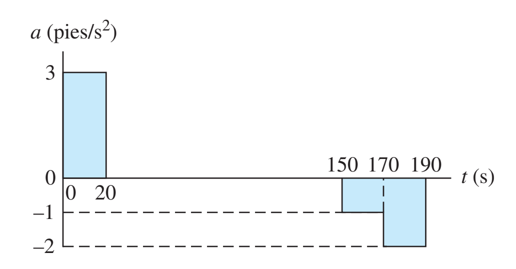


Fig. P12.87

12.88 Un cohete de 2000 kg se lanza verticalmente desde la superficie terrestre. El motor genera una fuerza propulsora constante de 60 kN durante 20 segundos y después se apaga. Determine la altura del cohete al final de la etapa de potencia del vuelo. Desprecie el cambio en g con la altura y considere que el cohete tiene masa constante.

12.89 El jugador de voleibol sirve la pelota en el punto A con rapidez v_0 a un ángulo $\theta = 70^o$. ¿Cuál es la mayor v_0 en que la pelota no golpeará el techo?

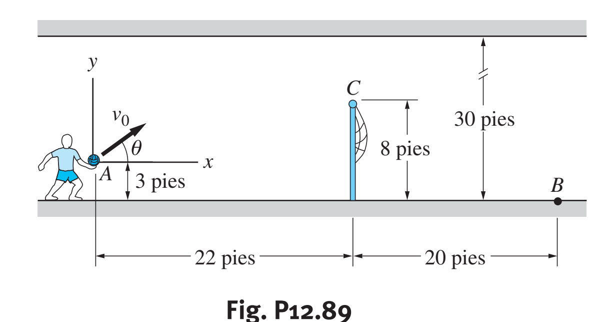


Fig. P12.89

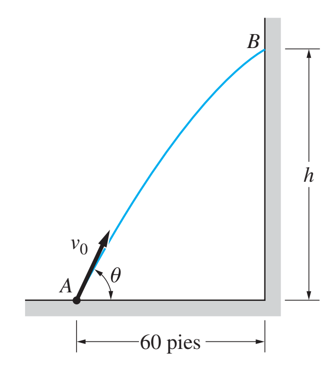


Fig. P12.90

12.90 Un proyectil se lanza en A con velocidad $v_0 = 70$ pies/s a un ángulo $\theta = 65^o$. Encuentre la altura h del punto B de impacto sobre la pared vertical. Desprecie la resistencia del aire.

12.91 Un misil se lanza horizontalmente en A con rapidez $v_0 = 200$ m/s. Si se sabe que el alcance del misil es $R = 1400$ m, calcule la altura h de lanzamiento y el tiempo de vuelo.

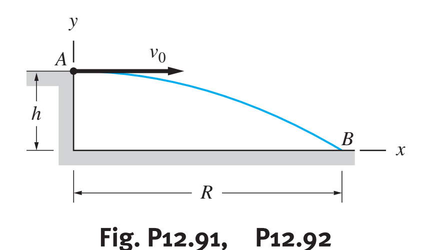


Fig. P12.91, P12.92

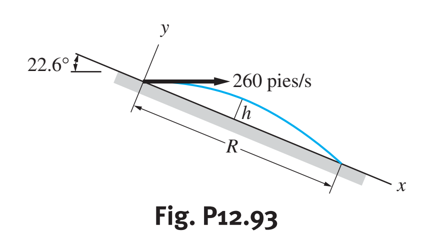


Fig. P12.93

12.92 Un proyectil se lanza horizontalmente en *A* con rapidez v_0. El tiempo de vuelo es 10 s y su trayectoria en *B* está inclinada 20° con la horizontal. Determine v_0, el alcance *R* y la altura *h* de lanzamiento. Utilice unidades del sistema inglés.

12.93 Un proyectil se lanza horizontalmente a 260 pies/s hacia abajo del plano inclinado. Dibuje los diagramas de aceleración, velocidad y posición. Utilícelos para obtener la máxima altura *h* perpendicular al plano, el alcance *R* sobre el plano y el tiempo de vuelo. Desprecie la resistencia del aire.

12.94 Un proyectil se lanza hacia un objetivo elevado con rapidez inicial v_0 = 220 m/s en la dirección que se muestra. Determine el tiempo de vuelo y el alcance *R*.

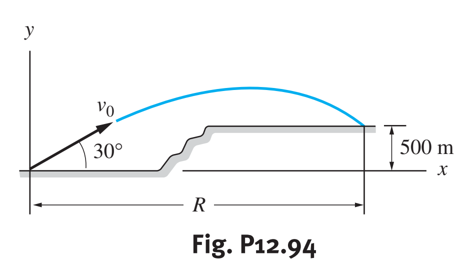


Fig. P12.94

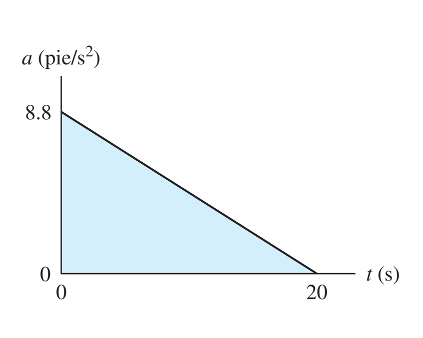


Fig. P12.95

12.95 Un automóvil que inicialmente está en reposo acelera sobre una recta, de acuerdo con el diagrama que se muestra. Determine: (a) la máxima rapidez y (b) la distancia que ha viajado el automóvil cuando alcanza la máxima rapidez.

12.96 Un tren suburbano se detiene en dos estaciones que se encuentran a 2 millas de separación. La aceleración máxima y la desaceleración máxima del tren son 6.6 pies/s^2 y 5.5 pies/s^2, respectivamente, y la rapidez máxima permitida es 45 mi/h. Encuentre el tiempo de viaje más breve posible entre ambas estaciones.

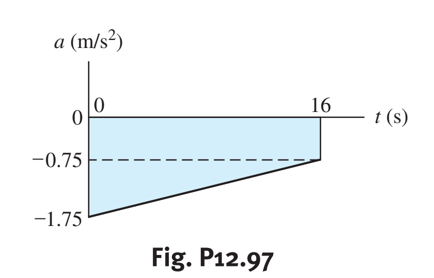


Fig. P12.97

12.97 Un tren frena de emergencia y se detiene en 16 segundos, la desaceleración se muestra en el diagrama. Calcule la rapidez del tren antes de frenar y la distancia de frenado.

12.98 Un avión aterriza con una rapidez de 40 m/s. Durante los primeros tres segundos de contacto con la pista, el efecto inversor de las hélices causa una desaceleración de 3.2 m/s^2. Durante los siguientes cinco segundos, se aplican los frenos en las ruedas, con lo que se produce una desaceleración adicional de 1.8 m/s^2. Entonces se apagan los inversores de las hélices y el avión se detiene sólo con los frenos en las llantas. Dibuje los diagramas de aceleración, velocidad y posición. ¿Qué tanto viaja el avión sobre la pista antes de detenerse?

Fig. P12.99

12.99 Una partícula, en reposo cuando $t = 0$, sufre la aceleración periódica que se muestra. Determine la velocidad y la distancia recorrida cuando (a) $t = 3t_0$ y (b) $t = 3.5t_0$.

12.100 El bloque de 8 lb está en reposo sobre una superficie rugosa cuando $t = 0$. Para $t > 0$, se aplica al bloque la fuerza horizontal periódica $P(t)$ con amplitud P_0. Observe que el periodo de $P(t)$ es 0.5 s. (a) Calcule el valor de P_0 para el cual la

aceleración promedio durante cada periodo es cero. (b) ¿Cuál es la rapidez promedio durante cada periodo del inciso (a)?

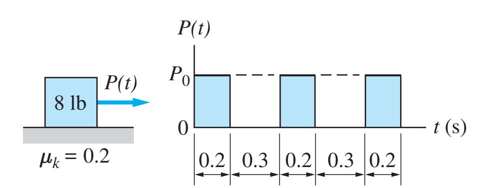


Fig. P12.100, P12.101

12.101 La amplitud de la fuerza periódica que se aplica al bloque de 8 lb es $P_0 = 6$ lb. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la superficie horizontal es 0.2. Si la velocidad del bloque en $t = 0$ fue de 2 pies/s hacia la derecha, determine: (a) la velocidad del bloque en $t = 0.7$ s y (b) el desplazamiento del bloque de $t = 0$ a 0.7 s.

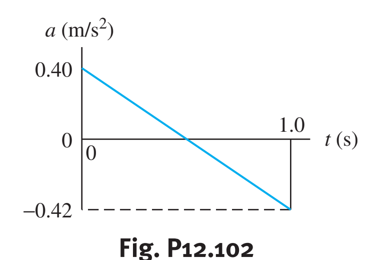


Fig. P12.102

12.102 Un automóvil en movimiento golpea un pequeño tope. La figura muestra la aceleración vertical resultante del automóvil para el primer segundo después del golpe. Dibuje los diagramas de velocidad y posición para el movimiento vertical. Determine la velocidad vertical máxima y el desplazamiento vertical máximo del automóvil durante el periodo de 1.0 s.

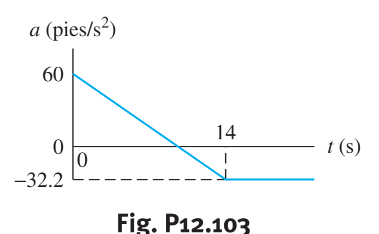


Fig. P12.103

12.103 Un cohete se dispara verticalmente desde la superficie terrestre. El motor se enciende durante 14 s, con lo que resulta la aceleración que se muestra en el diagrama. Calcule la rapidez máxima, la altura máxima y el tiempo en que esta última ocurre.

Repaso de ecuaciones

Cinemática en coordenadas rectangulares

$$v_x = \dot{x} \quad v_y = \dot{y} \quad v_z = \dot{z}$$
$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x} \quad a_y = \dot{v}_y = \ddot{y} \quad a_z = \dot{v}_z = \ddot{z}$$

Movimiento rectilíneo

$$v = \dot{x} \quad a = \dot{v} = \ddot{x} = v\frac{dv}{dx}$$

La integración directa de las ecuaciones del movimiento es posible en los siguientes casos:

$$\text{Si } a = f(t) : dv = a(t)dt$$
$$\text{Si } a = f(x) : v\,dv = a(x)dx$$
$$\text{Si } a = f(v) : dx = \frac{v\,dv}{a(v)} \quad dt = \frac{dv}{a(v)}$$

Método fuerza-masa-aceleración

$$\Sigma F_x = ma_x \quad \Sigma F_y = ma_y \quad \Sigma F_z = ma_z$$

Problemas de repaso

12.104 Una partícula se mueve sobre el eje x con la velocidad $v = 2x^3 - 8x^2 + 12x$ mm/s, donde x se mide en milímetros. Encuentre la aceleración de la partícula cuando $x = 2$ mm.

12.105 Un objeto efectúa movimiento rectilíneo. Durante un periodo de seis segundos, la velocidad del objeto cambia de v_0 a 16 pies/s, mientras que su aceleración se incrementa de manera uniforme de 0 a 8 pies/s^2. Determine v_0.

12.106 Dos automóviles A y B viajan en la misma dirección sobre una autopista recta. En cierto instante, el automóvil A está 400 pies detrás del B, donde sus respectivas velocidades son 30 pies/s para A y 60 pies/s para B. En el mismo instante, el automóvil A acelera a razón constante de 4 pies/s^2, mientras que el B desacelera a una razón de 2 pies/s^2. ¿Qué distancia le tomará al A rebasar al B?

12.107 La coordenada de posición de un objeto que se mueve sobre el eje x está dada por $x = 3t^3 - 9t + 4$ pulg, donde el tiempo t se mide en segundos. Para el intervalo de tiempo de $t = 0$ a $t = 2$ s, determine: (a) el desplazamiento del objeto y (b) la distancia total recorrida.

12.108 Un niño deja caer una piedra en un pozo y cuatro segundos después escucha el golpe en el agua. Desprecie la resistencia del aire y calcule la profundidad del pozo. La rapidez del sonido es 1120 pies/s.

12.109 Una partícula que se mueve sobre el eje x arranca del reposo en $t = 0$ con la aceleración $a = 12t - 6t^2$ pies/s^2, donde t se mide en segundos. Para el intervalo de tiempo de $t = 0$ a $t = 5$ s, determine: (a) el desplazamiento de la partícula y (b) la distancia total recorrida.

12.110 Durante el frenado, la rapidez de un automóvil que viaja en una autopista recta varía como $v = 16 - (x/4)$ m/s, donde x (en metros) es la distancia recorrida después de la aplicación de los frenos. Obtenga la aceleración del automóvil como una función de x.

12.111 Para el automóvil descrito en el problema 12.110, determine x como una función del tiempo t (segundos). Suponga que el frenado inicia en $t = 0$.

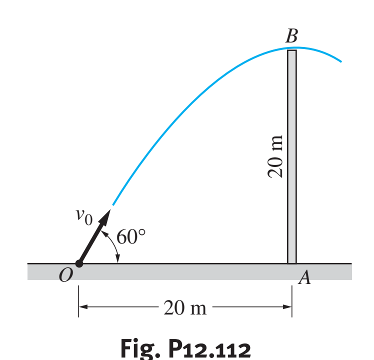


Fig. P12.112

12.112 El proyectil se lanza en O con velocidad v_0 inclinado 60° respecto a la horizontal. Determine el valor más pequeño de v_0 para el cual el proyectil evitará la pared AB. Desprecie la resistencia del aire.

Fig. P12.113

12.113 En el instante que se muestra, la caja de 15 lb se desliza sobre un plano horizontal con una velocidad de 2 pies/s hacia la izquierda. Encuentre la fuerza P que dará al bloque una aceleración de 30 pies/s^2 hacia la derecha, en ese instante. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y el plano es 0.2.

12.114 Un cohete de 1400 kg se lanza verticalmente desde la superficie de la Tierra. Durante el encendido de 20 segundos, la fuerza propulsora F del motor varía con el tiempo, como se muestra en la gráfica. Suponga que la aceleración gravitacio-

nal y la masa del cohete son constantes y determine la elevación del cohete al final del encendido.

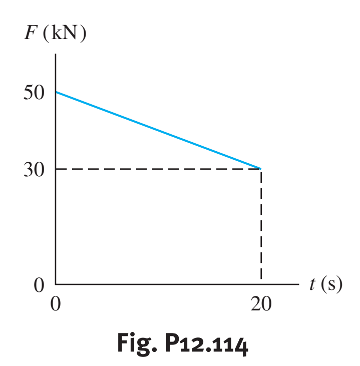


Fig. P12.114

12.115 Una masa de 0.2 kg se mueve sobre el eje x. La resultante de todas las fuerzas actúa sobre la masa $\mathbf{F} = -1.6e^{4x}\mathbf{i}$ N, donde x está en metros. Si se sabe que $\mathbf{v} = 6\mathbf{i}$ m/s cuando $x = 0$, determine x cuando $v = 0$.

12.116 Un paquete de 10 kg se deja caer desde una altura sin velocidad inicial. Durante la caída, la fuerza de arrastre aerodinámico que actúa sobre el paquete es $F_D = kv$, donde k es una constante y v es la velocidad. Si la velocidad terminal del paquete es 60 m/s, determine: (a) el valor de k y (b) el tiempo en que la velocidad del paquete alcanza 59 m/s.

12.117 Se lanza una pelota hacia abajo a una pendiente de 20°, como se muestra. Obtenga la velocidad inicial v_0 dado que $\theta_0 = 25°$ y $R = 220$ pies. Desprecie la resistencia del aire.

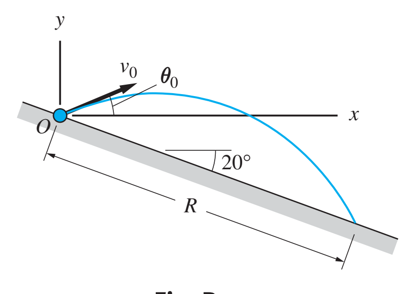


Fig. P12.117

12.118 La longitud libre del resorte que está unido al deslizador A de 0.4 lb es de 4 pulg. Si el deslizador se suelta a partir del reposo cuando $x = 8$ pulg, calcule su aceleración inicial. Desprecie la fricción.

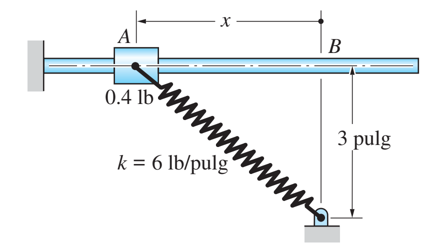


Fig. P12.118

12.119 Una partícula sigue la trayectoria que se muestra en la figura. La descripción del movimiento es $x = b \text{ sen}(\omega t)$ $y = b \exp(-\omega t/2)$, donde b y ω son constantes. Determine la magnitud de la aceleración en: (a) el punto A y (b) el punto B.

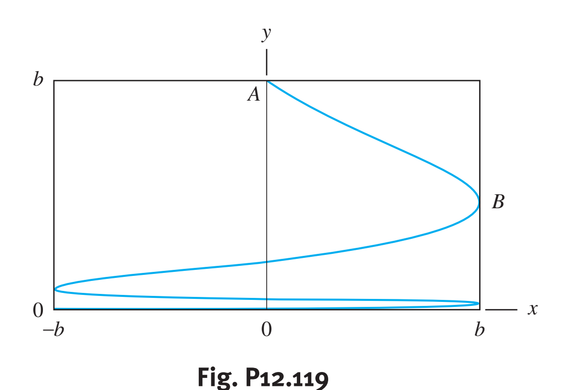


Fig. P12.119

12.120 La cuerda ABC está unida al bloque de 80 lb. Una fuerza vertical constante de 20 lb se aplica en el extremo de la cuerda. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y el plano es 0.2. Si el bloque tiene una velocidad de 5 pies/s hacia la izquierda cuando $x = 6$ pies, determine su aceleración en esa posición.

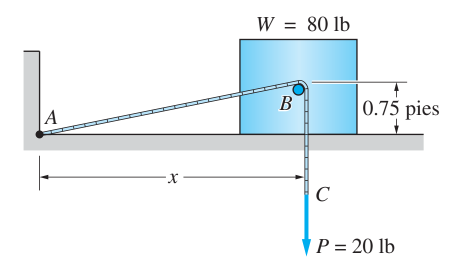


Fig. P12.120

12.121 Una pelota de golf es golpeada desde una elevación de 8 m sobre el nivel de la calle. La velocidad inicial de la pelota es de 45 m/s a un ángulo de 40° respecto a la horizontal. Determine: (a) la distancia horizontal recorrida por la pelota y (b) la rapidez de la pelota cuando cae al césped. Desprecie la resistencia del aire.

12.122 La masa m se suelta a partir del reposo sobre un resorte no deformado de rigidez k. Obtenga las expresiones para: (a) la fuerza máxima en el resorte y (b) la máxima velocidad de la masa.

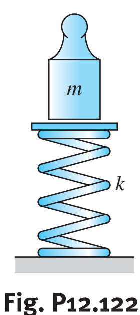
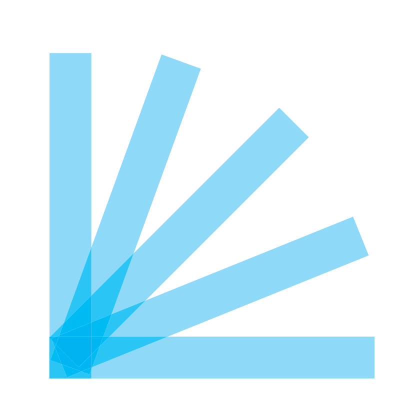


Fig. P12.122

13



Dinámica de una partícula: coordenadas curvilíneas



La aceleración de un automóvil que se mueve por un camino recto está determinada por la razón de cambio de la rapidez. Sobre un camino curvo, la aceleración también depende de la razón de cambio de la dirección de la velocidad. Esto está ilustrado en el problema 13.1. (David De Lossy/Photodisc/Getty Images)

13.1 Introducción

En la introducción del capítulo 12 se mencionó que con frecuencia las coordenadas curvilíneas facilitan (respecto a las rectangulares) la descripción del movimiento de una partícula. En este capítulo se estudian dos de esos sistemas de coordenadas: de trayectoria y polares. También se consideran las cilíndricas, que son coordenadas polares más la coordenada axial z.

Las *coordenadas de trayectoria*, que también se conocen como *coordenadas normal-tangencial* (n-t), describen el movimiento de una partícula en términos de componentes que son normales y tangentes a su trayectoria. Ésta es una forma muy natural y conveniente de describir el movimiento curvilíneo si la trayectoria se conoce de antemano (un ejemplo es el movimiento de un automóvil sobre cierto camino curvo).

Las *coordenadas polares* (R-θ) son útiles si el movimiento o las fuerzas que lo controlan se especifican en términos de la distancia radial desde un punto fijo y el ángulo polar θ. Por ejemplo, el movimiento orbital de un satélite se describe mejor con coordenadas polares porque la fuerza gravitacional que actúa sobre el satélite depende de la distancia R desde el centro de la Tierra.

Este capítulo está dividido en dos partes. La primera, que constituye la mayor parte del mismo, está dedicada a la cinemática. Como esta última es mucho más complicada en lo referente a las coordenadas curvilíneas que en cuanto a las rectangulares, es el tema más importante. La otra parte, cinética de una partícula, no difiere significativamente de lo que se presentó en el capítulo anterior.

13.2 Cinemática: coordenadas de trayectoria (normal-tangencial)

a. Movimiento en un plano

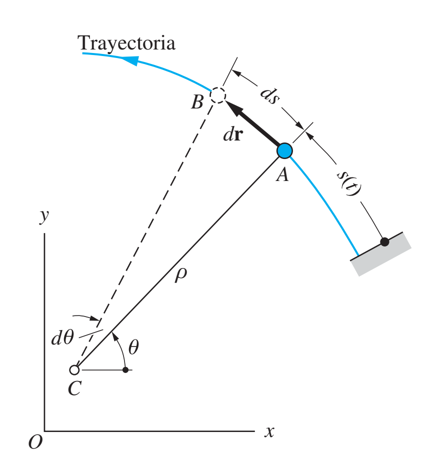


Fig. 13.1

1. *Preliminares geométricos* La figura 13.1 muestra la trayectoria de una partícula que se mueve en el plano xy. La posición de la partícula está especificada por la *coordenada de trayectoria s*, que es la distancia que se mide sobre la curva desde un punto de referencia fijo. Conforme la partícula se mueve de A a B durante un intervalo de tiempo infinitesimal dt, traza un arco de radio ρ y longitud infinitesimal ds. El desplazamiento correspondiente de la partícula es $d\mathbf{r}$, en donde $|d\mathbf{r}| = ds$. De la figura 13.1 se obtiene la útil relación $ds = \rho\, d\theta$ o al dividir entre dt,

$$\dot{s} = \rho\dot{\theta} \tag{13.1}$$

en donde el ángulo θ se mide en radianes.

El radio ρ es el *radio de curvatura* de la trayectoria en A. Si se conoce la ecuación de la curva, su radio de curvatura puede calcularse con la expresión

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\left|\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|} = \frac{\left[1 + \left(\dfrac{dx}{dy}\right)^2\right]^{3/2}}{\left|\dfrac{d^2x}{dy^2}\right|}$$

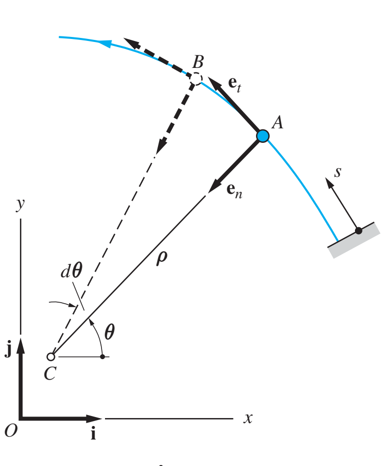


Fig. 13.2

Observe que ni x ni y pueden tomarse como la variable independiente. El inverso de ρ, es decir, $1/\rho$, se conoce como la *curvatura* de la trayectoria.

En la figura 13.2 se muestran los *vectores base* $\mathbf{e}_n$ y $\mathbf{e}_t$ asociados con el punto A sobre la trayectoria. Al igual que los vectores $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ del sistema de coordenadas rectangular, $\mathbf{e}_n$ y $\mathbf{e}_t$ son mutuamente perpendiculares, de magnitud unitaria, y sirven como base para los vectores de velocidad y aceleración. Sin embargo, las direcciones de $\mathbf{e}_n$ y $\mathbf{e}_t$ no son fijas, porque dependen de la ubicación A de la partícula: $\mathbf{e}_t$ es tangente a la curva en A y apunta en la dirección de crecimiento de s, mientras que $\mathbf{e}_n$ es normal para la trayectoria y se dirige hacia el *centro de la curvatura C*. La figura 13.2 también muestra cómo los vectores base cambian de dirección conforme la partícula se mueve del punto A al B. Es una costumbre utilizar los nombres *normal unitaria* y *tangente unitaria* para $\mathbf{e}_n$ y $\mathbf{e}_t$, respectivamente.

A partir de las figuras 13.1 y 13.2 es posible deducir otra ecuación útil. Observe que $d\mathbf{r}$ es tangente a la curva en A y tiene magnitud ds, así $d\mathbf{r} = \mathbf{e}_t\, ds$. Entonces,

$$\mathbf{e}_t = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \tag{13.2}$$

2. *Derivadas de los vectores base* Como las direcciones de $\mathbf{e}_n$ y $\mathbf{e}_t$ varían con la posición de la partícula, sus derivadas temporales no son cero. Para obtener las derivadas, primero se expresan los vectores base en términos de las componentes rectangulares. De la figura 13.3 se tiene que

$$\mathbf{e}_t = -\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j} \qquad \mathbf{e}_n = -\cos\theta\,\mathbf{i} - \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j} \tag{13.3}$$

Al derivar respecto al tiempo y recordar que $d\mathbf{i}/dt = d\mathbf{j}/dt = \mathbf{0}$, se obtienen

$$\dot{\mathbf{e}}_t = (-\cos\theta\,\mathbf{i} - \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j})\dot{\theta} \qquad \dot{\mathbf{e}}_n = (\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{i} - \cos\theta\,\mathbf{j})\dot{\theta}$$

Si se compara con la ecuación (13.3) se tiene

$$\dot{\mathbf{e}}_t = \dot{\theta}\mathbf{e}_n \qquad \dot{\mathbf{e}}_n = -\dot{\theta}\mathbf{e}_t \tag{13.4}$$

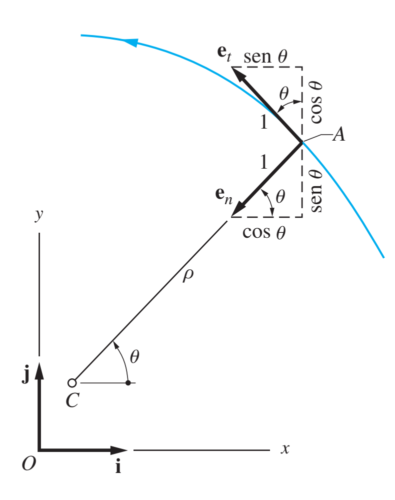


Fig. 13.3

En la figura 13.4 se muestran los vectores base y sus derivadas. Observe que cada vector base y su derivada son mutuamente perpendiculares, lo que refleja el hecho de que sólo cambian las direcciones de los vectores (un cambio en la magnitud de un vector sería paralelo al mismo).

3. *Velocidad y aceleración* Se inicia con la definición de velocidad: $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$, donde $\mathbf{r}$ es el vector de posición de la partícula. Utilizando la regla de la cadena del cálculo y la ecuación (13.2), se puede escribir $\mathbf{v} = (d\mathbf{r}/ds)(ds/dt) = \mathbf{e}_t(ds/dt)$ o bien

$$\mathbf{v} = v\mathbf{e}_t \tag{13.5}$$

donde a la magnitud de la velocidad

$$v = \dot{s} \tag{13.6}$$

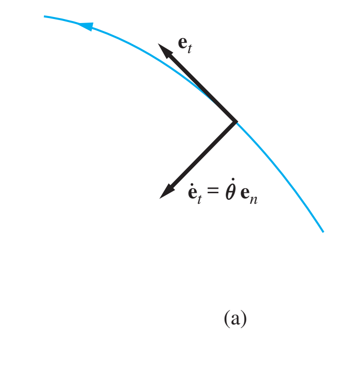
se le llama *rapidez*. La ecuación (13.5) muestra que la velocidad siempre es tangente a la trayectoria (en la dirección de la tangente unitaria $\mathbf{e}_t$).

La aceleración de la partícula se obtiene derivando la velocidad con la ayuda de las ecuaciones (13.4):

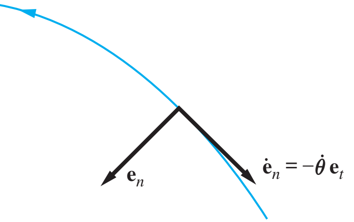
$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\mathbf{e}_t) = \dot{v}\mathbf{e}_t + v\dot{\mathbf{e}}_t = \dot{v}\mathbf{e}_t + v\dot{\theta}\mathbf{e}_n$$

En el último término se puede eliminar $\dot{\theta}$, por medio de la sustitución $\dot{\theta} = \dot{s}/\rho = v/\rho$, que se obtiene de la ecuación (13.1). El resultado es

$$\mathbf{a} = a_t\mathbf{e}_t + a_n\mathbf{e}_n \tag{13.7}$$



(a)



(b)

Fig. 13.4

donde las componentes normal y tangencial de la aceleración son

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} \qquad a_t = \dot{v} \tag{13.8}$$

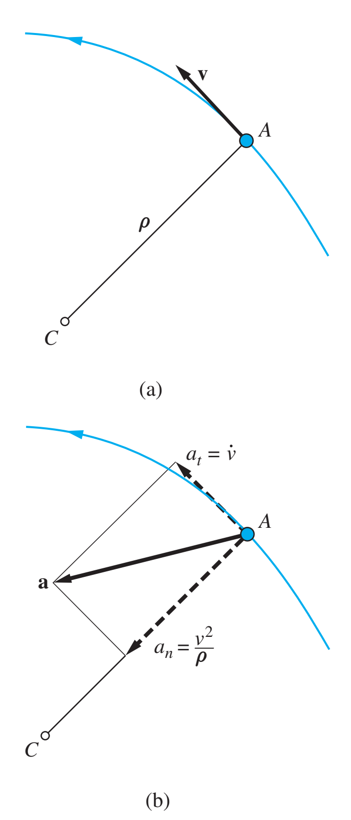


Fig. 13.5

Algunas veces es una ventaja eliminar el tiempo de la expresión para a_t. Empleando la regla de la cadena del cálculo, se escribe $a_t = dv/dt = (dv/ds) \times (ds/dt)$ o bien

$$a_t = v\frac{dv}{ds} \tag{13.9}$$

La ecuación (13.9) es similar a $a = v\ dv/ds$, que surge en el movimiento rectilíneo. Pero observe que, en éste, a es la magnitud de la aceleración, mientras que en la ecuación (13.9) a_t se refiere a la magnitud de la componente tangencial de la aceleración.

En la figura 13.5 se muestran los vectores velocidad y aceleración. Es evidente que a_t es causada por un *cambio en la rapidez* de la partícula. Si la rapidez se incrementa, entonces $\mathbf{a}_t$ tiene la misma dirección que la velocidad; si la rapidez disminuye, $\mathbf{a}_t$ y la velocidad tienen direcciones opuestas. Si la rapidez es constante, entonces $a_t = 0$.

La componente normal a_n, que algunas veces se llama *aceleración centrípeta*, se debe a un *cambio en la dirección* de la velocidad. Observe que $\mathbf{a}_n$ siempre está dirigida hacia el centro de la curvatura de la trayectoria. Si la trayectoria es una línea recta ($1/\rho = 0$), entonces $a_n = 0$.



Precaución No confunda las siguientes tres ecuaciones:

- $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$: la definición de aceleración
- $a = dv/dt$: la magnitud de la aceleración en el movimiento rectilíneo
- $a_t = dv/dt$: la componente tangencial de la aceleración en el movimiento curvilíneo plano.

La confusión puede evitarse con el empleo meticuloso de la notación: siempre incluya subíndices y utilice una notación diferente para escalares y vectores.

4. *Movimiento sobre una trayectoria circular* El caso especial de una trayectoria circular desempeña un importante papel en dinámica, particularmente en la cinemática de cuerpos rígidos. Si el radio de la trayectoria es R, como se muestra en la figura 13.6, entonces la ecuación (13.1) se convierte en $\dot{s} = R\dot{\theta}$ (observe que $\rho = R$, una constante) o bien

$$v = R\dot{\theta} \tag{13.10}$$

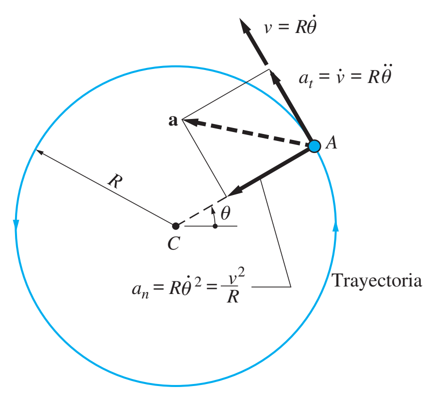


Fig. 13.6

Al sustituir en las ecuaciones (13.8), se obtiene

$$a_n = \frac{v^2}{R} = R\dot{\theta}^2 \qquad a_t = \dot{v} = R\ddot{\theta} \tag{13.11}$$

donde $\dot{\theta}$ y $\ddot{\theta}$ son conocidas como la *velocidad angular* y *aceleración angular* de la recta AC, respectivamente.

La figura 13.7 muestra cómo cambia la dirección del vector aceleración conforme una partícula se mueve alrededor del círculo, en sentido contrario a las manecillas del reloj. Como ya se indicó, la velocidad siempre es tangente a la trayectoria, como se muestra en la figura 13.7(a). En la figura 13.7(b), se supone que la rapidez se está incrementando, así que $\dot{v}$ es positiva. Por tanto, a_t también es positiva, lo que significa que $\mathbf{a}_t$ apunta en la misma dirección que $\mathbf{v}$. Como siempre, $\mathbf{a}_n$ está dirigida hacia el centro del círculo.

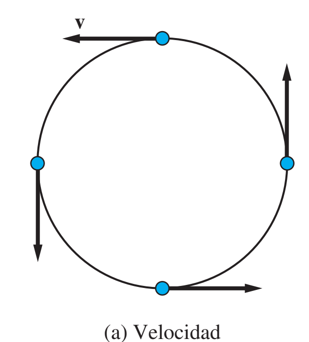
Si la rapidez disminuye, como en la figura 13.7(c), $\dot{v}$ es negativa. Como ahora a_t también es negativa, $\mathbf{a}_t$ y $\mathbf{v}$ tienen direcciones opuestas. Pero $\mathbf{a}_n$ continúa apuntando hacia el centro del círculo.

En la figura 13.7(d), la rapidez es constante, es decir, $\dot{v} = 0$. En consecuencia, $a_t = 0$ y el vector aceleración está dirigido hacia el centro del círculo.

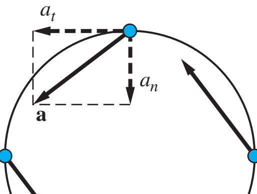
b. Movimiento espacial

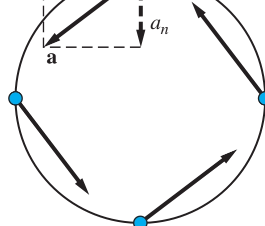
La descripción del movimiento tridimensional de una partícula mediante coordenadas de trayectoria requiere el conocimiento de la geometría de curvas en el espacio, lo que está más allá del alcance de este libro. Es posible demostrar que las ecuaciones de la (13.5) a la (13.9) para la velocidad y la aceleración también son válidas para el movimiento tridimensional.* Sin embargo, en el movimiento espacial el "plano" del movimiento cambia continuamente con la posición de la partícula.

La figura 13.8 muestra una partícula que está en un punto A en el tiempo t. El vector unitario tangente es $\mathbf{e}_t = d\mathbf{r}/ds$ y la normal unitaria (llamada *normal principal*) es $\mathbf{e}_n = \rho\, d^2\mathbf{r}/ds^2$, en donde $\rho = 1/|d^2\mathbf{r}/ds^2|$ es el radio de curvatura del arco ds. El tercer vector unitario $\mathbf{e}_b$, llamado *binormal*, usualmente se selecciona de modo que los tres vectores unitarios forman una tríada de mano derecha: $\mathbf{e}_b = \mathbf{e}_t \times \mathbf{e}_n$. El plano formado por $\mathbf{e}_t$ y $\mathbf{e}_n$ es el plano osculador (del latín *osculari*, "besar"). Para el movimiento bidimensional, el plano osculador está fijo en el espacio y es el plano del movimiento. En el movimiento tridimensional, la orientación del plano osculador cambia de manera continua conforme la partícula se mueve sobre la curva. Debido a las obvias complejidades geométricas, las coordenadas de trayectoria tienen un uso limitado en el movimiento tridimensional.

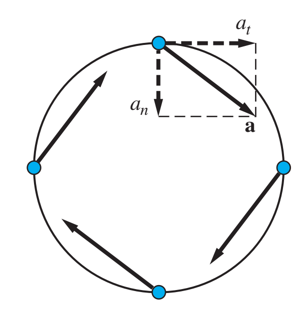


(a) Velocidad

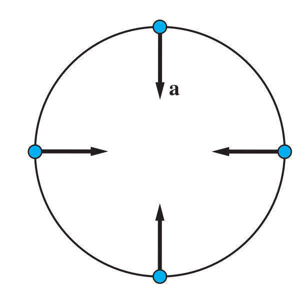




(b) Aceleración cuando la rapidez se incrementa



(c) Aceleración cuando la rapidez disminuye



(d) Aceleración para rapidez constante

Fig. 13.7

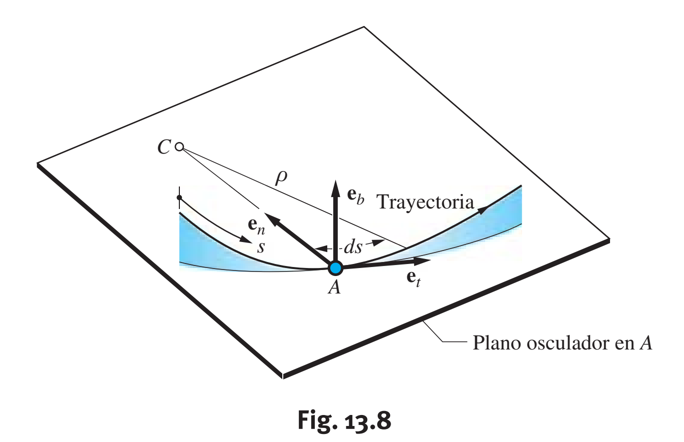
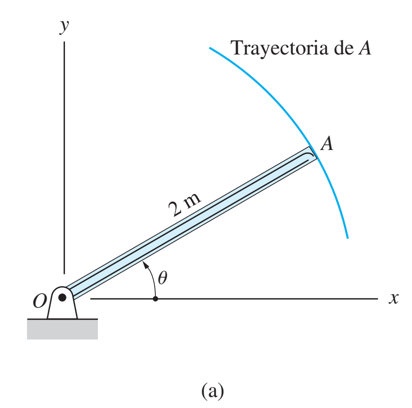


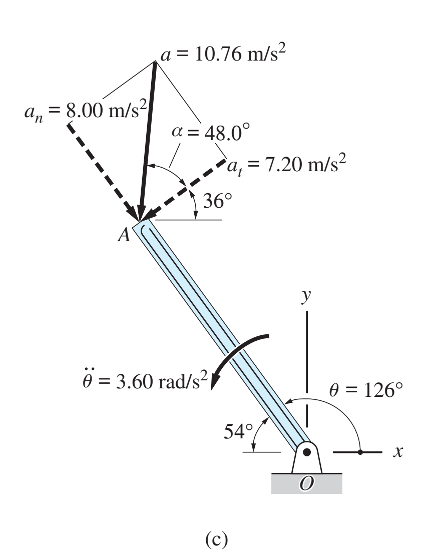
Fig. 13.8

*Véase Donald T. Greenwood, *Principles of Dynamics*, Prentice Hall, 1988.



(a)

(b)



(c)

Problema de ejemplo **13.1**

El ángulo entre la barra de 2 m que se muestra en la figura (a) y el eje x varía de acuerdo con $\theta(t) = 0.3t^3 - 1.6t + 3$ rad, en donde t es el tiempo en segundos. Cuando $t = 2$ s: 1. determine las magnitudes de los vectores velocidad y aceleración del extremo A, y 2. muestre los vectores velocidad y aceleración de A mediante un esquema de barra.

Solución

Parte 1

Es conveniente emplear componentes normal y tangencial porque la trayectoria de A es un círculo (centrado en O, de radio $R = 2$ m).

La velocidad y la aceleración angulares de la barra son $\dot{\theta} = 0.9t^2 - 1.6$ rad/s y $\ddot{\theta} = 1.8t$ rad/s^2. En $t = 2$ s se encuentra que

$$\dot{\theta}|_{t=2\,\text{s}} = 0.9(2)^2 - 1.6 = 2.00 \text{ rad/s}$$

$$\ddot{\theta}|_{t=2\,\text{s}} = 1.8(2) = 3.60 \text{ rad/s}^2$$

Como $\dot{\theta}$ y $\ddot{\theta}$ son positivas, sus direcciones coinciden con la dirección positiva para θ, es decir, contrario a las manecillas del reloj.

De la ecuación (13.10), la magnitud de la velocidad de A es

$$v = R\dot{\theta} = 2(2.00) = 4.00 \text{ m/s}$$ *Respuesta*

Las componentes normal y tangencial de la aceleración de A son, empleando las ecuaciones (13.11),

$$a_n = R\dot{\theta}^2 = 2(2.00)^2 = 8.00 \text{ m/s}^2$$

$$a_t = R\ddot{\theta} = 2(3.60) = 7.20 \text{ m/s}^2$$

Por tanto, la magnitud de la aceleración de A es

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = \sqrt{(8.00)^2 + (7.20)^2} = 10.76 \text{ m/s}^2$$ *Respuesta*

Parte 2

Al sustituir $t = 2$ s en la expresión para $\theta(t)$, se encuentra que la posición angular de la barra en $t = 2$ s es

$$\theta|_{t=2\,\text{s}} = 0.3(2)^3 - 1.6(2) + 3 = 2.20 \text{ rad} = 126°$$

En la figura (b) se muestra el vector velocidad del extremo A. La magnitud de **v** es 4.00 m/s, como se ha calculado en la parte 1, y el vector es tangente a la trayectoria circular, su dirección es consistente con la dirección de $\dot{\theta}$.

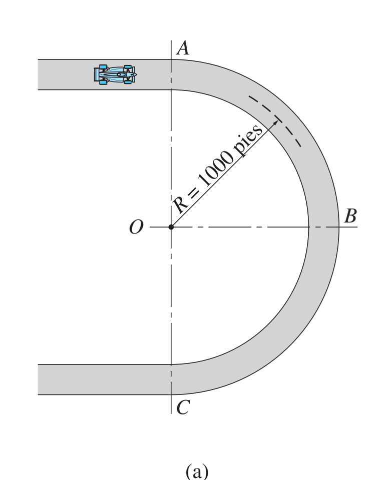
La figura (c) muestra las direcciones de las componentes normal y tangencial del vector aceleración como las que se han determinado en la parte 1. Observe que

$\mathbf{a}_n$ es normal para la trayectoria y dirigida hacia el punto O, el centro de la curva. La dirección de $\mathbf{a}_t$ es tangente a la trayectoria, consistente con la dirección para $\ddot{\theta}$. En la figura (c) también se muestra el vector aceleración de magnitud 10.76 m/s^2, en donde se encontró que el ángulo entre $\mathbf{a}$ y $\mathbf{a}_t$ es

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{a_n}{a_t} = \tan^{-1}\frac{8.00}{7.20} = 48.0^\circ$$

Problema de ejemplo 13.2

En la figura (a) el automóvil de carreras viaja a 90 mi/h cuando entra a la curva semicircular en A. El conductor aumenta la rapidez a una razón uniforme, al salir de la curva en C a 120 mi/h. Determine la magnitud de la aceleración cuando el automóvil está en B.



(a)

Solución

Ya que el automóvil sigue una ruta circular, es conveniente describir su movimiento empleando coordenadas de trayectoria. Como se muestra en la figura (b), sea s la distancia medida sobre la curva desde A hasta C.

La magnitud de la componente tangencial de la aceleración es *constante* entre A y C porque la rapidez aumenta a una razón uniforme. Por tanto, al integrar $a_t\,ds = v\,dv$ se obtiene

$$\frac{v^2}{2} = a_t s + C \tag{a}$$



en donde C es la constante de integración. Las dos constantes a_t y C pueden evaluarse al utilizar las siguientes dos condiciones sobre el movimiento:

1. En A: $s = 0$, $v = 132.0$ pies/s (90 mi/h)
2. En C: $s = \pi R = 1000\pi$ pies, $v = 176.0$ pies/s (120 mi/h)

Al sustituir la condición **1** en la ecuación (a), se encuentra

$$\frac{(132.0)^2}{2} = 0 + C$$

de lo cual la constante de integración es

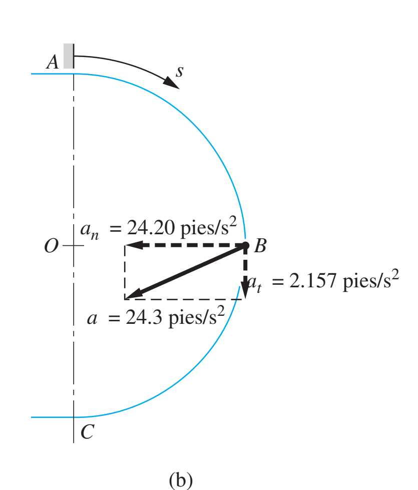
$$C = 8712\ (\text{pies/s})^2 \tag{b}$$

Al sustituir la condición 2 y el valor de C en la ecuación (a) resulta

$$\frac{(176.0)^2}{2} = a_t(1000\pi) + 8712$$

Si se despeja a_t se obtiene:

$$a_t = 2.157\text{pies/s}^2 \tag{c}$$



(b)

Como se muestra en la figura (b), la dirección de a_t es hacia abajo en B, es decir, en la dirección en la que aumenta la rapidez.

Al sustituir los valores de C y a_t en la ecuación (a), se encuentra que la relación entre la rapidez v y la distancia s es:

$$\frac{v^2}{2} = 2.157\,s + 8712 \tag{d}$$

Para calcular la rapidez del automóvil en B, se sustituye $s = \pi R/2 = 500\pi$ pies en la ecuación (d), resultando

$$\frac{v^2}{2} = 2.157(500\pi) + 8712$$

$$v = 155.56 \text{ pies/s}$$

De la ecuación (13.11), la componente normal de la aceleración en B es

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(155.56)^2}{1000} = 24.20 \text{ pies/s}^2$$

dirigida hacia el centro de curvatura de la trayectoria (punto O), como se indicó en la figura (b).

La magnitud del vector aceleración en B es

$$a = \sqrt{(24.20)^2 + (2.157)^2} = 24.3 \text{ pies/s}^2 \qquad \textit{Respuesta}$$

con la dirección indicada en la figura (b).

Problema de ejemplo **13.3**

$R_1 = 150$ mm $R_2 = 100$ mm v_C, a_C C A B

Una banda flexible corre alrededor de dos poleas de diferente radio. En el instante que se muestra, el punto C sobre la banda tiene una velocidad de 5 m/s y una aceleración de 50 m/s^2 en la dirección indicada en la figura. Calcule las magnitudes de las aceleraciones de los puntos A y B sobre la banda en este instante.

Solución

Suponiendo que la banda no se estira, se concluye lo siguiente:

1. Cada punto sobre la banda tiene la misma rapidez, es decir, $v_A = v_B = v_C = 5$ m/s.
2. La razón de cambio de la rapidez (dv/dt) de cada punto sobre la banda es la misma. Por tanto, $(a_A)_t = (a_B)_t = a_C = 50$ m/s^2.

Para el punto A

$$(a_A)_n = \frac{v_A^2}{R_1} = \frac{(5)^2}{0.150} = 166.67 \text{ m/s}^2$$

$$a_A = \sqrt{(a_A)_n^2 + (a_A)_t^2} = \sqrt{(166.67)^2 + (50)^2} = 174.0 \text{ m/s}^2 \qquad \textit{Respuesta}$$

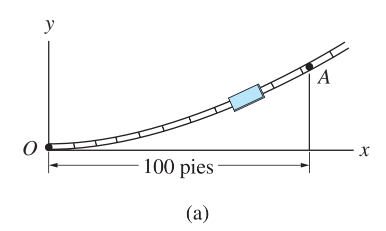
Para el punto B

$$(a_B)_n = \frac{v_B^2}{R_2} = \frac{(5)^2}{0.100} = 250.0 \text{ m/s}^2$$

$$a_B = \sqrt{(a_B)_n^2 + (a_B)_t^2} = \sqrt{(250.0)^2 + (50)^2} = 255 \text{ m/s}^2 \qquad \textit{Respuesta}$$

Problema de ejemplo **13.4**

El trolebús de la figura (a) viaja con rapidez constante de 40 mi/h sobre una ruta parabólica descrita por $y = x^2/500$, en donde x y y se miden en pies. Calcule la aceleración del trolebús cuando está en: 1. el punto O, y 2. el punto A.



(a)

Solución

Análisis preliminar

Debido a que la rapidez del trolebús es constante, la componente tangencial de su aceleración es cero en todos los puntos sobre su trayectoria. Por tanto, la aceleración sólo tiene la componente normal, dada por la ecuación (13.8):

$$|\mathbf{a}| = a_n = \frac{v^2}{\rho} \qquad \text{(a)}$$

donde ρ es el radio de curvatura de la trayectoria en el punto de interés. Recuerde que a_n está dirigida hacia el centro de curvatura de la ruta.

El radio de curvatura en cualquier punto con coordenadas x y y puede calcularse mediante

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)} \qquad \text{(b)}$$

Las derivadas sucesivas de la parábola ($y = x^2/500$) respecto a x resultan en

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{250} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{250} \qquad \text{(c)}$$

Al sustituir las ecuaciones (c) en la ecuación (b), se encuentra que el radio de curvatura de la trayectoria es

$$\rho = 250\ \left[1 + (x/250)^2\right]^{3/2}\ \text{pies} \tag{d}$$

También se debe convertir la rapidez del trolebús de mi/h en pies/s:

$$v = \frac{40\,\text{mi}}{\text{h}} \times \frac{5280\,\text{pies}}{1.0\,\text{mi}} \times \frac{1.0\,\text{h}}{3600\,\text{s}} = 58.67\ \text{pies/s} \tag{e}$$

Parte 1

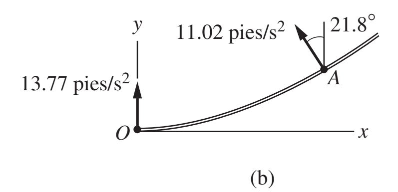
Empleando la ecuación (d), el radio de curvatura en el punto O ($x_O = 0$) es

$$\rho_O = 250\ \left[1 + (0/250)^2\right]^{3/2} = 250\ \text{pies}$$

Por tanto, la componente normal de la aceleración en la ecuación (a) es

$$(a_n)_O = \frac{v^2}{\rho_O} = \frac{(58.67)^2}{250} = 13.77\ \text{pies/s}^2 \qquad \textit{Respuesta}$$

Observe que la tangente a la ruta en el punto O está sobre el eje x. Entonces, $(a_n)_O$ se encuentra sobre el eje y dirigida hacia el centro de curvatura de la trayectoria, como se ilustra en la figura (b).



(b)

Parte 2

Al usar la ecuación (d), el radio de curvatura en el punto A ($x_A = 100$ pies) es

$$\rho_A = 250\ \left[1 + (100/250)^2\right]^{3/2} = 312.3\ \text{pies}$$

Por tanto, la componente normal de la aceleración es

$$(a_n)_A = \frac{v^2}{\rho_A} = \frac{(58.67)^2}{312.3} = 11.02\ \text{pies/s}^2 \qquad \textit{Respuesta}$$

Si se utiliza la primera de las ecuaciones (c), la pendiente de la curva en A es

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_A = \frac{x_A}{250} = \frac{100}{250} = 0.4\,\text{rad} = 21.8^\circ$$

Por tanto, $(a_n)_A$ está dirigida como se muestra en la figura (b); es decir, normal a la trayectoria y dirigida hacia su centro de curvatura.

Problemas

13.1 Un automóvil recorre la parte *AB* de la curva S a rapidez constante, desacelera en *BC* y acelera en *CD*. Muestre la dirección aproximada del vector aceleración en cada uno de los cinco puntos indicados.

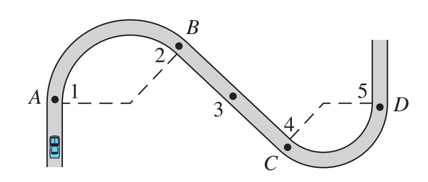


Fig. P13.1

13.2 Un automóvil recorre una curva de radio 200 m, mientras aumenta su rapidez a razón de 0.8 m/s^2. En cierto instante, la magnitud de la aceleración total es 1.5 m/s^2. ¿Cuál es la rapidez, en km/h, del automóvil medida en ese instante?

13.3 El cohete está en vuelo propulsado, cerca de la superficie terrestre. Determine el radio de curvatura de la trayectoria en el instante que se muestra si la rapidez del cohete es 800 pies/s. Observe que su aceleración tiene dos componentes, la debida al empuje del combustible quemado y la que se debe a la gravedad.

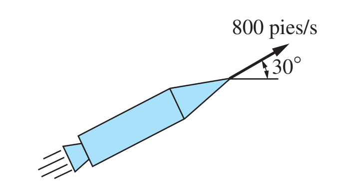


Fig. P13.3

13.4 El automóvil viaja con rapidez constante en el desnivel del camino. El radio de curvatura de la ruta en el punto *A*, el fondo del desnivel, es 500 m. ¿Qué rapidez del automóvil, medida en km/h, dará una aceleración de magnitud 0.2g cuando el automóvil esté en *A*?

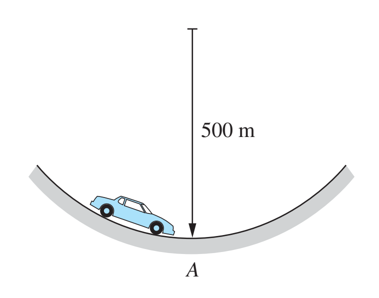


Fig. P13.4

13.5 Una pelota se lanza con un cañón en *A* con velocidad inicial v_A con un ángulo θ respecto a la horizontal. Deduzca la expresión para el radio de curvatura en *B*, el punto más alto sobre la trayectoria de la pelota.

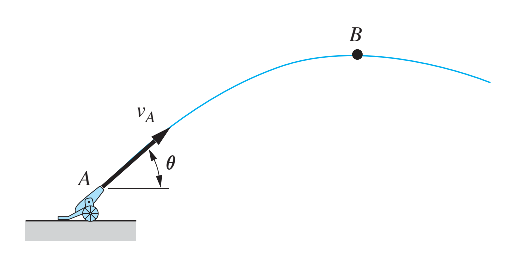


Fig. P13.5

13.6 Una partícula recorre un círculo de radio 4 m, cambiando su rapidez a razón constante. En cierto punto *A*, la rapidez es 3 m/s. Después de viajar otro cuarto de revolución hasta el punto *B*, la rapidez ha aumentado a 6 m/s. Determine la magnitud de la aceleración de la partícula en *B*.

13.7 Una partícula viaja sobre una curva plana del punto *A* al punto *B*. La longitud de la trayectoria entre *A* y *B* es 40 pulg. La rapidez de la partícula es 60 pulg/s en *A* y 20 pulg/s en *B*. La razón de cambio de la rapidez es constante. (a) Encuentre la componente tangencial de la aceleración cuando la partícula está en *B*. (b) Si la magnitud de la aceleración en *B* es 50 pulg/s^2, obtenga el radio de curvatura de la ruta en *B*.

13.8 Una partícula recorre una curva plana desde el punto *O* hasta el punto *B*. La longitud de la trayectoria entre *O* y *B* es 80 pulg. La componente tangencial de la

aceleración es $a_t = 0.05s$ pulg/s^2, donde s es la coordenada trayectoria, medida en pulgadas desde el punto O. La rapidez de la partícula en O es 20 pulg/s y el radio de curvatura de la ruta en B es 120 pulg. Determine la magnitud de la aceleración de la partícula en B.

13.9 La partícula pasa por el punto O con una rapidez de 8 pies/s. Entre O y B, la rapidez aumenta a razón de $4\sqrt{v}$ pies/s^2, donde v es la rapidez en pies/s. Calcule la magnitud de la aceleración cuando la partícula está: (a) justo a la izquierda del punto A y (b) exactamente a la derecha de A.

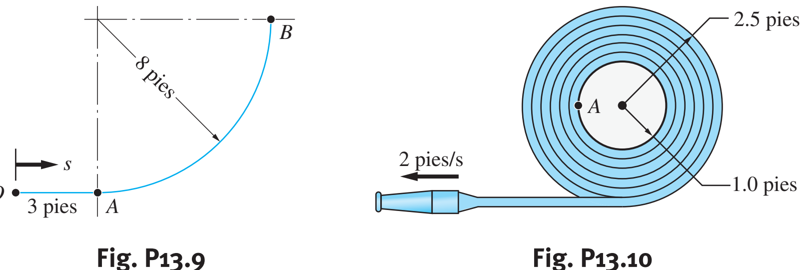


Fig. P13.9 **Fig. P13.10**

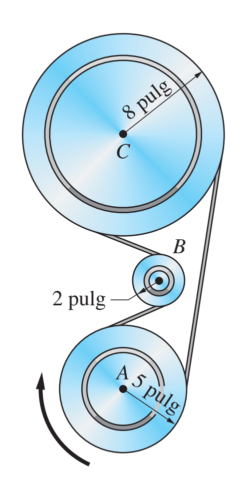


Fig. P13.11

13.10 Una manguera se desenrolla con rapidez constante de 2 pies/s. Determine la componente normal de la aceleración del punto A sobre el rin del carrete (a) en el instante que se muestra en la figura, y (b) cuando casi toda la manguera ha salido del carrete.

13.11 La polea A está unida al cigüeñal del motor de un automóvil. Si el cigüeñal gira con rapidez angular constante de 2000 rev/min, determine la máxima aceleración de cualquier punto de la banda en V conforme funciona sobre las tres poleas.

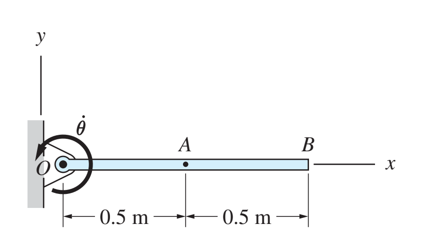


Fig. P13.12, P13.13

13.12 En el instante que se muestra, la rapidez y aceleración angulares de la varilla OB son $\dot{\theta} = 8$ rad/s y $\ddot{\theta} = 24$ rad/s^2, respectivamente, ambas en sentido contrario a las manecillas del reloj. Calcule: (a) los vectores velocidad en los puntos A y B sobre la varilla, y (b) los vectores aceleración de A y B.

13.13 La velocidad angular de la varilla OB varía conforme $\dot{\theta} = 8 - 12t^2$ rad/s, donde t está en segundos. Calcule la magnitud de la aceleración del punto B en (a) $t = 0$, y (b) $t = 1.0$ s.

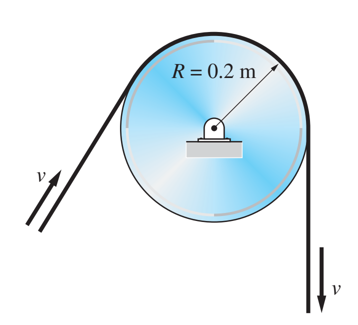


Fig. P13.14, P13.15

13.14 La rapidez de la banda cambió, a razón uniforme, de 0 a 2 m/s durante un intervalo de tiempo de 0.2 segundos. Calcule: (a) la distancia recorrida por la banda durante el intervalo de 0.2 segundos y (b) la máxima aceleración de cualquier punto sobre la banda durante este intervalo.

13.15 La razón de cambio de la rapidez de la banda está dada por $0.06(10 - t)$ m/s^2, donde t está en segundos. La rapidez de la banda es 0.8 m/s en $t = 0$. Cuando la aceleración normal de un punto en contacto con la polea es 40 m/s^2, determine: (a) la rapidez de la banda; (b) el tiempo requerido para lograr esa rapidez, y (c) la distancia recorrida por la banda.

13.16 Un conductor entra a la rampa de salida en una autopista a 40 km/h y de inmediato aplica el freno de manera que la magnitud de la aceleración del automóvil en *A* es 1.5 m/s^2. Si la aceleración tangencial se mantiene, ¿cuánto avanzará hasta detenerse?

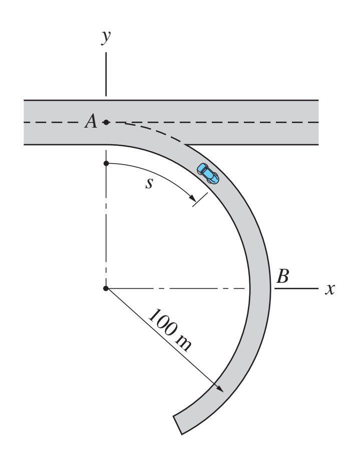


Fig. P13.16, P13.17

13.17 La aceleración tangencial de un automóvil que arranca a partir del reposo en *A* es $(90 + s)/450$ m/s^2, donde s es la distancia en metros medida sobre la curva desde *A*. Calcule el vector aceleración del automóvil cuando esté en *B*.

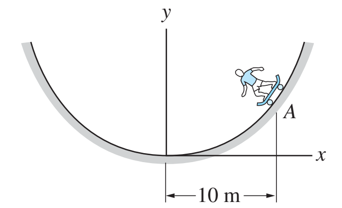


Fig. P13.18

13.18 Un patinador se desliza sobre el perfil parabólico $y = x^2/80$ m, donde x está en metros. Determine la magnitud de la aceleración del deslizamiento en el punto *A* dado que $v_A = 12$ m/s y $\dot{v}_A = 4$ m/s^2.

13.19 El avión vuela sobre una trayectoria circular (en un plano vertical) cuyo radio es de 5 km. Para simular ingravidez, el vector aceleración del avión está dirigido verticalmente hacia abajo y tiene la magnitud g. Determine la rapidez v del avión y su razón de cambio $\dot{v}$ en el punto *A*. A la altura del avión se tiene que $g = 9.78$ m/s^2.

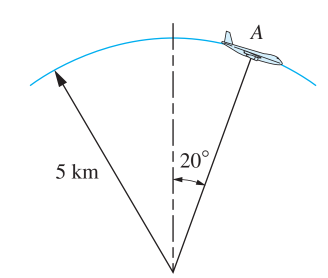


Fig. P13.19

***13.20** Un automóvil recorre el autódromo. La tracción entre las llantas y la pista limita la máxima aceleración total a 5 m/s^2. ¿Cuál es el menor tiempo posible para que el automóvil complete una vuelta en el circuito?

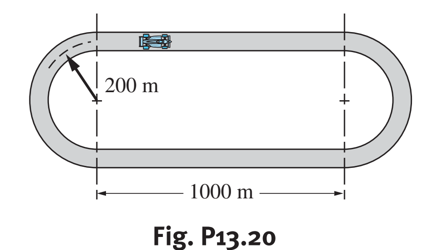


Fig. P13.20

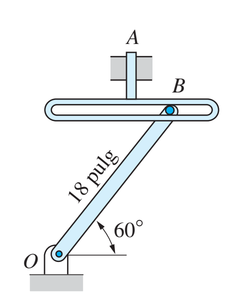


Fig. P13.21

13.21 La ranura en el deslizador *A* aloja el perno *B* unido al brazo *OB*. En la posición que se muestra, el deslizador se mueve hacia arriba con una rapidez constante

de 6 pulg/s. Determine las magnitudes de los vectores velocidad y aceleración de B en esta posición.

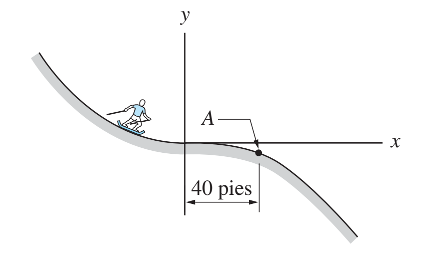


Fig. P13.22

***13.22** Un esquiador desciende la pendiente descrita por $y = -x^3/12\,800$ pies, donde x está en pies. La rapidez del esquiador en el punto A es $v_A = 20$ pies/s y la rapidez aumenta a razón $\dot{v}_A = 4$ pies/s^2. Obtenga la magnitud del vector aceleración del esquiador en A.

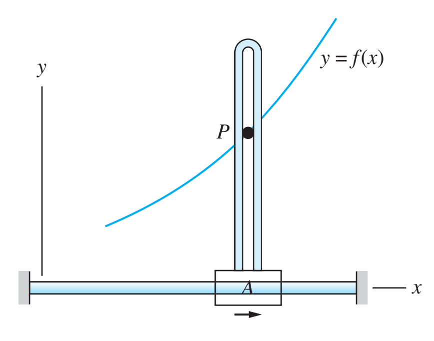


Fig. P13.23

13.23 La pluma P del graficador plano traza la curva $y = x^3/128$, en donde x y y están en pulgadas. Cuando $x = 8$ pulg, la rapidez del deslizador A es 2.4 pulg/s. Para esta posición, calcule: (a) la rapidez de P y (b) la componente normal de la aceleración de P.

13.24 Una partícula se mueve con rapidez constante v_0 sobre la parábola $y = Ax^2 + Bx + C$. Encuentre la máxima aceleración y la coordenada x correspondiente.

13.25 Una partícula se mueve con rapidez constante v_0 sobre la elipse $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$, donde $a > b$. Obtenga la máxima aceleración de la partícula.



13.3 *Cinemática: coordenadas polares y cilíndricas*



a. *Movimiento en un plano (coordenadas polares)*

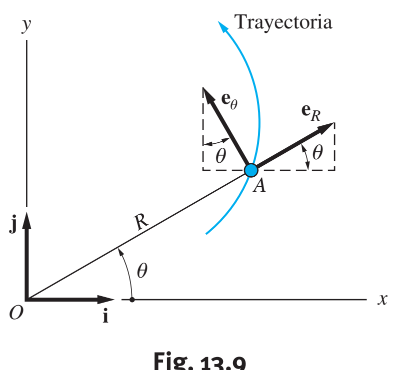
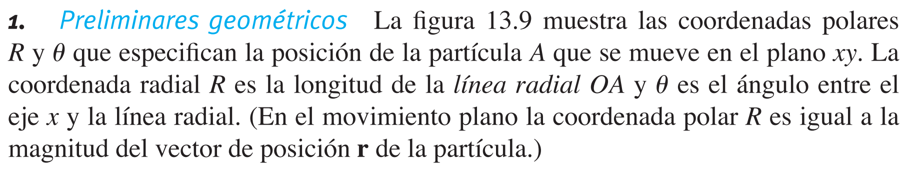
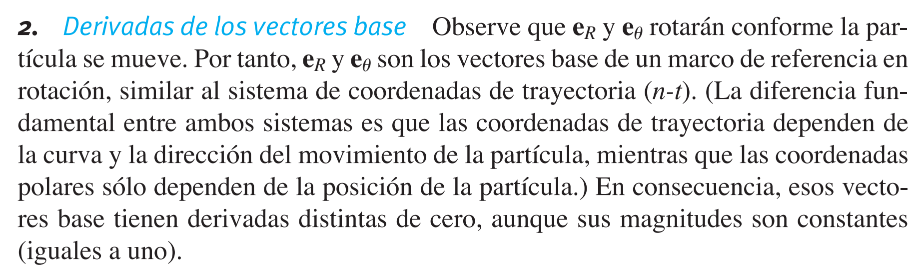


Fig. 13.9



1. *Preliminares geométricos* La figura 13.9 muestra las coordenadas polares R y θ que especifican la posición de la partícula A que se mueve en el plano xy. La coordenada radial R es la longitud de la *línea radial OA* y θ es el ángulo entre el eje x y la línea radial. (En el movimiento plano la coordenada polar R es igual a la magnitud del vector de posición $\mathbf{r}$ de la partícula.)

En la figura 13.9 también se muestran los vectores base $\mathbf{e}_R$ y $\mathbf{e}_\theta$ del sistema de coordenadas polares. El vector $\mathbf{e}_R$ está dirigido sobre la recta radial, alejándose de O, mientras que $\mathbf{e}_\theta$ es perpendicular a $\mathbf{e}_R$, en la dirección en que θ crece.



2. *Derivadas de los vectores base* Observe que $\mathbf{e}_R$ y $\mathbf{e}_\theta$ rotarán conforme la partícula se mueve. Por tanto, $\mathbf{e}_R$ y $\mathbf{e}_\theta$ son los vectores base de un marco de referencia en rotación, similar al sistema de coordenadas de trayectoria (n-t). (La diferencia fundamental entre ambos sistemas es que las coordenadas de trayectoria dependen de la curva y la dirección del movimiento de la partícula, mientras que las coordenadas polares sólo dependen de la posición de la partícula.) En consecuencia, esos vectores base tienen derivadas distintas de cero, aunque sus magnitudes son constantes (iguales a uno).

Como en el apartado anterior, las derivadas temporales de los vectores base unitarios pueden determinarse relacionando los vectores con el sistema de coordenadas xy. De la figura 13.9 se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_R &= \cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j} \\ \mathbf{e}_\theta &= -\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j} \end{aligned} \tag{13.12}$$

Al derivar respecto al tiempo y observar que $d\mathbf{i}/dt = d\mathbf{j}/dt = \mathbf{0}$ (el marco *xy* es fijo) resulta

$$\frac{d\mathbf{e}_R}{dt} = (-\operatorname{sen}\theta\mathbf{i} + \cos\theta\mathbf{j})\dot{\theta} \qquad \frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} = (-\cos\theta\mathbf{i} - \operatorname{sen}\theta\mathbf{j})\dot{\theta}$$

Si se comparan estos resultados con la ecuación (13.12), se encuentra que

$$\dot{\mathbf{e}}_R = \dot{\theta}\mathbf{e}_\theta \qquad \dot{\mathbf{e}}_\theta = -\dot{\theta}\mathbf{e}_R \tag{13.13}$$

La variable $\dot{\theta}$ es la *velocidad angular* de la línea radial. En la figura 13.10 se muestran los vectores base y sus derivadas. Observe que $\dot{\mathbf{e}}_R$ y $\dot{\mathbf{e}}_\theta$ son perpendiculares a $\mathbf{e}_R$ y $\mathbf{e}_\theta$, respectivamente.

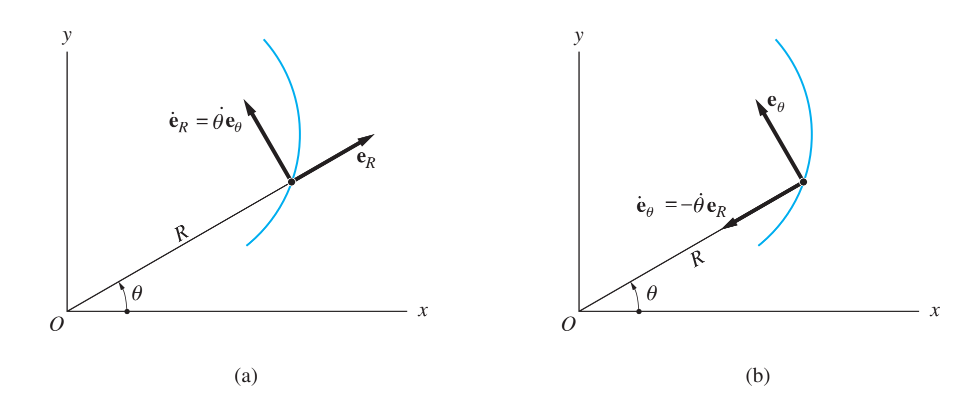


Fig. 13.10

3. *Vectores de velocidad y aceleración* El vector de posición $\mathbf{r}$ de la partícula se puede escribir en coordenadas polares:

$$\mathbf{r} = R\mathbf{e}_R \tag{13.14}$$

Como el vector de velocidad es, por definición, $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$, se tiene

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(R\mathbf{e}_R) = \dot{R}\mathbf{e}_R + R\dot{\mathbf{e}}_R$$

Al sustituir $\dot{\mathbf{e}}_R$ de las ecuaciones (13.13) se obtiene

$$\mathbf{v} = v_R\mathbf{e}_R + v_\theta\mathbf{e}_\theta \tag{13.15}$$

donde

$$v_R = \dot{R} \qquad v_\theta = R\dot{\theta} \tag{13.16}$$

Las componentes v_R y v_θ se llaman componentes *radial* y *transversal* de la velocidad, respectivamente.

El vector de aceleración se calcula como sigue:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{R}\mathbf{e}_R + R\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta)$$
$$= (\ddot{R}\mathbf{e}_R + \dot{R}\dot{\mathbf{e}}_R) + (\dot{R}\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + R\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta + R\dot{\theta}\dot{\mathbf{e}}_\theta)$$

La variable $\ddot{\theta}$ se llama *aceleración angular* de la recta radial. Al sustituir $\dot{\mathbf{e}}_R$ y $\dot{\mathbf{e}}_\theta$ de las ecuaciones (13.13) y arreglar términos, se obtiene

$$\mathbf{a} = a_R\mathbf{e}_R + a_\theta\mathbf{e}_\theta \quad (13.17)$$

donde las componentes radial y transversal de la aceleración están dadas por

$$a_R = \ddot{R} - R\dot{\theta}^2 \qquad a_\theta = R\ddot{\theta} + 2\dot{R}\dot{\theta} \quad (13.18)$$

En la figura 13.11 se muestran las componentes polares de los vectores de velocidad y aceleración.

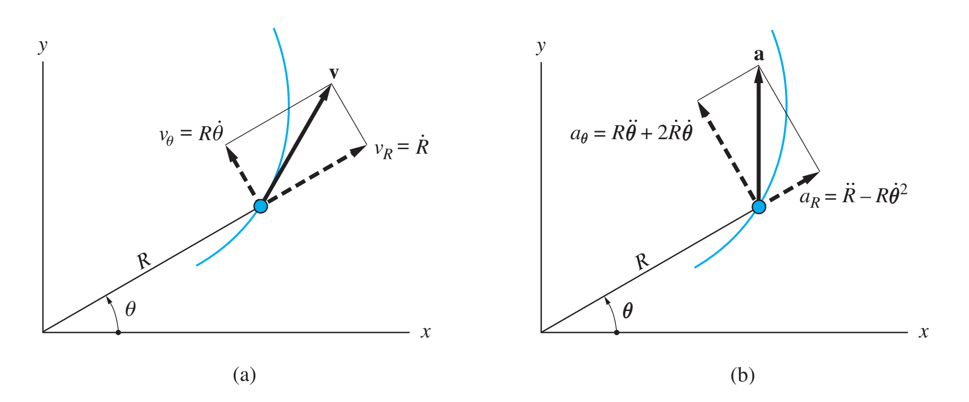


Fig. 13.11

Para el caso especial de una trayectoria circular, la coordenada polar R es igual al radio del círculo (una constante). Por tanto, de la ecuación (13.15) a la (13.18), los vectores velocidad y aceleración son

$$\mathbf{v} = R\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$$
$$\mathbf{a} = -R\dot{\theta}^2\mathbf{e}_R + R\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta \quad (13.19)$$

Estas expresiones concuerdan con las ecuaciones (13.10) y (13.11), donde se usaron las coordenadas de trayectoria. (Observe que $\mathbf{e}_R = -\mathbf{e}_n$ y $\mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_t$ para el movimiento sobre una curva circular.)

b. Movimiento espacial (coordenadas cilíndricas)

Las tres coordenadas cilíndricas que se muestran en la figura 13.12 pueden utilizarse para especificar la ubicación de una partícula A que se mueve en el espacio. Éstas constan de las coordenadas polares R y θ, y la coordenada axial z (que coincide con la coordenada rectangular z). Los vectores base unitarios son $\mathbf{e}_R$, $\mathbf{e}_\theta$ y $\mathbf{e}_z$, en donde $\mathbf{e}_z = \mathbf{k}$.

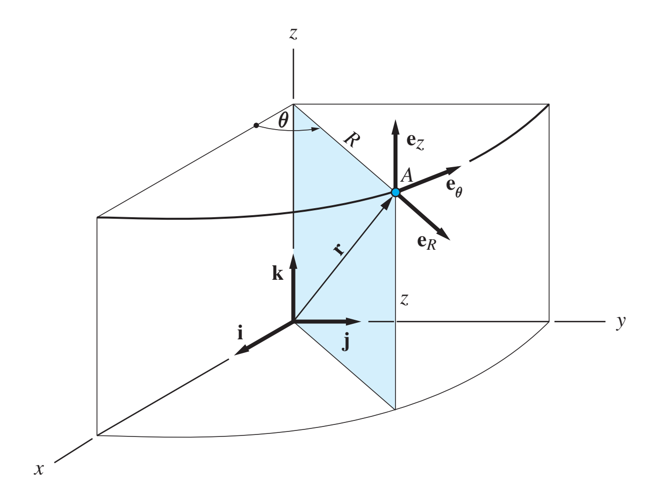


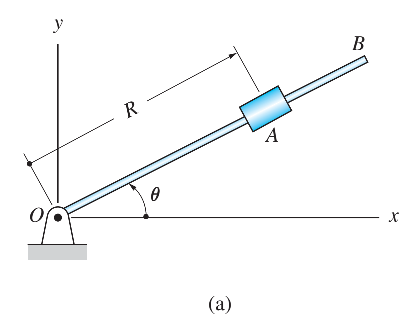
Fig. 13.12

En las coordenadas cilíndricas, el vector de posición $\mathbf{r}$ de la partícula, en la figura 13.12, es

$$\mathbf{r} = R\mathbf{e}_R + z\mathbf{e}_z \qquad (13.20)$$

Al comparar esto con $\mathbf{r} = R\mathbf{e}_R$ para las coordenadas polares, se concluye que las expresiones para $\mathbf{v}$ y $\mathbf{a}$ en las coordenadas cilíndricas serán las mismas que para las polares, excepto por los términos adicionales debido a $z\mathbf{e}_z$. Cuando se observa que $\dot{\mathbf{e}}_Z = \dot{\mathbf{k}} = 0$, las ecuaciones de la (13.15) a la (13.18) pueden simplificarse para obtener

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \dot{R}\mathbf{e}_R + R\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \dot{z}\mathbf{e}_z \\ \mathbf{a} &= (\ddot{R} - R\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_R + (R\ddot{\theta} + 2\dot{R}\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta + \ddot{z}\mathbf{e}_z \end{aligned} \qquad (13.21)$$



(a)

Problema de ejemplo 13.5

El collar A de la figura (a) se desliza sobre la varilla OB en rotación. La posición angular de la varilla está dada por $\theta = \frac{2}{3}\pi t^2$ rad y la distancia del collar a partir de O varía conforme $R = 18t^4 + 4$ pulg, donde el tiempo se mide en segundos. Determine los vectores de velocidad y aceleración del collar en $t = 0.5$ s.

Solución

Primero se determinan los valores de las coordenadas polares del collar A y sus primeras dos derivadas en $t = 0.5$ s:

$$R = 18t^4 + 4 = 18(0.5)^4 + 4 = 5.125 \text{ pulg}$$
$$\dot{R} = 72t^3 = 72(0.5)^3 = 9.0 \text{ pulg/s}$$
$$\ddot{R} = 216t^2 = 216(0.5)^2 = 54.0 \text{ pulg/s}^2$$
$$\theta = \frac{2}{3}\pi t^2 = \frac{2}{3}\pi(0.5)^2 = 0.5236 \text{ rad} = 30°$$
$$\dot{\theta} = \frac{4}{3}\pi t = \frac{4}{3}\pi(0.5) = 2.094 \text{ rad/s}$$
$$\ddot{\theta} = \frac{4}{3}\pi = 4.189 \text{ rad/s}^2$$

Ahora, de la ecuación (13.16) pueden calcularse las componentes polares del vector de velocidad:

$$v_R = \dot{R} = 9.0 \text{ pulg/s} \qquad v_\theta = R\dot{\theta} = (5.125)(2.094) = 10.732 \text{ pulg/s}$$

Por tanto, el vector velocidad del collar en $t = 0.5$ s es

$$\mathbf{v} = v_R\mathbf{e}_R + v_\theta\mathbf{e}_\theta = 9.0\mathbf{e}_R + 10.732\mathbf{e}_\theta \text{ pulg/s}$$ *Respuesta*



v = 14.01 pulg/s
v_θ = 10.732 pulg/s
α = 50°
v_R = 9.0 pulg/s
R = 5.125 pulg
A
θ = 30°
O

(b)

En la figura (b) se muestra este resultado, donde la magnitud de $\mathbf{v}$ y el ángulo α entre $\mathbf{v}$ y la varilla se calcularon mediante:

$$v = \sqrt{v_R^2 + v_\theta^2} = \sqrt{(9.0)^2 + (10.732)^2} = 14.01 \text{ pulg/s}$$
$$\alpha = \tan^{-1}\frac{v_\theta}{v_R} = \tan^{-1}\frac{10.732}{9.0} = 50.0°$$

Las componentes de la aceleración que pueden obtenerse de las ecuaciones (13.18), son

$$a_R = \ddot{R} - R\dot{\theta}^2 = 54.0 - (5.125)(2.094)^2 = 31.53 \text{ pulg/s}^2$$
$$a_\theta = R\ddot{\theta} + 2\dot{R}\dot{\theta} = (5.125)(4.189) + 2(9.0)(2.094) = 59.16 \text{ pulg/s}^2$$

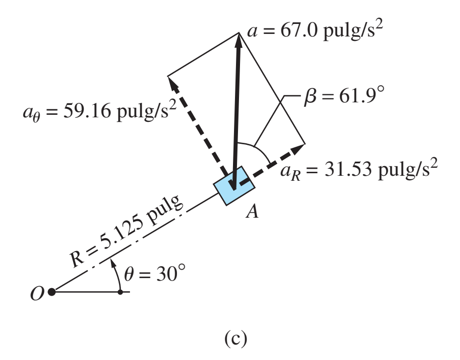
El vector de aceleración correspondiente del collar en $t = 0.5$ s es

$$\mathbf{a} = a_R\mathbf{e}_R + a_\theta\mathbf{e}_\theta = 31.53\mathbf{e}_R + 59.16\mathbf{e}_\theta \text{ pulg/s}^2$$ *Respuesta*

que se muestra en la figura (c). La magnitud de **a** y el ángulo β se calcularon de

$$a = \sqrt{a_R^2 + a_\theta^2} = \sqrt{(31.53)^2 + (59.16)^2} = 67.0 \text{ pulg/s}^2$$

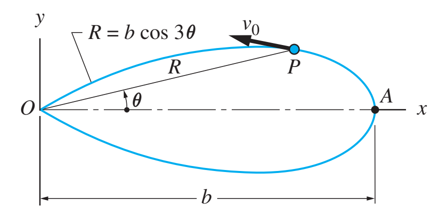
$$\beta = \tan^{-1}\frac{a_\theta}{a_R} = \tan^{-1}\frac{59.16}{31.53} = 61.9°$$



(c)

Problema de ejemplo **13.6**

Como se muestra en la figura, la partícula P viaja con rapidez constante v_0 sobre la trayectoria descrita por $R = b \cos (3\theta)$. Determine el vector aceleración de la partícula en el punto A.



Solución

Al derivar dos veces la expresión para R se obtiene

$$R = b\cos 3\theta$$

$$\dot{R} = -3b\dot{\theta}\,\text{sen}\,3\theta$$

$$\ddot{R} = -9b\dot{\theta}^2\cos 3\theta - 3b\ddot{\theta}\,\text{sen}\,3\theta$$

Al sustituir $\theta = 0$, se obtiene en el punto A

$$R = b\cos 0 = b$$

$$\dot{R} = -3b\dot{\theta}\,\text{sen}\,0 = 0 \tag{a}$$

$$\ddot{R} = -9b\dot{\theta}^2\cos 0 - 3b\ddot{\theta}\,\text{sen}\,0 = -9b\dot{\theta}^2$$

La componente transversal de la velocidad está dada por la ecuación (13.16): $v_\theta = R\dot{\theta}$. Si se observa que $v_R = 0$ en A (porque la tangente a la trayectoria en A es perpendicular a la línea radial $\overline{OA}$), se tiene $v_\theta = v_0$. Por tanto,

$$\dot{\theta} = \frac{v_0}{R} = \frac{v_0}{b} \tag{b}$$

La aceleración angular $\ddot{\theta}$ de la recta radial en A se obtiene de la condición que:

$$v_0^2 = v_R^2 + v_\theta^2 = \dot{R}^2 + \left(R\dot{\theta}\right)^2 = \text{constante}$$

Cuando se deriva esta expresión resulta

$$2\dot{R}\ddot{R} + 2R\dot{R}\dot{\theta}^2 + 2R^2\dot{\theta}\ddot{\theta} = 0$$

Como $\dot{R} = 0$ en A, esta ecuación se reduce a $0 = 2R^2\dot{\theta}\ddot{\theta}$, que se puede satisfacer sólo si

$$\ddot{\theta} = 0 \tag{c}$$

Las componentes de la aceleración, en las ecuaciones (13.18), ahora pueden evaluarse en el punto A mediante las ecuaciones de la (a) hasta (c):

$$a_R = \ddot{R} - R\dot{\theta}^2 = -9b\dot{\theta}^2 - b\dot{\theta}^2 = -10b\left(\frac{v_0}{b}\right)^2 = -\frac{10v_0^2}{b}$$

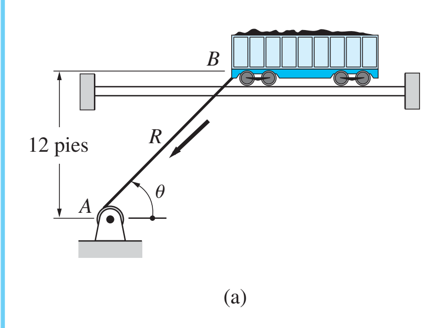
$$a_\theta = R\ddot{\theta} + 2\dot{R}\dot{\theta} = 0 + 0 = 0$$

Por tanto, el vector de aceleración de la partícula en A es

$$\mathbf{a} = -\frac{10v_0^2}{b}\mathbf{e}_R = -\frac{10v_0^2}{b}\mathbf{i}$$ *Respuesta*

Problema de ejemplo **13.7**

El cable conectando del torno A al punto B sobre el carro de ferrocarril de la figura (a) se enrolla con una razón constante de 5 pies/s. Cuando $\theta = 60^\circ$, determine: 1. la velocidad de B y $\dot{\theta}$, y 2. la aceleración de B y $\ddot{\theta}$. Desprecie el radio del torno.



(a)

Solución

De la figura (a) se observa que la longitud R del cable y el ángulo θ son las coordenadas polares del punto B. En $\theta = 60^\circ$, se tiene

$$R = \frac{12}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{12}{\operatorname{sen} 60^\circ} = 13.856 \text{ pies}$$

De acuerdo con el enunciado del problema, R se reduce a razón constante de 5 pies/s. Por tanto,

$$\dot{R} = -5 \text{ pies/s} \qquad \ddot{R} = 0$$

Observe que el punto B sigue una trayectoria recta, horizontal. En consecuencia, sus vectores velocidad y aceleración también serán horizontales.

Parte 1

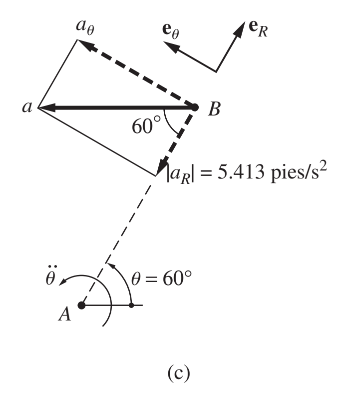
La figura (b) muestra la descomposición del vector velocidad $\mathbf{v}$ de B, en sus componentes radial y transversal, en $\theta = 60^\circ$. Como $v_R = \dot{R} = -5$ pies/s, es negativa y $\mathbf{v}_R$ es directamente opuesta a $\mathbf{e}_R$; es decir, hacia A. Conociendo $\mathbf{v}_R$ y la dirección de $\mathbf{v}$ (horizontal) permite completar el diagrama de velocidad. De la geometría del diagrama, la rapidez de B en $\theta = 60^\circ$ es

$$v = \frac{5}{\cos 60^\circ} = 10.0 \text{ pies/s (hacia la izquierda)}$$ *Respuesta*

El diagrama de velocidad también da $v_\theta = 5 \tan 60^\circ$. Si se compara este resultado con $v_R = R\dot{\theta}$ en las ecuaciones (13.16), se encuentra que

$$\dot{\theta} = \frac{v_\theta}{R} = \frac{5\tan 60^\circ}{13.856} = 0.6250 \text{ rad/s (S.C.R.)}$$ *Respuesta*

(b)



(c)

Parte 2

En la figura (c) se muestra el diagrama de aceleración de un punto B en $\theta = 60^\circ$. La componente radial es, de acuerdo con las ecuaciones (13.18),

$$a_R = \ddot{R} - R\dot{\theta}^2 = 0 - (13.856)(0.6250)^2 = -5.413 \text{ pies/s}^2$$

Otra vez, el signo negativo indica que $\mathbf{a}_R$ tiene dirección opuesta a $\mathbf{e}_R$. Se sabe que el vector de aceleración $\mathbf{a}$ es horizontal, entonces es posible completar el diagrama de la aceleración. A partir del diagrama, la magnitud de la aceleración en $\theta = 60^\circ$ es

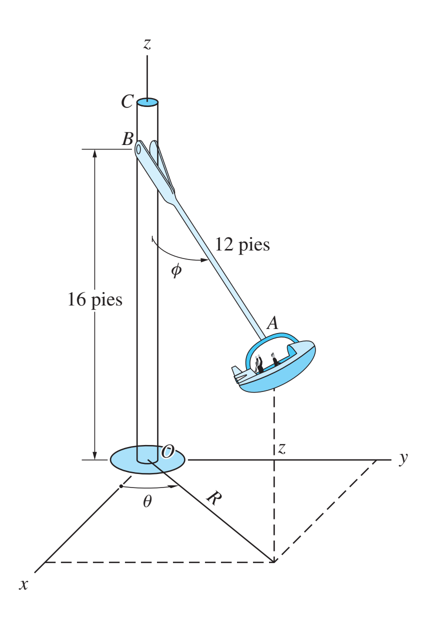
$$a = \frac{5.413}{\cos 60^\circ} = 10.83 \text{ pies/s}^2 \text{ (hacia la izquierda)}$$ *Respuesta*

Al consultar de nuevo el diagrama de aceleración, se encuentra que $a_\theta = 5.413 \tan 60^\circ$. Si se compara con $a_\theta = R\ddot{\theta} + 2\dot{R}\dot{\theta}$ en las ecuaciones (13.18) se obtiene

$$\ddot{\theta} = \frac{a_\theta - 2\dot{R}\dot{\theta}}{R} = \frac{5.413 \tan 60^\circ - 2(-5)(0.6250)}{13.856}$$
$$= 1.127 \text{ rad/s}^2 \text{ (S.C.R.)}$$ *Respuesta*

Problema de ejemplo **13.8**

El vehículo de pasajeros de un parque de diversiones está conectado por medio del brazo AB al mástil vertical OC. Durante cierto intervalo de tiempo, el mástil rota a razón constante $\dot{\theta} = 1.2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ mientras que el brazo se eleva a razón constante $\dot{\phi} = 0.3 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Determine las componentes cilíndricas de la velocidad y aceleración del vehículo en el instante en que $\phi = 40^\circ$.



Solución

Al consultar la figura se observa que las coordenadas R y z del vehículo son $R = 12 \text{ sen } \phi$ pies y $z = 16 - 12 \cos \phi$ pies.

Al observar que $\ddot{\phi} = 0$ ($\dot{\phi}$ es constante), se tiene en $\phi = 40^{\text{o}}$

$$R = 12 \text{ sen } \phi = 12 \text{ sen } 40^\circ = 7.714 \text{ pies}$$

$$\dot{R} = 12 \cos \phi \, \dot{\phi} = (12 \cos 40^\circ)(0.3) = 2.758 \text{ pies/s}$$

$$\ddot{R} = -12 \text{ sen } \phi \, \dot{\phi}^2 = -(12 \text{ sen } 40^\circ)(0.3)^2 = -0.6942 \text{ pies/s}^2$$

y

$$z = 16 - 12 \cos \phi = 16 - 12 \cos 40^\circ = 6.808 \text{ pies}$$

$$\dot{z} = 12 \text{ sen } \phi \, \dot{\phi} = (12 \text{ sen } 40^\circ)(0.3) = 2.315 \text{ pies/s}$$

$$\ddot{z} = 12 \cos \phi \, \dot{\phi}^2 = (12 \cos 40^\circ)(0.3)^2 = 0.8273 \text{ pies/s}^2$$

Si se utilizan las ecuaciones (13.21), las componentes cilíndricas de la velocidad son

$$v_R = \dot{R} = 2.758 \text{ pies/s}$$

$$v_\theta = R\dot{\theta} = 7.714(1.2) = 9.257 \text{ pies/s} \qquad \textit{Respuesta}$$

$$v_z = \dot{z} = 2.315 \text{ pies/s}$$

Si se recuerda que $\dot{\theta}$ es constante, las componentes de la aceleración en las ecuaciones (13.21) serán

$$a_R = \ddot{R} - R\dot{\theta}^2 = -0.6942 - 7.714(1.2)^2 = -11.802 \text{ pies/s}^2$$

$$a_\theta = R\ddot{\theta} + 2\dot{R}\dot{\theta} = 0 + 2(2.758)(1.2) = 6.619 \text{ pies/s}^2 \qquad \textit{Respuesta}$$

$$a_z = \ddot{z} = 0.8273 \text{ pies/s}^2$$

Problemas

13.26 El cohete en vuelo vertical es rastreado por medio del radar. Calcule la velocidad y aceleración del cohete en el instante en que las lecturas del radar son $\theta = 40°$, $R = 5$ km, $\dot{R} = 350$ m/s, y $\ddot{R} = 100$ m/s^2.

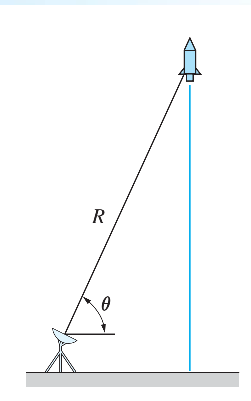


Fig. P13.26

13.27 El movimiento en un plano de una partícula se describe en coordenadas polares como $R = 0.75 + 0.5t^2$ m y $\theta = \pi t^2/2$ rad, donde el tiempo t se mide en segundos. Encuentre las magnitudes de la velocidad y aceleración cuando $t = 2$ s.

13.28 La partícula P recorre la trayectoria $R = 4 + 2 \text{ sen } \theta$ pies. Conociendo que $\dot{\theta} = 1.5$ rad/s (constante), determine las componentes polares de la velocidad y aceleración de P cuando está: (a) en el punto A y (b) en el punto B.

***13.29** La partícula P se mueve sobre la curva $R = 4 + 2 \text{ sen } \theta$ pies. En el instante en que P está en el punto A, su rapidez es de 4 pies/s y su vector de aceleración es perpendicular a la curva. Obtenga la magnitud de la aceleración de P en ese instante.

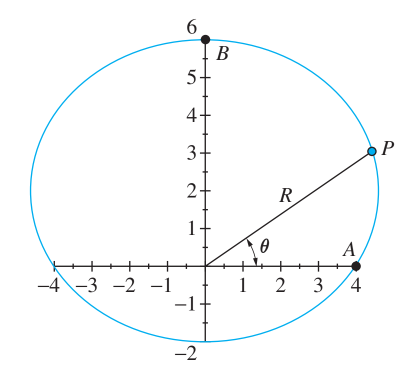


Fig. P13.28, P13.29

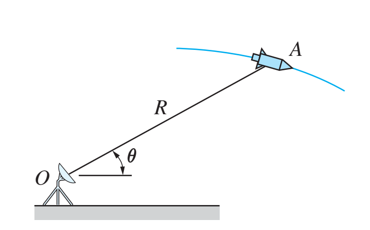


Fig. P13.30

13.30 El proyectil A se rastrea con el radar en O. En un instante dado, las lecturas del radar son $\theta = 30°$, $R = 8000$ pies, $\dot{R} = 600$ pies/s y $\ddot{R} = 50$ pies/s^2. Encuentre la rapidez del proyectil en ese instante.

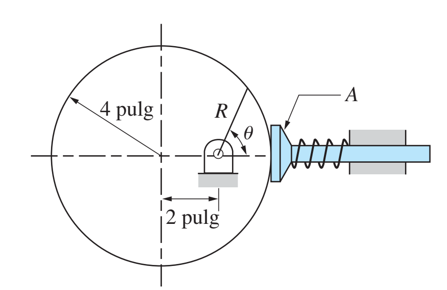


Fig. P13.31

13.31 Un resorte mantiene al empujador A contra la leva excéntrica de perfil circular. La ecuación que describe el perfil de la leva es $R^2 + 4R \cos \theta - 12 = 0$, en donde R está en pulgadas. Si la rueda gira con rapidez angular constante $\dot{\theta} = 3$ rad/s, calcule la velocidad y aceleración del empujador en la posición $\theta = 0$.

13.32 El collarín B se desliza sobre una varilla con forma de una espiral descrita por $R = 0.3 - 0.4(\theta/\pi)$ m. El perno que se ha fijado al collar engarza una ranura en el brazo OA, que rota con rapidez angular constante $\dot{\theta} = 2$ rad/s. Encuentre las componentes polares de la velocidad y aceleración del collar B en (a) $\theta = 90°$ y (b) $\theta = 60°$.

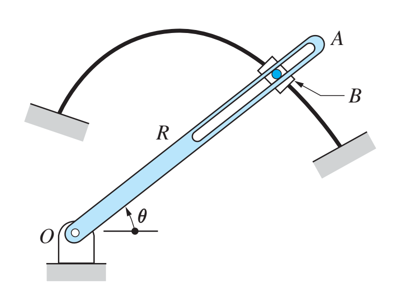


Fig. P13.32

13.33 La varilla OB rota en sentido contrario a las manecillas del reloj respecto de O con rapidez angular constante de 30 rev/min mientras el collarín A se desliza hacia B con rapidez constante de 3 pies/s, medida respecto a la varilla. Cuando el

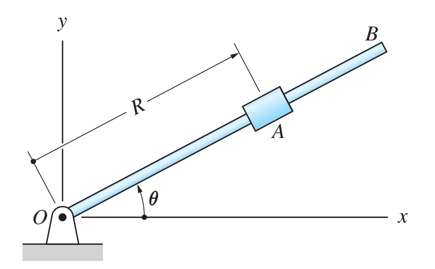


Fig. P13.33, P13.34

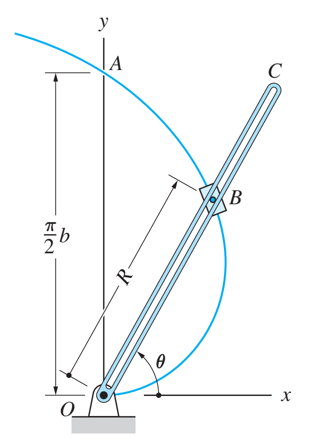


Fig. P13.36, P13.37

collarín A está en la posición $R = 0.6$ pies, $\theta = 0$, calcule: (a) su vector de velocidad y (b) su vector de aceleración.

13.34 El movimiento de la varilla OB es descrito por $\dot{\theta} = \alpha t$, donde $\alpha = 1.2$ rad/s^2 es la aceleración angular constante de la misma. La posición del collarín A en la varilla es $R = v_0 t$, en donde $v_0 = 0.8$ m/s es la rapidez constante hacia afuera del collarín respecto a la varilla. Calcule los vectores de velocidad y aceleración del collarín como funciones del tiempo.

13.35 El movimiento en un plano de una partícula descrito en coordenadas polares es $\theta = \omega t$, $R = b\sqrt{\omega t}$, donde ω y b son constantes. Cuando $\theta = \pi$, determine: (a) el vector de velocidad de la partícula y (b) el vector de aceleración de la partícula.

13.36 El collarín B se desliza sobre una varilla guía que tiene la forma de la espiral $R = b\theta$. Un perno sobre el collar resbala en el brazo ranurado OC. Si OC rota con rapidez angular constante $\dot{\theta} = \omega$, determine la magnitud de la aceleración del collarín cuando está en A.

13.37 El collarín B se desliza sobre una varilla guía que tiene la forma de la espiral $R = b\theta$. Un perno sobre el collarín resbala en el brazo ranurado OC. Si la rapidez del collarín es la constante v_0, determine la rapidez angular $\dot{\theta}$ del brazo OC en términos de v_0, b y θ.

13.38 El brazo ranurado OB rota respecto al perno en O. La bola A en la ranura es presionada por el resorte contra la leva estacionaria C. Si la rapidez angular de OB es $\dot{\theta} = \omega$, donde ω es una constante, calcule las máximas magnitudes de: (a) la velocidad de A; (b) la aceleración de A; (c) $\dot{R}$ (la velocidad de A respecto a OB), y (d) $\ddot{R}$ (la aceleración de A respecto a OB).

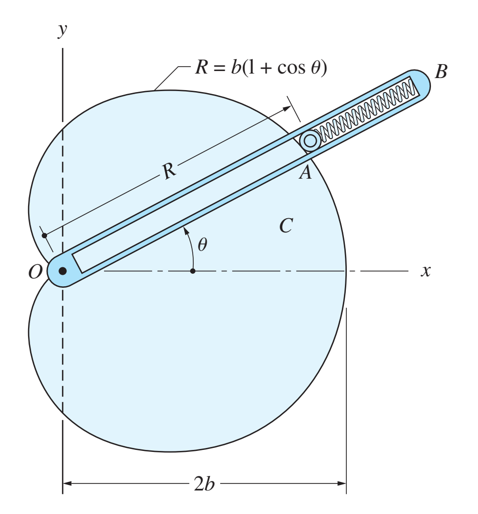


Fig. P13.38, P13.39

13.39 El brazo ranurado OB rota respecto al perno en O. La bola A en la ranura es presionada por el resorte contra la leva estacionaria C. La posición angular del brazo

OB depende del tiempo *t* como $\theta = \pi$ sen ωt, donde ω es una constante. Determine los vectores de velocidad y aceleración de la bola *A* cuando $\theta = \pi/2$.

***13.40** La sección curva de la autopista de intercambio está definida por $R^2 = b^2$ sen 2θ, $0 \leq \theta \leq 90^\circ$. Si un automóvil recorre la curva con rapidez constante v_0, determine su aceleración en *A*.

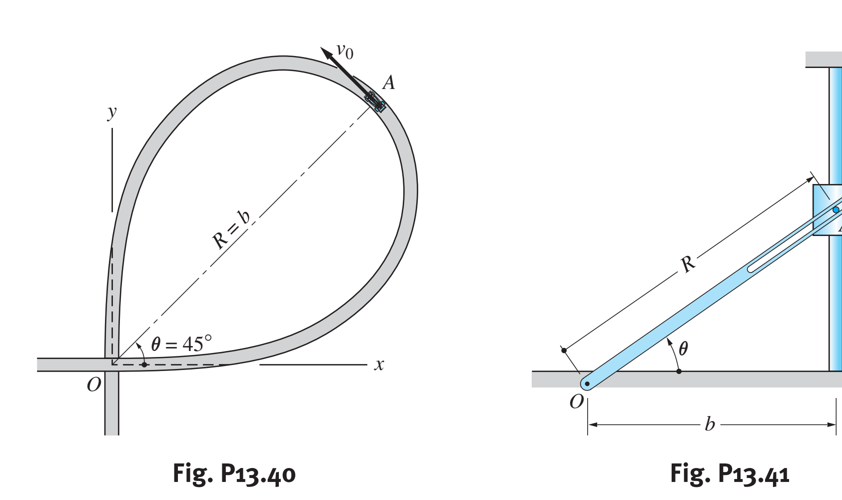


Fig. P13.40

Fig. P13.41

13.41 El perno unido al collar *A* deslizante engarza la ranura de la barra *OB*. Utilizando coordenadas polares obtenga la rapidez de *A* en términos de θ y $\dot{\theta}$. (*Nota:* se le pidió la solución empleando coordenadas rectangulares en el problema 12.23.)

13.42 El helicóptero es seguido por el radar, que registra R, θ y $\dot{\theta}$ a intervalos de tiempo regulares. En cierto instante las lecturas son $R = 8500$ pies, $\theta = 40^\circ$ y $\dot{\theta} = 0.04$ rad/s. Si el helicóptero está en el nivel de vuelo, calcule la elevación *h* y su rapidez en este instante.

13.43 El brazo telescópico del robot se desliza en la montura *A*, que rota respecto al eje horizontal en *O*. El extremo *B* del brazo traza la recta vertical que se muestra con rapidez constante v_B. En términos de v_B, *b* y θ, determine las expresiones para: (a) $\dot{\theta}$, $\dot{R}$ y (b) $\ddot{\theta}$ y $\ddot{R}$.

13.44 El torno *D* desenrolla el cable *BCD* a razón constante de 0.8 m/s. Obtenga la rapidez del extremo *B* de la barra *AB* cuando $R = 4$ m.

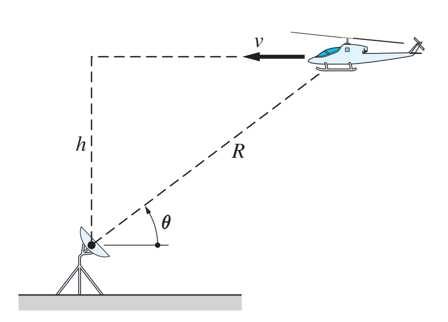


Fig. P13.42

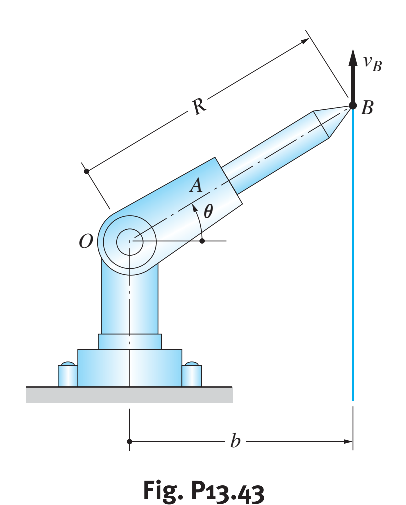


Fig. P13.43

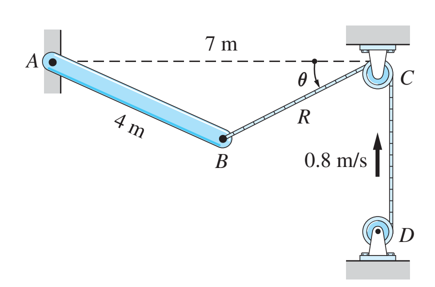


Fig. P13.44

13.45 Una partícula se mueve sobre una espiral descrita en coordenadas cilíndricas por $R = 0.4$ m y $z = -0.2\theta$ m, donde θ está en radianes. Se conoce que en cierto instante, $\dot{\theta} = 6$ rad/s y $\ddot{\theta} = -10$ rad/s^2. Determine las magnitudes de los vectores de velocidad y aceleración en este instante.

13.46 Una partícula se mueve sobre la curva descrita por $R = 4$ pulg y $z = 0.5$ sen 4θ pulg. Si $\dot{\theta} = 0.8$ rad/s (constante), determine las magnitudes de la velocidad y la aceleración máximas de la partícula y los correspondientes valores de θ.

13.47 Un niño se desliza hacia abajo en el tobogán helicoidal *AB*. La descripción del movimiento en coordenadas cilíndricas es $R = 4$ m, $\theta = \omega^2 t^2$ y $z = h[1 - (\omega^2 t^2/\pi)]$, donde $h = 3$ m y $\omega = 0.75$ rad/s. Calcule las magnitudes de los vectores de velocidad y aceleración cuando el niño está en *B*.

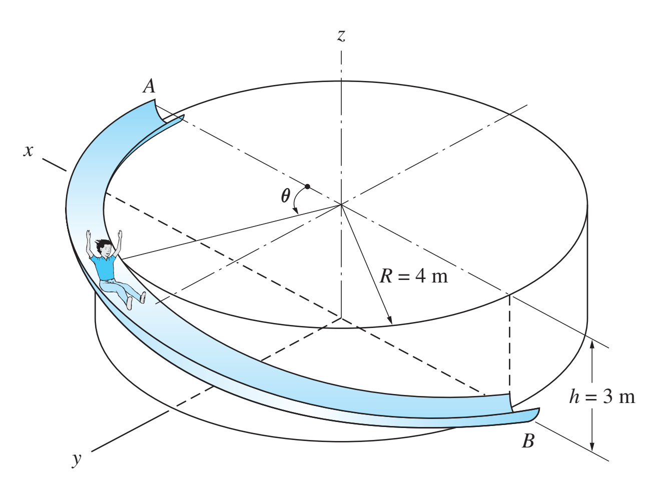


Fig. P13.47

13.48 La varilla *OB* rota respecto al eje z con rapidez angular constante $\dot{\theta} = 4$ rad/s mientras que el deslizador *A* se mueve hacia arriba de la varilla con rapidez constante $\dot{s} = 6$ pies/s. Determine las magnitudes de los vectores de velocidad y aceleración de *A* cuando $s = 2$ pies.

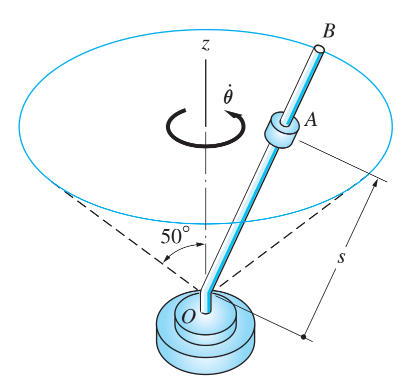


Fig. P13.48

***13.49** El aspersor de agua rota con una rapidez angular constante de $\dot{\theta} = 6$ rad/s respecto al eje z. La rapidez del agua respecto al tubo curvo OA es 7.5 pies/s. Calcule las magnitudes de los vectores de velocidad y aceleración del agua justo abajo del inyector en A.

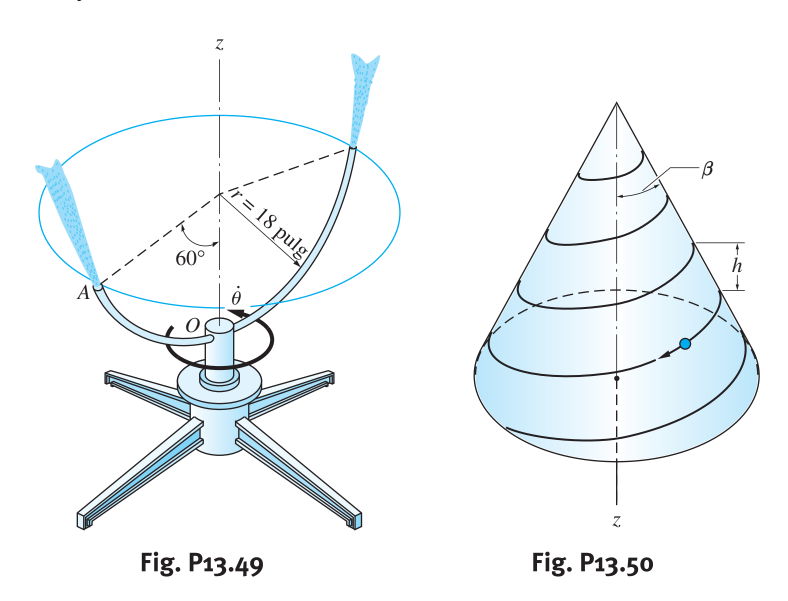


Fig. P13.49 **Fig. P13.50**

13.50 La trayectoria de la partícula que se mueve sobre la superficie de un cono está definida por

$$R = \frac{h}{2\pi}\theta \tan\beta \qquad z = \frac{h}{2\pi}\theta$$

donde R, θ y z son las coordenadas cilíndricas. Si el movimiento de la partícula es tal que $\dot{\theta} = \omega$ (constante), determine lo siguiente como funciones de θ: (a) la rapidez de la partícula y (b) las componentes cilíndricas del vector aceleración.

13.4 *Cinética: método de fuerza-masa-aceleración*

El método de fuerza-masa-aceleración (FMA) se presentó en el apartado 12.3 en términos del sistema de coordenadas rectangulares. Cuando se trabaja con coordenadas curvilíneas, los cuatro pasos básicos del método permanecen sin cambio: 1. dibujar el DCL de la partícula; 2. efectuar un análisis cinemático de la aceleración; 3. dibujar el DMA de la partícula, y 4. deducir las ecuaciones del movimiento por medio de la equivalencia estática del DCL y el DMA. El único cambio significativo está en los detalles del segundo paso, es decir, la cinemática.

a. *Coordenadas (n-t) de trayectoria*

En la figura 13.13(a) se muestran los diagramas de cuerpo libre y de masa-aceleración de una partícula. Observe que el DMA exhibe las componentes normal y tangencial del vector masa-aceleración. Las condiciones para que los dos diagramas sean estáticamente equivalentes son

$$\Sigma F_n = ma_n \qquad \Sigma F_t = ma_t \tag{13.22}$$

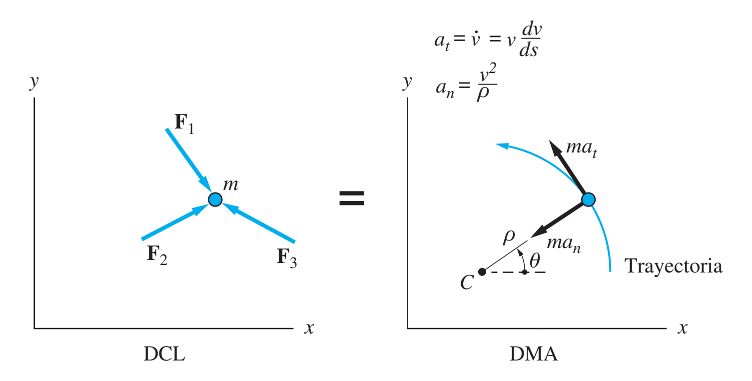
donde ΣF_n y ΣF_t son las componentes *n-t* de la fuerza resultante que actúa sobre la partícula. Como ya se mencionó, sólo se emplearán coordenadas de trayectoria para el movimiento plano.

b. Coordenadas cilíndricas

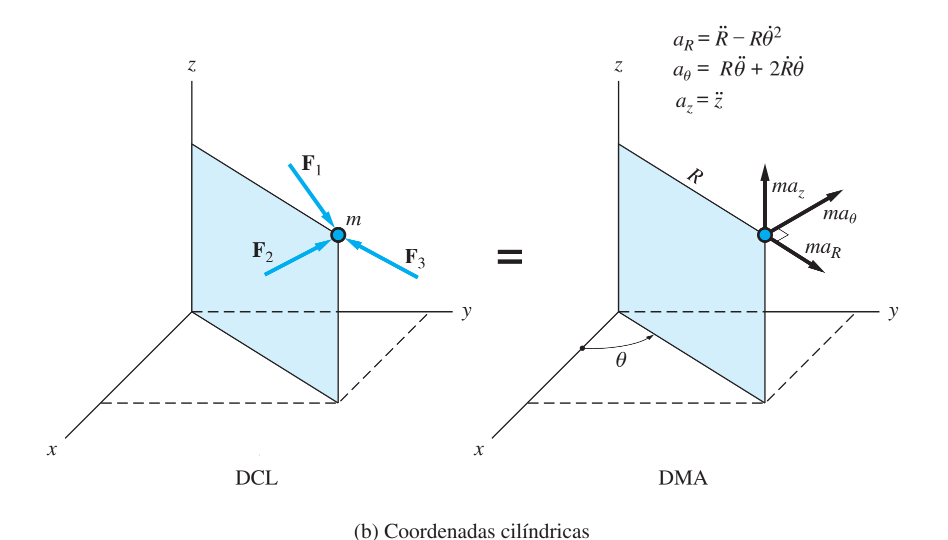
Las ecuaciones del movimiento de una partícula en términos de componentes cilíndricas son

$$\Sigma F_R = ma_R \qquad \Sigma F_\theta = ma_\theta \qquad \Sigma F_z = ma_z \tag{13.23}$$

en donde ΣF_R, ΣF_θ y ΣF_z representan las componentes de la fuerza resultante que actúa sobre la partícula. En la figura 13.13(b) observe el DCL y el DMA. Si la trayectoria de la partícula está en el plano *xy*, entonces la tercera de las ecuaciones (13.23) se convierte en $\Sigma F_z = 0$ y el movimiento sólo es dependiente de las coordenadas polares R y θ.



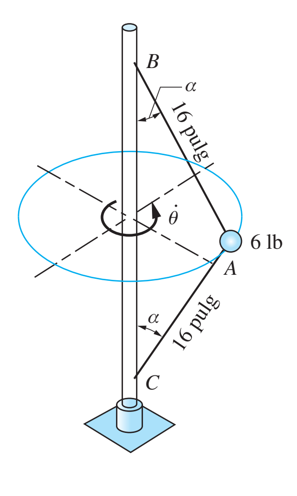
(a) Coordenadas (*n*-*t*) de trayectoria



(b) Coordenadas cilíndricas

Fig. 13.13

Problema de ejemplo 13.9



(a)

Las cuerdas AB y AC conectan la pelota A de 6 lb con el poste vertical, como se muestra en la figura (a). Cuando el poste rota con rapidez angular constante $\dot{\theta}$, la pelota viaja en un círculo horizontal con las cuerdas inclinadas en $\alpha = 30^\circ$ al poste. Encuentre el valor de $\dot{\theta}$ para el cual la tensión en la cuerda AC es 12 lb.

Solución

En la figura (b) se muestran el DCL y el DMA de la pelota. El DCL muestra el peso de la pelota y las tensiones de las dos cuerdas. Como la rapidez de la pelota es constante, el DMA sólo contiene la componente normal $R\dot{\theta}^2$ de la aceleración, donde R es el radio de la trayectoria de A. La ecuación del movimiento en la dirección y es

$$\Sigma F_y = 0 \quad +\!\uparrow \quad T_{AB}\cos 30^\circ - T_{AC}\cos 30^\circ - 6 = 0$$

Al sustituir $T_{AC} = 12$ lb, se obtiene

$$T_{AB} = \frac{6}{\cos 30^\circ} + 12 = 18.928 \text{ lb}$$

La segunda ecuación de movimiento es

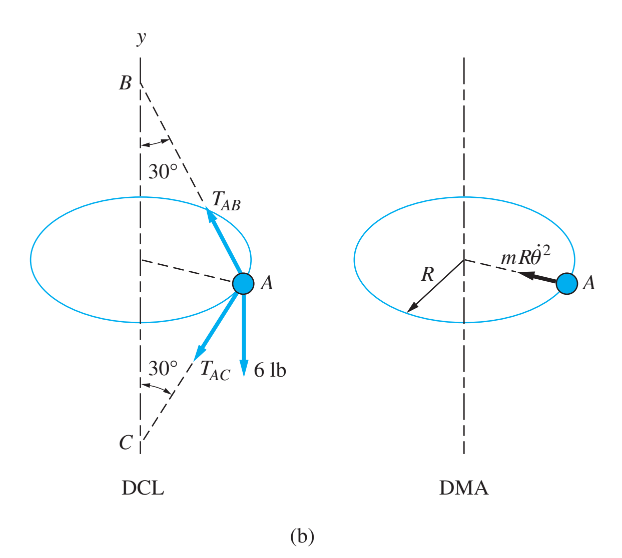
$$\Sigma F_n = ma_n \quad \nwarrow\!+ \quad T_{AB}\,\text{sen}\,30^\circ + T_{AC}\,\text{sen}\,30^\circ = mR\dot{\theta}^2$$

Con $R = 16$ sen 30º $= 8$ pulg $= 0.75$ pies, esta ecuación será

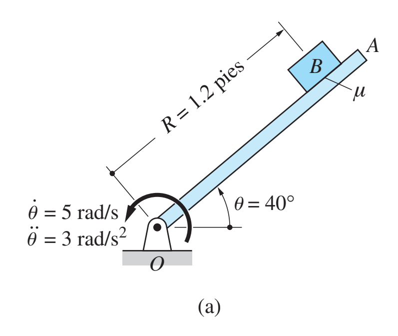
$$(18.928 + 12)\,\text{sen}\,30^\circ = \frac{6}{32.2}(0.75)\dot{\theta}^2$$

entonces

$$\dot{\theta} = 11.16 \text{ rad/s}$$ *Respuesta*



(b)



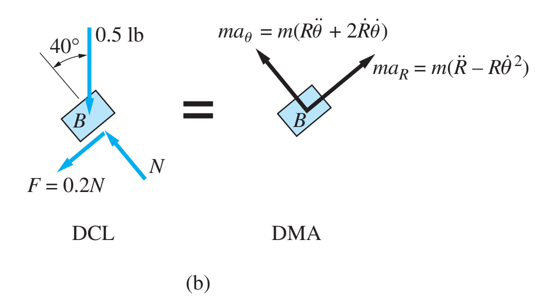
(a)

Problema de ejemplo 13.10

En la figura (a) se muestra un bloque de 0.5 lb que resbala sobre la barra OA en rotación. El coeficiente de fricción cinética entre B y OA es $\mu_k = 0.2$. En la posición indicada, $\dot{R} = 2$ pies/s, $\dot{\theta} = 5$ rad/s y $\ddot{\theta} = 3$ rad/s^2. Para esta posición, determine $\ddot{R}$, la aceleración de B respecto a la barra OA.

Solución

Al consultar el diagrama de cuerpo libre (DCL) de la figura (b), se observa que hay tres fuerzas que actúan sobre B: su peso de 0.5 lb, la fuerza normal N ejercida por la barra OA y la fuerza de fricción cinética $F = \mu_k N$. La dirección de F es opuesta a $\dot{R}$, la velocidad de B respecto a OA. El diagrama de masa-aceleración (DMA) de B también se muestra en la figura (b), donde el vector de inercia $m\mathbf{a}$ se describe en términos de sus componentes polares.



(b)

Cuando se examina la figura (b) se observa que sólo hay dos incógnitas en los diagramas DCL-DMA: N y $\ddot{R}$; las otras variables se han dado. Por tanto, las dos incógnitas pueden calcularse con las dos ecuaciones del movimiento. Para la dirección perpendicular a la barra, se tiene

$$\Sigma F_\theta = m(R\ddot{\theta} + 2\dot{R}\dot{\theta})$$

$$+\nwarrow \quad N - 0.5\cos 40° = \frac{0.5}{32.2}[(1.2)(3) + 2(2)(5)]$$

lo que da

$$N = 0.7495 \text{ lb}$$

Para la dirección radial se tiene que:

$$\Sigma F_R = m(\ddot{R} - R\dot{\theta}^2)$$

$$+\nearrow \quad -0.5 \text{ sen } 40° - 0.2N = \frac{0.5}{32.2}[\ddot{R} - (1.2)(5)^2]$$

Al sustituir $N = 0.7495$ lb y despejar a $\ddot{R}$, resulta

$$\ddot{R} = -0.351 \text{ pies/s}^2$$ *Respuesta*

El signo “menos” significa que la aceleración de B respecto a la barra OA está dirigida hacia el punto O.

Problema de ejemplo **13.11**

En la figura (a), la masa A de 12 kg se desliza con fricción despreciable en un canal semicircular de radio $R = 2$ m. La masa se lanza en $\theta = 30^\circ$ con velocidad $v_0 = 4$ m/s hacia el fondo del canal. Deduzca lo siguiente como funciones de θ: 1. la rapidez de la masa y 2. la fuerza de contacto entre la masa y el canal.

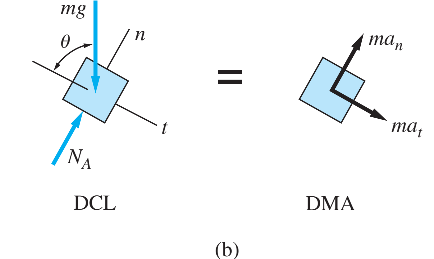
(a)

Solución

Parte 1

Como la trayectoria es circular, los sistemas de coordenadas normal-tangencial (n-t) y polar podrían emplearse con la misma facilidad. Se han elegido las coordenadas n-t.

En la figura (b) se muestra el diagrama de cuerpo libre de la masa en una posición arbitraria, que contiene su peso mg y la fuerza de contacto N_A, que es normal para la superficie del canal debido a la ausencia de fricción. El diagrama de masa-aceleración (DMA) exhibe las componentes n-t del vector de inercia. La ecuación del movimiento en la dirección t es



(b)

$$\Sigma F_t = ma_t \qquad \searrow + \qquad mg\cos\theta = ma_t$$

la que da

$$a_t = g\cos\theta \qquad \text{(a)}$$

Al sustituir $a_t = v(dv/ds)$ de la ecuación (13.9), donde $ds = R\,d\theta$, la ecuación (a) será $(v/R)(dv/d\theta) = g\cos\theta$. Después de las simplificaciones, se obtiene

$$v\,dv = gR\cos\theta\,d\theta$$

cuya integración conduce a

$$\frac{1}{2}v^2 = gR\,\text{sen}\,\theta + C \qquad \text{(b)}$$

en donde C es la constante de integración. Cuando se sustituye la condición inicial $v = v_0 = 4$ m/s cuando $\theta = 30^\circ$ en la ecuación (b) da $C = \frac{1}{2}v_0^2 - gR$ sen $30^\circ = \frac{1}{2}(4)^2 - (9.81)(2)$ sen $30^\circ = -1.810$ (m/s)^2. Por tanto, la rapidez de la masa como una función de θ es

$$v = \pm\sqrt{2(gR\,\text{sen}\,\theta + C)} = \pm\sqrt{2[(9.81)(2)\,\text{sen}\,\theta - 1.810]}$$
$$= \pm\sqrt{39.24\,\text{sen}\,\theta - 3.62}\ \text{m/s} \qquad \textit{Respuesta}$$

Parte 2

Al consultar la figura (b), la ecuación del movimiento en la dirección n es

$$\Sigma F_n = ma_n \qquad +\nearrow \qquad N_A - mg\,\text{sen}\,\theta = ma_n$$

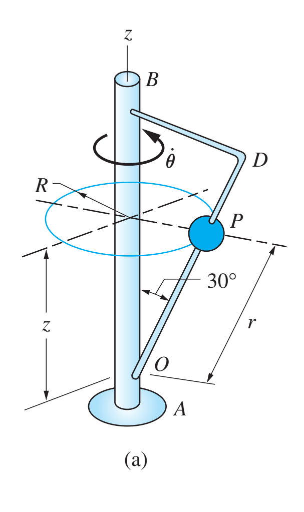
Cuando se sustituye $a_n = v^2/R$ y se despeja a N_A, se obtiene

$$N_A = m\left(g\,\text{sen}\,\theta + \frac{v^2}{R}\right) = 12\left(9.81\,\text{sen}\,\theta + \frac{39.24\,\text{sen}\,\theta - 3.62}{2}\right)$$
$$= 353.2\,\text{s en}\,\theta - 21.7\ \text{N} \qquad \textit{Respuesta}$$

Nota

La masa se detiene (y después invierte su dirección) cuando $v = 0$ o $39.24 \text{ sen } \theta - 3.62 = 0$, lo que da $\theta = 174.7^{\circ}$. Por tanto, la masa no abandona el canal.

Problema de ejemplo **13.12**



(a)

El poste vertical AB de la figura (a) rota en un cojinete en A. El deslizador P de 0.6 kg puede moverse libremente sobre la barra sin fricción OD que está unida de manera rígida a AB en un ángulo de 30°. En cierto instante cuando $r = 1.2$ m, se conoce que $\dot{\theta} = 4$ rad/s, $\ddot{\theta} = 0$ y la velocidad de P respecto a OD es $\dot{r} = 4$ m/s. En este instante, determine la magnitud de la fuerza de contacto ejercida sobre P por OD y $\ddot{r}$, la aceleración de P respecto a OD.

Solución

En la figura (b) se muestra el diagrama de cuerpo libre (DCL) del deslizador P en el instante de interés, en donde su peso es $mg = 0.6(9.81) = 5.886$ N. Es conveniente descomponer la fuerza de contacto ejercida por OD (que es normal a OD) en dos componentes: N_1, que es perpendicular a OD y pasa por el eje z, y N_2, que es perpendicular a OD y N_1. En la figura (c) se muestra el diagrama de masa-aceleración (DMA) del deslizador P, en donde el vector de inercia $m\mathbf{a}$ está expresado en términos de sus componentes cilíndricas.

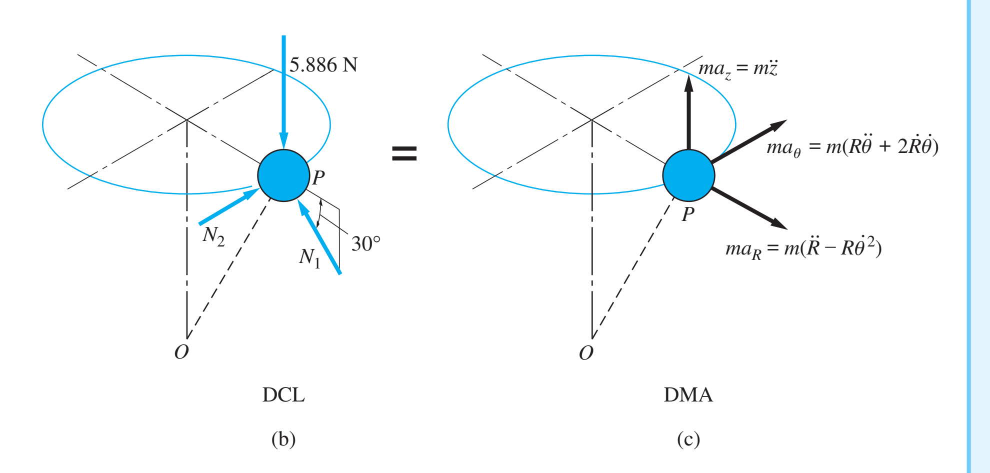
De la figura (a) se tiene que $R = r \text{ sen } 30^{\circ} = 1.2 \text{ sen } 30^{\circ} = 0.60$ m y $z = r \cos 30^{\circ}$. Al derivar respecto al tiempo y sustituir $\dot{r} = 4$ m/s, resulta

$$R = \dot{r} \text{ sen } 30 = 4 \text{ sen } 30^{\circ} = 2.00 \text{ m/s}$$

$$R = \ddot{r} \text{ sen } 30$$

$$z = \dot{r} \cos 30 = 4 \cos 30^{\circ} = 3.464 \text{ m/s}$$

$$z = \ddot{r} \cos 30$$



DCL (b)

DMA (c)

Como ya se han dado los valores de $\dot{\theta}$, $\ddot{\theta}$ y $\dot{r}$, se observa que $\ddot{r}$ es la única variable cinemática desconocida. En la figura (b), el DCL contiene dos incógnitas (N_1 y N_2), así que se tiene un problema que implica tres incógnitas que pueden determinarse a partir de las tres ecuaciones del movimiento disponibles para el deslizador.

De acuerdo con las figuras (b) y (c), las ecuaciones del movimiento son

$$\Sigma F_R = ma_R = m(\ddot{R} - R\dot{\theta}^2)$$

$$\searrow + \quad -N_1 \cos 30° = 0.6[\ddot{r} \text{ sen } 30° - 0.60(4)^2] \qquad \text{(a)}$$

$$\Sigma F_\theta = ma_\theta = m(R\ddot{\theta} + 2\dot{R}\dot{\theta})$$

$$+\nearrow \quad N_2 = 0.6[0 + 2(2.00)(4)] = 9.600 \text{ N} \qquad \text{(b)}$$

$$\Sigma F_z = ma_z = m\ddot{z}$$

$$+\uparrow \quad N_1 \text{ sen } 30° - 5.886 = 0.6(\ddot{r} \cos 30°) \qquad \text{(c)}$$

Cuando se resuelven de manera simultánea las ecuaciones (a) y (c) se obtiene

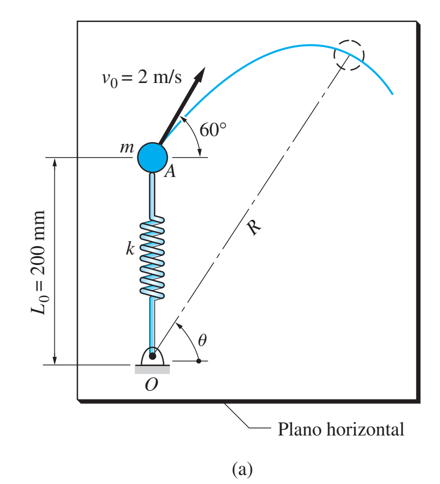
$$\ddot{r} = -3.70 \text{ m/s}^2 \qquad \textit{Respuesta}$$

y $N_1 = 7.931$ N. Por tanto, la magnitud de la fuerza de contacto ejercida por OD es

$$N = \sqrt{N_1^2 + N_2^2} = \sqrt{(7.931)^2 + (9.600)^2} = 12.45 \text{ N} \qquad \textit{Respuesta}$$

Problema de ejemplo 13.13

La partícula de masa $m = 0.3$ kg está unida a un resorte ideal de rigidez $k = 28.1$ N/m. El resorte no está deformado cuando la partícula se lanza sobre la superficie horizontal con rapidez $v_0 = 2$ m/s en la dirección que se muestra en la figura (a). Es posible despreciar la fricción entre la partícula y la superficie. 1. Obtenga las ecuaciones diferenciales describiendo el movimiento de la partícula en términos de las coordenadas polares R y θ y establezca los valores iniciales. 2. Resuelva las ecuaciones diferenciales numéricamente desde $t = 0$ (el tiempo de lanzamiento) en $t = 1.5$ s y trace la gráfica de la trayectoria de la partícula.

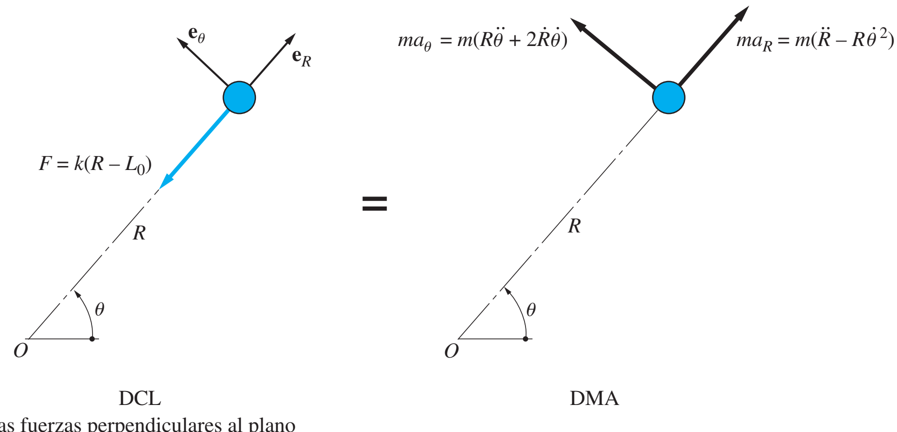


(a)

Solución

Parte 1

En la figura (b) se muestran los diagramas de cuerpo libre (DCL) y de masa-aceleración (DMA) de la partícula en una posición arbitraria. La única fuerza que se encuentra en el DCL es la fuerza del resorte $F = k(R - L_0)$, donde L_0 es la longitud no deformada del resorte. Las otras fuerzas (peso de la partícula y la reacción con la superficie horizontal) son perpendiculares al plano del movimiento; por eso no entran en las ecuaciones del movimiento. El DMA muestra las componentes polares del vector de inercia, donde se obtuvieron las aceleraciones a partir de las ecuaciones (13.18).



(b)

En relación con la figura (b), las ecuaciones del movimiento son

$$\Sigma F_R = ma_R \quad \overset{+}{\nearrow} \quad -k(R - L_0) = m(\ddot{R} - R\dot{\theta}^2)$$
$$\Sigma F_\theta = ma_\theta \quad \overset{+}{\nwarrow} \quad 0 = m(R\ddot{\theta} + 2\dot{R}\dot{\theta})$$

Al sustituir los datos dados, $m = 0.3$ kg, $k = 28.1$ N/m y $L_0 = 0.2$ m, y despejar $\ddot{R}$ y $\ddot{\theta}$**,** resultan las ecuaciones diferenciales

$$\ddot{R} = R\dot{\theta}^2 - 93.667R + 18.733 \text{ m/s}^2 \qquad \ddot{\theta} = -\frac{2\dot{R}\dot{\theta}}{R} \text{ rad/s}^2$$ *Respuesta*

Los valores iniciales son

$$R_0 = L_0 = 0.2 \text{ m}$$
$$\dot{R}_0 = (v_R)_0 = 2 \operatorname{sen} 60^\circ = 1.73205 \text{ m/s}$$
$$\theta_0 = \frac{\pi}{2}$$
$$\dot{\theta}_0 = \frac{(v_\theta)_0}{L_0} = -\frac{2\cos 60^\circ}{0.2} = -5.000 \text{ rad/s}$$ *Respuesta*

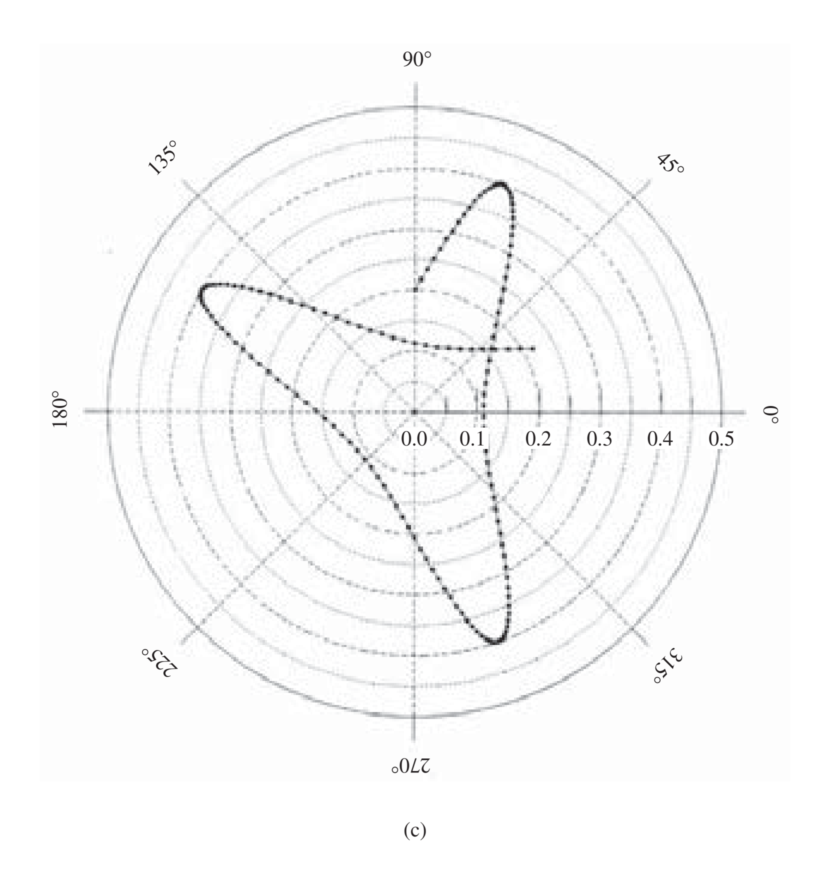
Parte 2

Cuando se usa la notación

$$\mathbf{x} = [R\ \theta\ \dot{R}\ \dot{\theta}]^T$$

las ecuaciones equivalentes de primer orden son

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_1x_4^2 - 93.667x_1 + 18.733 \\ -2x_3x_4/x_1 \end{bmatrix}$$



(c)

El programa MATLAB que resuelve las ecuaciones y grafica la trayectoria es

```
function example13_13
time = [0:0.025:1.5];
x0 = [0.2 pi/2 1.73205 −5];
[t,x] = ode45(@f,time,x0);
axes('fontsize',14)
polar(x(:,2),x(:,1))
grid on
    function dxdt = f(t,x)
    dxdt = [x(3)
           x(4)
           x(1)*x(4)^2-93.667*x(1)+18.7333
           -2*x(3)*x(4)/x(1)];
    end
end
```

En la figura (c) se muestra la gráfica polar de la trayectoria. Observe que R nunca excede 0.4 m.

Problemas

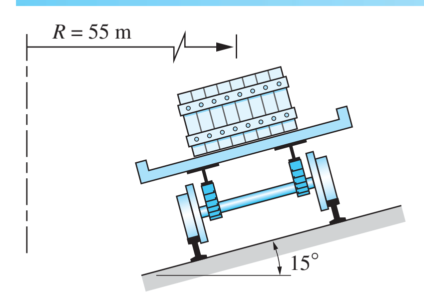


Fig. P13.52

13.51 Una motocicleta recorre una curva, sin peralte, cuyo radio es de 600 pies. Si el coeficiente estático de fricción entre el camino y las llantas es 0.4, determine la mayor rapidez constante con la que la moto no patinará.

13.52 El vagón-plataforma viaja con una rapidez constante de 60 km/h alrededor de una curva cuyo radio es de 55 m con un peralte de 15º. Obtenga el menor coeficiente estático de fricción entre la pista y el vagón para prevenir que el automóvil de masa M patine.

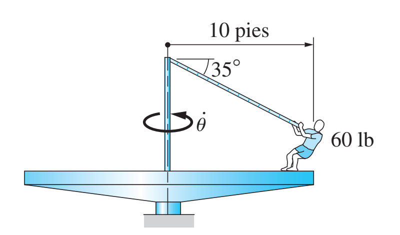


Fig. P13.53

13.53 Un niño cuyo peso es de 60 lb sostiene una cuerda conforme la plataforma rota alrededor del eje vertical con rapidez angular constante $\dot{\theta} = 2$ rad/s. Encuentre la tensión en la cuerda y la fuerza normal entre el niño y la plataforma. Desprecie la fricción.

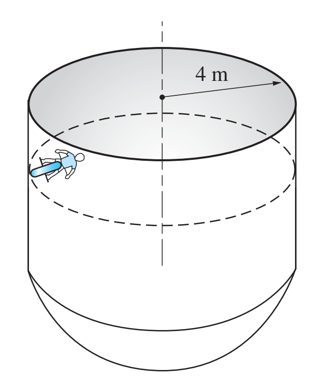


Fig. P13.54

13.54 Un motociclista realiza un círculo horizontal sobre la superficie interna de una pared cilíndrica. Si el coeficiente de fricción estática entre las llantas y la pared es 0.6, ¿cuál es la menor rapidez posible de la motocicleta?

13.55 Un automóvil viaja sobre la cresta A de una colina en donde el radio de curvatura es de 200 pies. Obtenga la máxima rapidez para la que las ruedas estarán en contacto con el camino en A.

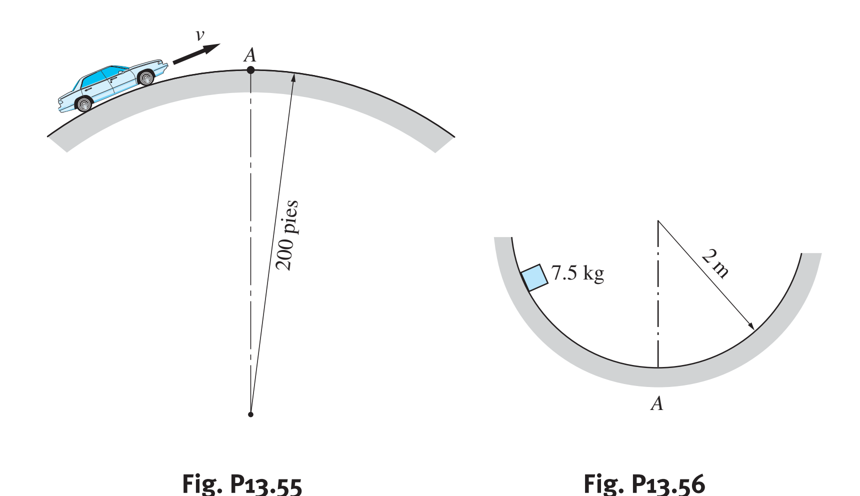


Fig. P13.55 Fig. P13.56

13.56 Una caja de 7.5 kg se desliza hacia abajo por una salida circular y alcanza el punto A con una rapidez de 2.5 m/s. El coeficiente cinético de fricción entre la caja y el vertedero es 0.3. Cuando la caja está en A, calcule: (a) la fuerza normal que actúa entre ella y el vertedero y (b) su razón de cambio de rapidez.

13.57 La tensión en la cuerda del péndulo simple es 8.5 N cuando $\theta = 25º$. Calcule la velocidad y aceleración angulares de la cuerda en este instante.

13.58 El péndulo se suelta a partir del reposo con $\theta = 30^{\circ}$. (a) Deduzca la ecuación del movimiento utilizando θ como la variable independiente. (b) Determine la rapidez de la bola como una función de θ.

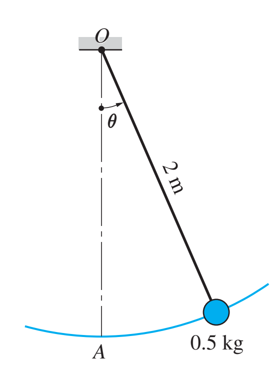


Fig. P13.57, P13.58

13.59 El deslizador de masa m se mueve con fricción despreciable sobre un alambre circular de radio R que está en un plano vertical. La fuerza horizontal constante F actúa sobre el deslizador. Si éste arranca a partir del reposo en A, obtenga la expresión para la F más pequeña que permitiría llegar a B.

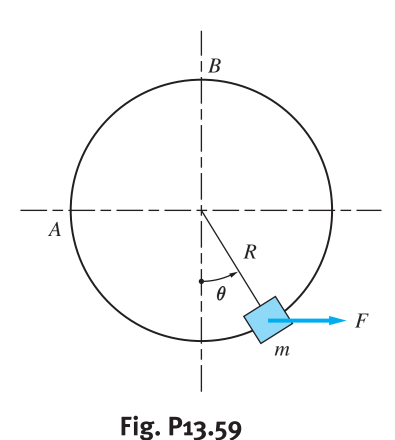


Fig. P13.59

13.60 La moneda A se ha colocado sobre un tocadiscos estacionario, en la posición $R = 15$ pulg, $\theta = 0$. El coeficiente estático de fricción entre la moneda y el tocadiscos es 0.2. Si el tocadiscos arranca con una aceleración angular constante $\ddot{\theta} = 1.5$ rad/s^2, determine la velocidad angular $\dot{\theta}$ cuando la moneda empieza a deslizarse.

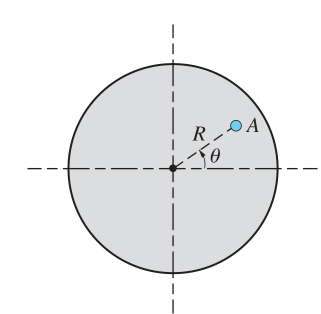


Fig. P13.60

13.61 El collar de 1.2 lb se desliza con libertad sobre la varilla lisa OA. La varilla rota en el plano vertical respecto al perno en O con una velocidad angular constante $\dot{\theta}$. Encuentre el valor mínimo de $\dot{\theta}$ para el que el collar se mantendrá en contacto con el tapón en A. Si hubiese fricción entre el collar y la varilla, ¿esto afectaría su resultado?

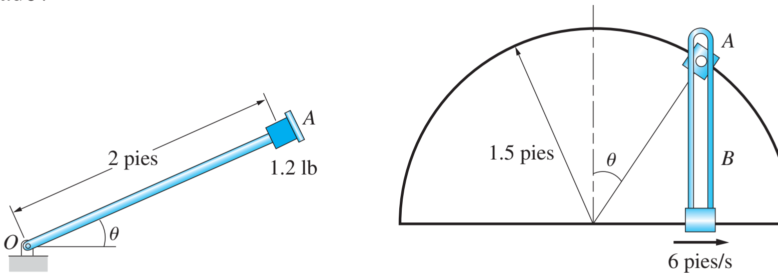


Fig. P13.61 **Fig. P13.62**

13.62 El collar A de 0.5 lb se desliza sobre la varilla guía semicircular. Un perno unido al collar engarza la ranura vertical en la guía B, que se mueve hacia la derecha con rapidez constante de 6 pies/s. Determine la fuerza entre el perno y la guía B cuando $\theta = 45^{\circ}$. Desprecie la fricción.

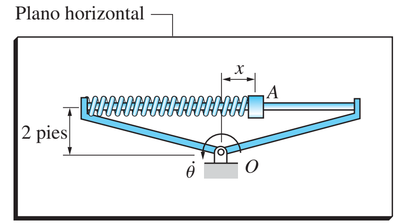


Fig. P13.63



13.63 Un resorte está conectado entre el deslizador A de 2 lb y el marco. El resorte tiene una rigidez de 2 lb/pie y no tiene deformación cuando $x = 0.5$ pies. Si se sabe

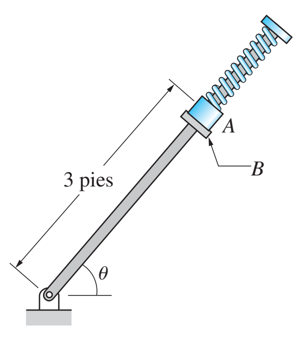


Fig. P13.64

que el marco rota en el plano horizontal respecto de *O* con rapidez angular constante $\dot{\theta} = 5$ rad/s, determine la distancia *x*. Desprecie la fricción.

13.64 El resorte ejerce una fuerza de 2 lb que presiona al deslizador *A* de 1.5 lb contra el tapón *B*. Suponiendo que la velocidad angular $\dot{\theta}$ se incrementa con lentitud, encuentre el valor de $\dot{\theta}$ para el cual el deslizador pierde contacto con el tapón *B*. Suponga que la rotación del montaje ocurre en: (a) el plano horizontal y (b) el plano vertical.

13.65 El deslizador *A* de 0.4 kg resbala sobre la varilla guía circular *BC*. El resorte unido al deslizador tiene una longitud libre de 0.4 m y una rigidez de 18 N/m. El deslizador se lanza hacia arriba desde *C* con velocidad de 2.4 m/s. Determine la magnitud de la aceleración del deslizador y la fuerza de contacto entre el deslizador y la varilla guía justo después del lanzamiento. Desprecie la fricción.

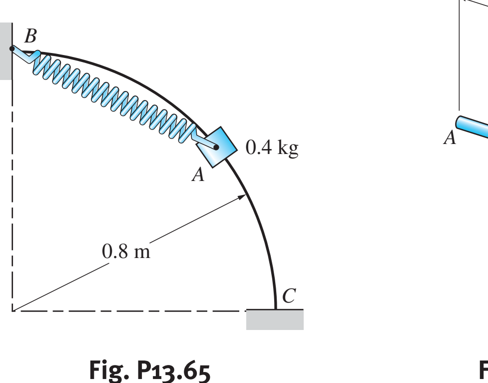
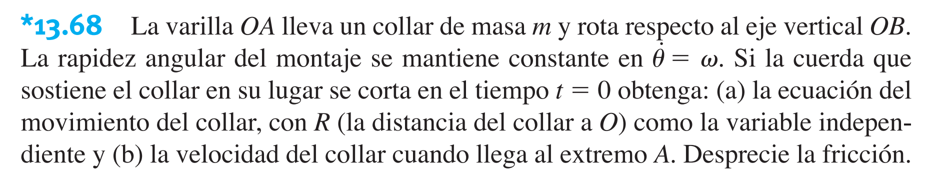


Fig. P13.65

Fig. P13.66-P13.68

13.66 La varilla *OA*, que lleva un collar deslizante de masa $m = 2.5$ kg, rota respecto al eje vertical *OB* con rapidez angular constante $\dot{\theta} = 20$ rad/s. Una cuerda mantiene al collar en la posición $R_0 = 1.4$ m. (a) Determine la fuerza en la cuerda. (b) Encuentre $\ddot{R}$ (la aceleración del collar respecto a la varilla) inmediatamente después de la ruptura de la cuerda. Desprecie la fricción.

13.67 La varilla *OA* lleva un collar deslizante de masa $m = 2$ kg y rota respecto al eje vertical *OB*. La rapidez angular de la varilla se mantiene constante en $\dot{\theta} = 6$ rad/s, mientras la cuerda jala el collar hacia *O* a razón constante de 0.8 m/s. Determine la tensión en la cuerda y la fuerza de contacto entre la varilla y el collar cuando éste llega a la posición $R_0 = 1.2$ m.



***13.68** La varilla *OA* lleva un collar de masa *m* y rota respecto al eje vertical *OB*. La rapidez angular del montaje se mantiene constante en $\dot{\theta} = \omega$. Si la cuerda que sostiene el collar en su lugar se corta en el tiempo $t = 0$ obtenga: (a) la ecuación del movimiento del collar, con *R* (la distancia del collar a *O*) como la variable independiente y (b) la velocidad del collar cuando llega al extremo *A*. Desprecie la fricción.

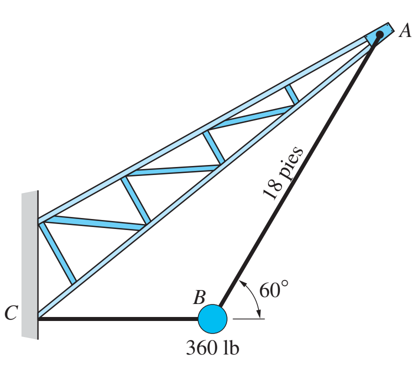


Fig. P13.69

13.69 La bola de 360 lb para derribar escombros está inicialmente en reposo sostenida por los cables *AB* y *BC*. Calcule la fuerza en el cable *AB:* (a) antes de que se libere el cable *BC* y (b) justo después de eliminar el cable *BC*.

13.70 Una canica de 1.0 pulg de diámetro rueda por el surco *AOB* que tiene forma parabólica en el plano horizontal *xy*. La sección transversal del surco es un rectángulo de 0.8 pulg de ancho. Despreciando la fricción, encuentre la mayor rapidez en la cual la canica permanecerá en el surco.

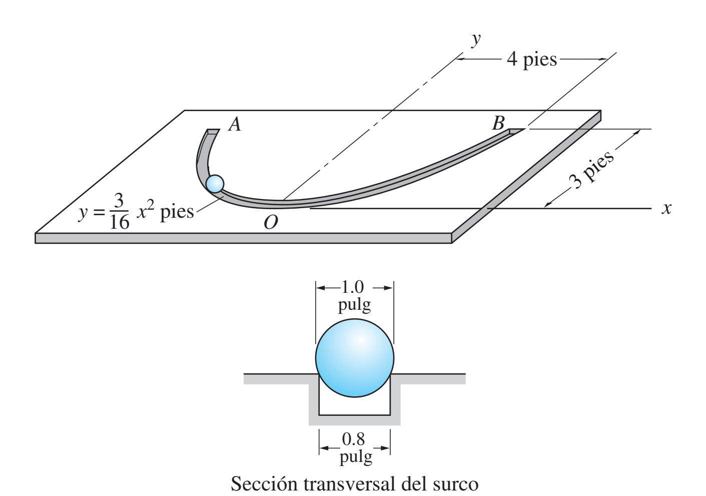


Fig. P13.70

13.71 La fricción entre la zapata *A* y la carcasa *B* permite al embrague centrífugo transmitir la torca del eje 1 al eje 2. La fuerza centrífuga mantiene la zapata contra la carcasa, en donde el coeficiente de fricción estática entre la zapata y la carcasa es 0.8. Cada zapata pesa 1.0 lb y es posible despreciar los pesos de las otras partes del ensamblaje de la zapata. (a) Calcule la tensión inicial en cada resorte *C* del embrague de manera que el contacto entre la zapata y la carcasa sólo ocurra cuando $\dot{\theta} \geq 500$ rev/min. (b) Determine la máxima torca que puede transmitirse cuando $\dot{\theta} =$ 2000 rev/min.

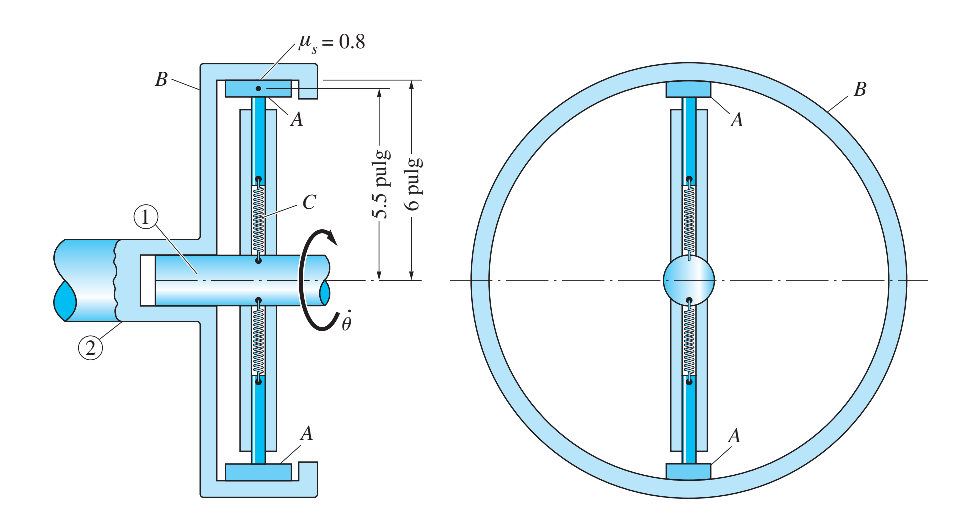


Fig. P13.71

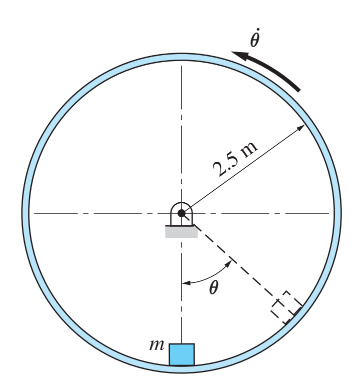


Fig. P13.72

13.72 Un paquete de masa m se coloca dentro de un tambor que rota en el plano vertical con rapidez angular constante $\dot{\theta} = 1.36$ rad/s. Si el paquete llega a la posición $\theta = 45^\circ$ antes de deslizarse, determine el coeficiente estático de fricción entre el paquete y el tambor.

13.73 La trayectoria de la partícula P de 3.6 kg es una elipse dada por $R = R_0/(1 + e \cos\theta)$, en donde $R_0 = 0.5$ m y $e = 2/3$. Suponiendo que la rapidez angular de la recta OP es constante a 20 rad/s, calcule las componentes polares de la fuerza que actúa sobre la partícula cuando está en A.

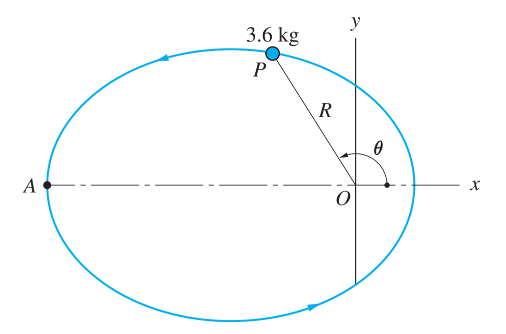


Fig. P13-73, P13-74

13.74 La partícula P de 3.6 kg se mueve sobre la elipse descrita en el problema 13.73. Si el movimiento de la partícula es tal que $V_\theta = R\dot{\theta} = 10$ m/s (constante), determine las componentes polares de la fuerza que actúa sobre la partícula en A.

***13.75** El empujador de 2.4 lb está unido al extremo de una varilla telescópica con pivote en O. El empujador se presiona contra una superficie en espiral sin fricción mediante un resorte con rigidez $k = 8$ lb/pie y longitud libre $L_0 = 3$ pies. La ecuación de la espiral, sobre el plano horizontal, es $R = b\theta/2\pi$, donde $b = 1.2$ pies y θ está en radianes. Inmediatamente después de que la varilla es liberada a partir del reposo en la posición OA, determine: (a) la aceleración angular $\ddot{\theta}$ de la varilla y (b) la fuerza de contacto entre el empujador y la superficie en espiral.

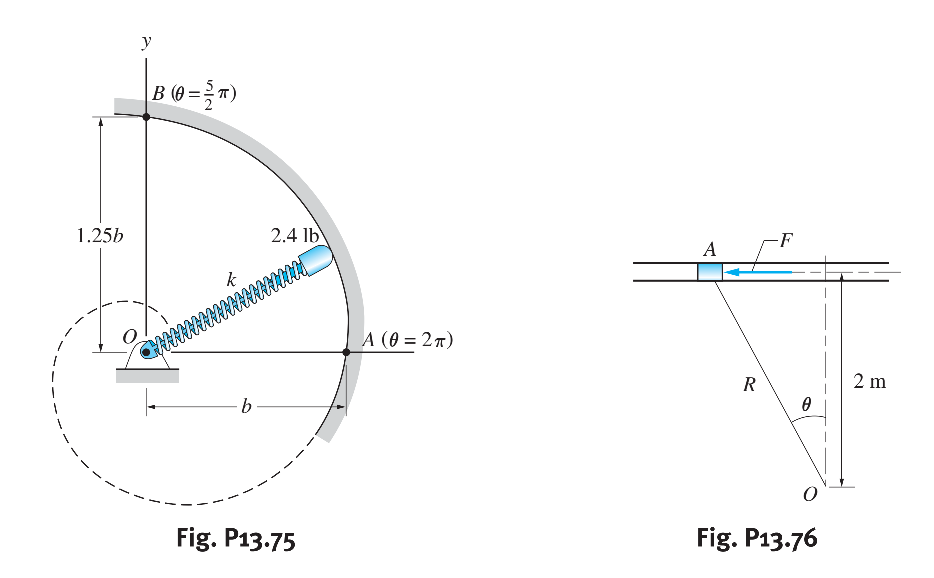


Fig. P13.75

Fig. P13.76

13.76 El cilindro A de 0.6 kg se mueve con fricción despreciable en el tubo horizontal, impulsado por la fuerza F. Si el cilindro se mueve de manera que $R\dot{\theta} = 4$ m/s (constante), determine F como una función del ángulo θ.

13.77 La partícula P se mueve sobre una trayectoria curva, su rapidez varía para mantener $R^2\dot{\theta}$ constante. Demuestre que la fuerza que actúa sobre la partícula siempre está dirigida sobre la recta radial $\overline{OP}$.

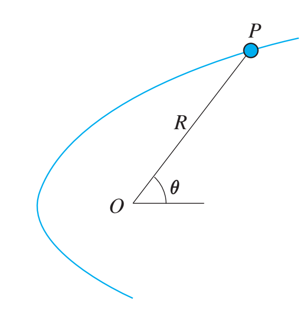


Fig. P13.77

***13.78** Un balín de 0.2 kg se desliza en el tubo OB. El tubo rota en el plano horizontal respecto a un perno en O con velocidad angular constante $\dot{\theta} = 8$ rad/s. El balín está en $R = 0.5$ m cuando se dispara hacia B con velocidad de 2 m/s respecto al tubo. (a) Obtenga el vector velocidad del balín cuando llega al extremo del tubo en B. (b) ¿Cuál es la fuerza de contacto entre el bloque y el tubo en B? Desprecie la fricción.

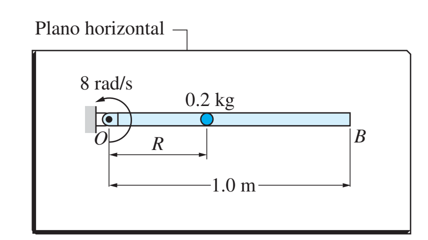


Fig. P13.78

13.79 Una bola A de 0.10 kg, que se desliza en una ranura del brazo OB en rotación, se mantiene en contacto con la leva estacionaria C por medio de la compresión de un resorte con rigidez k. El resorte ejerce una fuerza de 2 N sobre la bola cuando el brazo es estacionario en la posición OP. Si el brazo rota con rapidez angular constante $\dot{\theta} = 20$ rad/s, calcule la rigidez del resorte mínima k que mantendrá el contacto entre la bola y la leva cuando el brazo está en la posición OQ. Desprecie la fricción y suponga que el montaje está sobre el plano horizontal.

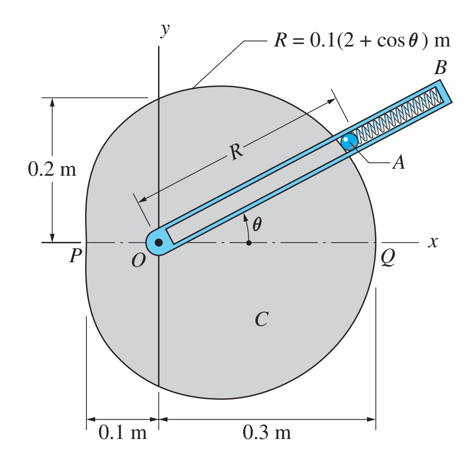


Fig. P13.79, P13.80

***13.80** El brazo OB del sistema descrito en el problema 13.79 rota con rapidez constante $\dot{\theta} = 20$ rad/s. Cuando $\theta = 60^\circ$, la fuerza ejercida por el resorte sobre la bola A es 12.5 N. Para esta posición obtenga la fuerza de contacto entre: (a) la bola y la rueda, y (b) la bola y la ranura.

13.81 El collarín A de masa m resbala sobre la varilla OB sin peso, que rota con una velocidad angular constante $\dot{\theta} = \omega$. Un perno unido al collarín está en la ranura vertical fija. Despreciando la fricción, determine: (a) la fuerza ejercida sobre el per-

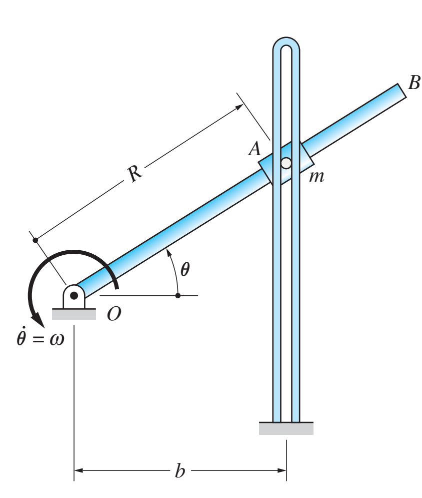


Fig. P13.81

no por la ranura y (b) la fuerza ejercida sobre el collarín por la varilla. Exprese sus respuestas en términos de θ, ω, m, b y g.

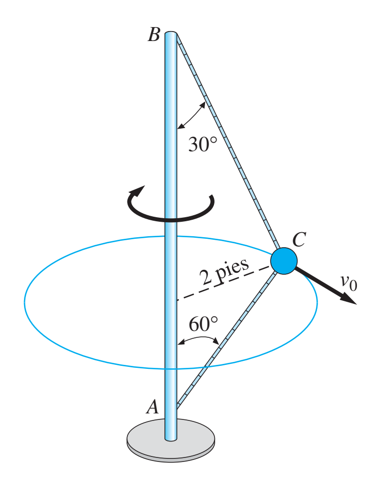


Fig. P13.82

13.82 La masa C está conectada por dos alambres al poste vertical AB. La rotación del poste hace que la masa viaje en el círculo horizontal que se muestra. Calcule la rapidez v_0 de la masa para igualar las tensiones en los alambres.

13.83 El brazo telescópico del manipulador mecánico rota respecto al eje vertical con rapidez angular constante $\dot{\theta} = 8$ rad/s. El ángulo ϕ se mantiene constante a 45°, pero la longitud del brazo varía como $L = 6 + 2 \operatorname{sen}(2\dot{\theta}t)$ pies, donde t está en segundos. Calcule las componentes cilíndricas de la fuerza ejercida por el brazo sobre el cabezal del manipulador de 120 lb como funciones del tiempo.

13.84 El brazo telescópico del manipulador mecánico rota respecto al eje vertical con rapidez angular constante $\dot{\theta} = 8$ rad/s. Al mismo tiempo, el brazo se extiende y desciende a razones constantes de $\dot{L} = 4$ pies/s y $\dot{\phi} = 2$ rad/s, respectivamente. Determine las componentes cilíndricas de la fuerza que el brazo ejerce sobre el cabezal del manipulador de 120 lb cuando $L = 6$ pies y $\phi = 45°$.

13.85 Se puede demostrar que la ecuación diferencial del movimiento para el péndulo simple es $\ddot{\theta} = -(g/L) \operatorname{sen} \theta$. Dado que $L = 9.81$ m y que el péndulo es liberado a partir del reposo en $\theta = 60°$, determine el tiempo requerido para que el péndulo alcance la posición $\theta = 0$. Compare su respuesta con la solución analítica de 1.686 s.

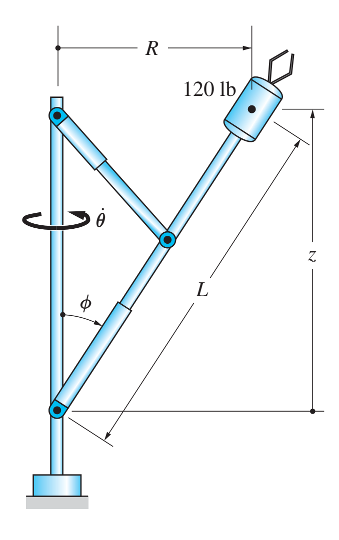


Fig. P13.83, P13.84

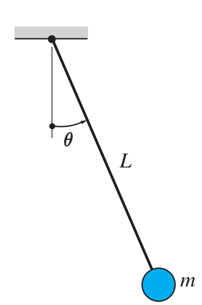


Fig. P13.85

13.86 El bloque de masa m se libera a partir del reposo en $\theta = 0$ para que resbale sobre la superficie circular. El coeficiente cinético de fricción entre el bloque y la superficie es μ. (a) Demuestre que la ecuación diferencial del movimiento del bloque es

$$\ddot{\theta} = (g/R)(\cos\theta - \mu \operatorname{sen}\theta) - \mu\dot{\theta}^2 \qquad (\dot{\theta} \geq 0)$$

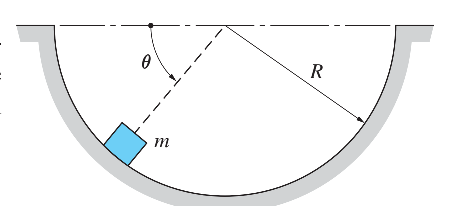
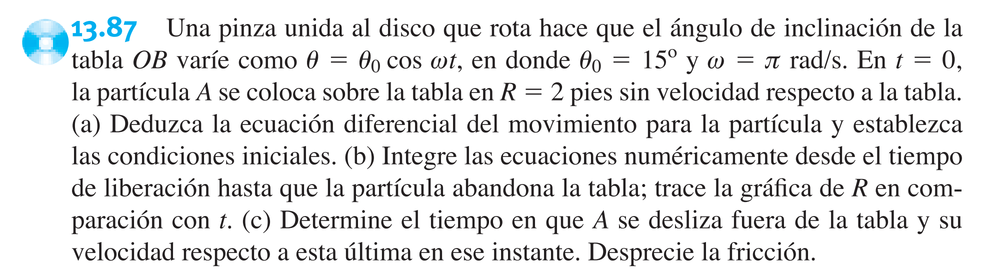


Fig. P13.86



(b) Empleando $R = 2$ m y $\mu = 0.3$, determine por integración numérica el valor de θ en donde el bloque llega al reposo por primera vez.



13.87 Una pinza unida al disco que rota hace que el ángulo de inclinación de la tabla OB varíe como $\theta = \theta_0 \cos \omega t$, en donde $\theta_0 = 15^\circ$ y $\omega = \pi$ rad/s. En $t = 0$, la partícula A se coloca sobre la tabla en $R = 2$ pies sin velocidad respecto a la tabla. (a) Deduzca la ecuación diferencial del movimiento para la partícula y establezca las condiciones iniciales. (b) Integre las ecuaciones numéricamente desde el tiempo de liberación hasta que la partícula abandona la tabla; trace la gráfica de R en comparación con t. (c) Determine el tiempo en que A se desliza fuera de la tabla y su velocidad respecto a esta última en ese instante. Desprecie la fricción.

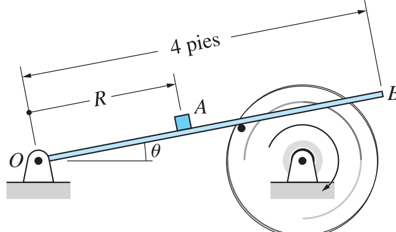


Fig. P13.87

13.88 La partícula de masa m resbala sin fricción dentro del recipiente cónico. La partícula es lanzada en $t = 0$ con velocidad $v_1 = 10$ pies/s, tangente al borde del recipiente. (a) Demuestre que las ecuaciones diferenciales del movimiento son

$$\ddot{\theta} = -\frac{2\dot{z}\dot{\theta}}{z}$$

$$\ddot{z} = \frac{z\dot{\theta}^2 \tan^2\beta - g}{1 + \tan^2\beta}$$

y establezca las condiciones iniciales. (b) Utilizando $\beta = 20^\circ$, resuelva numéricamente las ecuaciones del movimiento de $t = 0$ a $t = 2$ s; trace la gráfica z en comparación con θ. (c) De la solución numérica, encuentre la distancia vertical h bajo la cual la partícula no viajará.

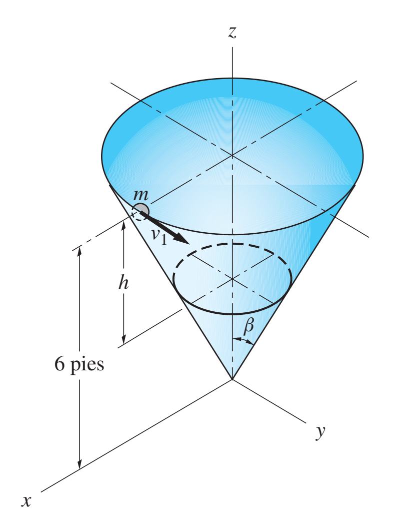
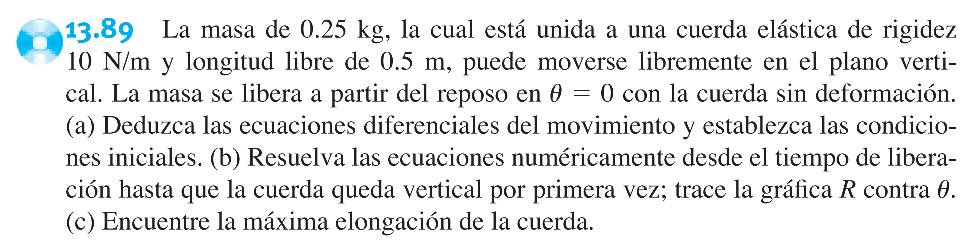


Fig. P13.88



13.89 La masa de 0.25 kg, la cual está unida a una cuerda elástica de rigidez 10 N/m y longitud libre de 0.5 m, puede moverse libremente en el plano vertical. La masa se libera a partir del reposo en $\theta = 0$ con la cuerda sin deformación. (a) Deduzca las ecuaciones diferenciales del movimiento y establezca las condiciones iniciales. (b) Resuelva las ecuaciones numéricamente desde el tiempo de liberación hasta que la cuerda queda vertical por primera vez; trace la gráfica R contra θ. (c) Encuentre la máxima elongación de la cuerda.

13.90 La masa de 0.25 kg del problema 13.89 se suelta a partir del reposo en $\theta = 0$ con la cuerda estirada a 0.25 m. (a) Deduzca las ecuaciones diferenciales del movimiento para la masa y establezca las condiciones iniciales. (b) Resuelva numéricamente las ecuaciones desde el tiempo en que se liberó hasta que la cuerda queda floja; trace la gráfica R en comparación con θ. (c) Determine el máximo valor de R y el valor de θ cuando la cuerda queda floja.

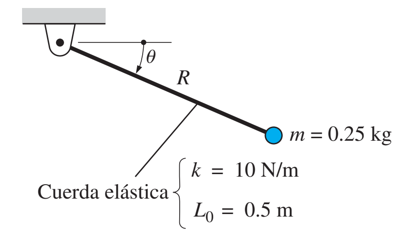


Fig. P13.89, P13.90

Repaso de ecuaciones

Cinemática en coordenadas normal-tangencial

$$v_n = 0 \quad v_t = v = \dot{s} \quad \text{(la velocidad es tangente a la trayectoria)}$$

$$a_n = v^2/\rho \quad a_t = \dot{v} = v\frac{dv}{ds}$$

s = distancia medida sobre la trayectoria de la partícula
ρ = radio de curvatura de la trayectoria
$\mathbf{e}_n$ apunta hacia el centro de curvatura
$\mathbf{e}_t$ está dirigido en la dirección de la velocidad

Cinemática del movimiento sobre una curva circular

$$v = R\dot{\theta}$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = R\dot{\theta}^2 \quad a_t = \dot{v} = R\ddot{\theta}$$

R = radio de la trayectoria

Cinemática en coordenadas polares y cilíndricas

$$v_R = \dot{R} \quad v_\theta = R\dot{\theta} \quad v_z = \dot{z}$$

$$a_R = \ddot{R} - R\dot{\theta}^2 \quad a_\theta = R\ddot{\theta} + 2\dot{R}\dot{\theta} \quad a_z = \ddot{z}$$

$\mathbf{e}_R$ apunta alejándose del origen
$\mathbf{e}_\theta$ apunta hacia donde se incrementa θ

Problemas de repaso

13.91 Un aeroplano realiza un bucle vertical de 1200 pies de radio. La rapidez del avión en lo alto del bucle es constante, 210 pies/s. Si el peso del piloto es de 175 lb, determine la fuerza de contacto entre éste y su asiento cuando el avión está en lo alto del bucle.

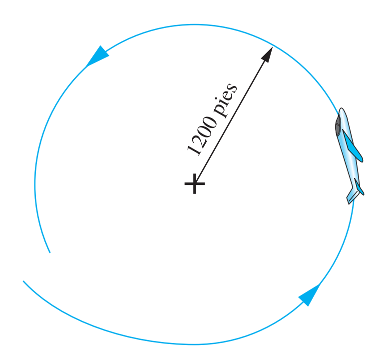


Fig. P13.91

13.92 Un automóvil de 3000 lb viaja con rapidez constante de 65 mi/h sobre un camino con el perfil $y = h\cos(2\pi x/b)$ pies, donde $h = 3$ pies y $b = 200$ pies. Determine la máxima fuerza normal entre las llantas y el camino.

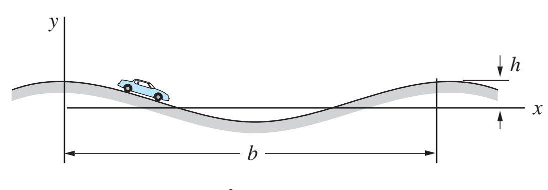


Fig. P13.92

13.93 Un satélite de 600 kg está en órbita circular alrededor de un planeta. El radio de la órbita es 8000 km y el periodo (tiempo para una órbita completa) es de 6 horas. Determine: (a) la fuerza gravitacional que actúa sobre el satélite y (b) la masa del planeta. Utilice $G = 6.493 \times 10^{-11}$ m^3/(kg · s^2) para la constante gravitacional universal.

13.94 La pipa de agua doblada, de sección transversal constante, rota respecto al eje vertical *AB* con la velocidad angular constante $\dot{\theta} = 160$ rev/min. Si la rapidez del

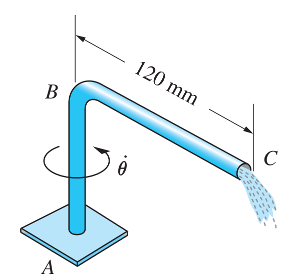


Fig. P13.94

agua en la parte AB de la pipa es 600 mm/s (constante), encuentre la magnitud de la aceleración de una partícula de agua justo antes de salir de la pipa en C.

13.95 El automóvil viaja sobre una curva que tiene la forma de la espiral $R = (2b/\pi)\,\theta$, en donde $b = 10$ m. Si $\dot{\theta} = 0.5$ rad/s (constante), determine la rapidez del automóvil y la magnitud de la aceleración cuando $\theta = 3\pi/2$ rad (punto A).

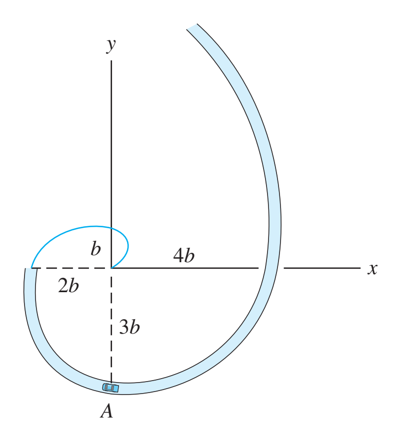


Fig. P13.95

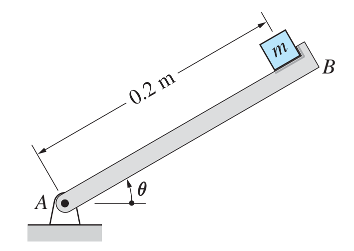


Fig. P13.96

13.96 La barra AB arranca a partir del reposo en $\theta = 0$ con la aceleración angular constante $\ddot{\theta} = 6$ rad/s^2. El bloque de masa m empieza a resbalar sobre la barra cuando $\theta = 45°$. Determine el coeficiente de fricción estática entre el bloque y la barra.

13.97 Un proyectil se lanza en B con la velocidad v_0 inclinado un ángulo θ_0 respecto a la horizontal. Si se sabe que los radios de curvatura de la trayectoria en A y B son $\rho_A = 40.8$ m y $\rho_B = 63.1$ m, obtenga θ_0 y v_0. Desprecie la resistencia del aire.

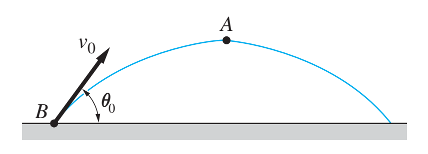


Fig. P13.97

13.98 El paquete de 5 kg resbala por una rampa parabólica. En la posición que se muestra, la rapidez del paquete es de 2.4 m/s. Determine la fuerza de contacto normal entre la rampa y el paquete en esta posición.

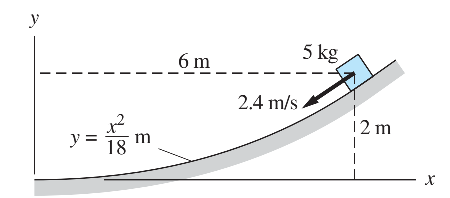


Fig. P13.98

13.99 El carrete de 9 pulg de radio se pone en movimiento a partir del reposo en la posición indicada. La rapidez angular $\dot{\theta}$ del carrete varía con el tiempo, como se muestra en el diagrama. Obtenga el tiempo requerido para desenrollar 150 pies de cable.

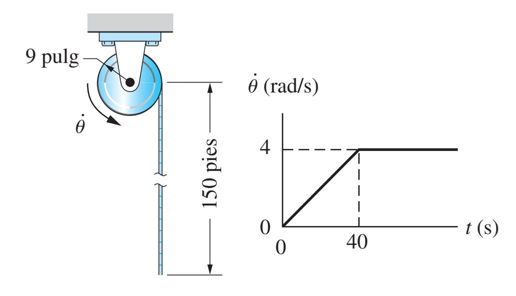


Fig. P13.99

13.100 Un automóvil viaja con rapidez constante sobre una pista circular peraltada cuyo radio es de 250 pies. Si el ángulo de peralte es $\beta = 12^\circ$ y el coeficiente de fricción estática entre la pista y las llantas es 0.8, encuentre la máxima rapidez posible del automóvil.

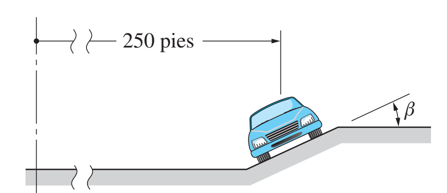


Fig. P13.100

13.101 La cuerda *ABC* está unida al collar *A* deslizante y pasa sobre el carrete *B*. La cuerda se mantiene tensa gracias a un peso unido al extremo *C*. El collar se mueve hacia la izquierda con una rapidez constante de 1.6 m/s. Cuando el collar está en la posición $\theta = 50^\circ$, determine: (a) la velocidad del punto *C* y $\dot{\theta}$, y (b) la aceleración del punto *C*.

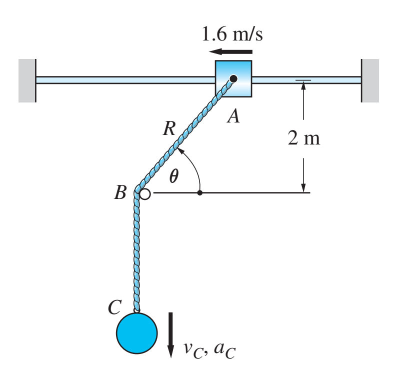


Fig. P13.101

13.102 La partícula de masa *m* se coloca sobre la superficie cilíndrica de radio *R* en $\theta = 0$. Entonces la partícula se desplaza ligeramente y se libera a partir del reposo. Obtenga la rapidez de la partícula como una función del ángulo θ. ¿En qué valor de θ la partícula pierde contacto con la superficie? Desprecie la fricción.

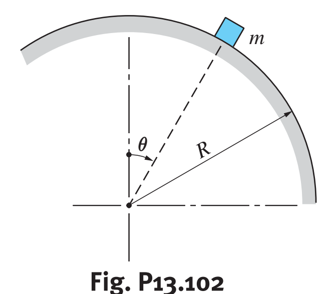


Fig. P13.102

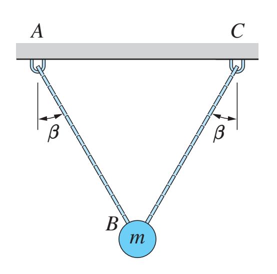


Fig. P13.103

13.103 La masa *m* está suspendida de dos alambres, como se muestra, cuando el alambre *AB* se corta. Si $\beta = 35°$, determine la fuerza en el alambre *BC*: (a) antes de que *AB* sea cortado y (b) justo después de cortar *AB*. (c) ¿Para qué valor de β serían iguales los resultados de las partes (a) y (b)?

13.104 Una partícula se mueve sobre la superficie de una esfera de radio *b*. La descripción del movimiento en coordenadas cilíndricas es $\theta = \omega t$, $R = b \text{ sen } \omega t$, $z = b \cos \omega t$, en donde ω es una constante. Encuentre: (a) la máxima rapidez y (b) la máxima magnitud del vector aceleración de la partícula.

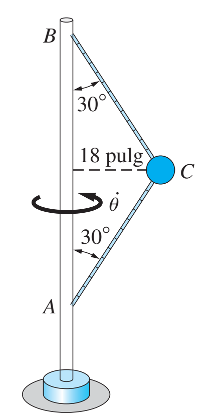


Fig. P13.105

13.105 La masa en *C* está unida al poste vertical *AB* gracias a dos alambres. El montaje rota respecto a *AB* con rapidez angular constante $\dot{\theta}$. Si la fuerza en el alambre *BC* es el doble de la fuerza en *AC*, determine el valor de $\dot{\theta}$.

13.106 El collar *A* se desliza sobre la varilla *OB*, que rota en sentido contrario a las manecillas del reloj. Obtenga el vector velocidad de *A* cuando *OB* es vertical, dado que la rapidez del extremo *B* es 0.4 m/s en esa posición.

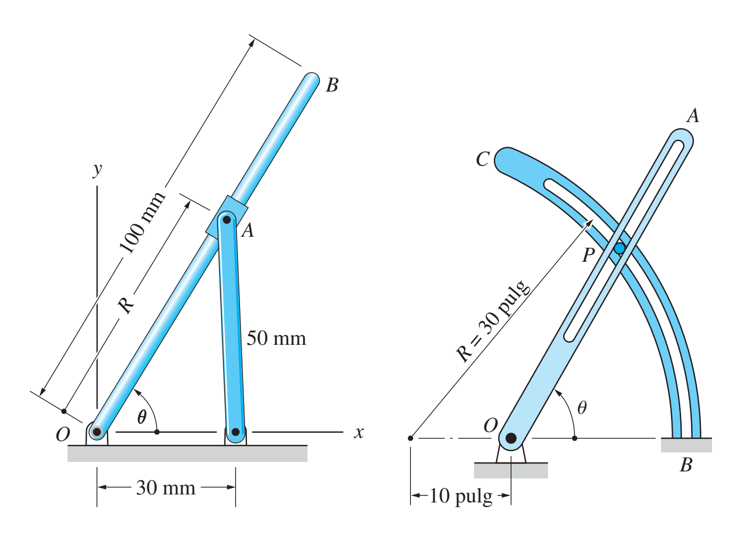


Fig. P13.106 **Fig. P13.107**

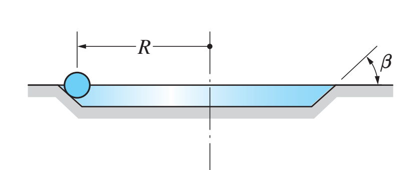


Fig. P13.108

13.107 El perno *P* se desliza en las ranuras del brazo que rota *OA* y de la barra circular fija *BC*. Si *OA* rota con la rapidez angular constante $\dot{\theta} = 2$ rad/s, encuentre la rapidez de *P* cuando $\theta = 60°$.

13.108 La trayectoria de una pelota que rueda sobre una pista circular sin fricción es un círculo de radio *R*. La pista se encuentra peraltada a un ángulo β. Obtenga la rapidez de la pelota.

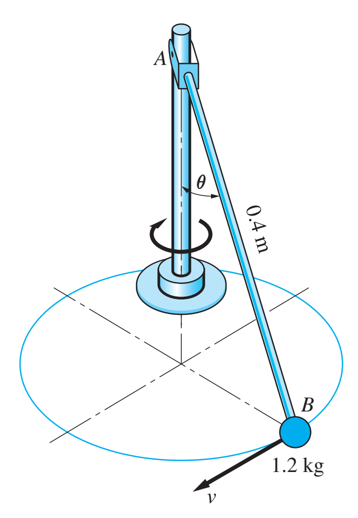


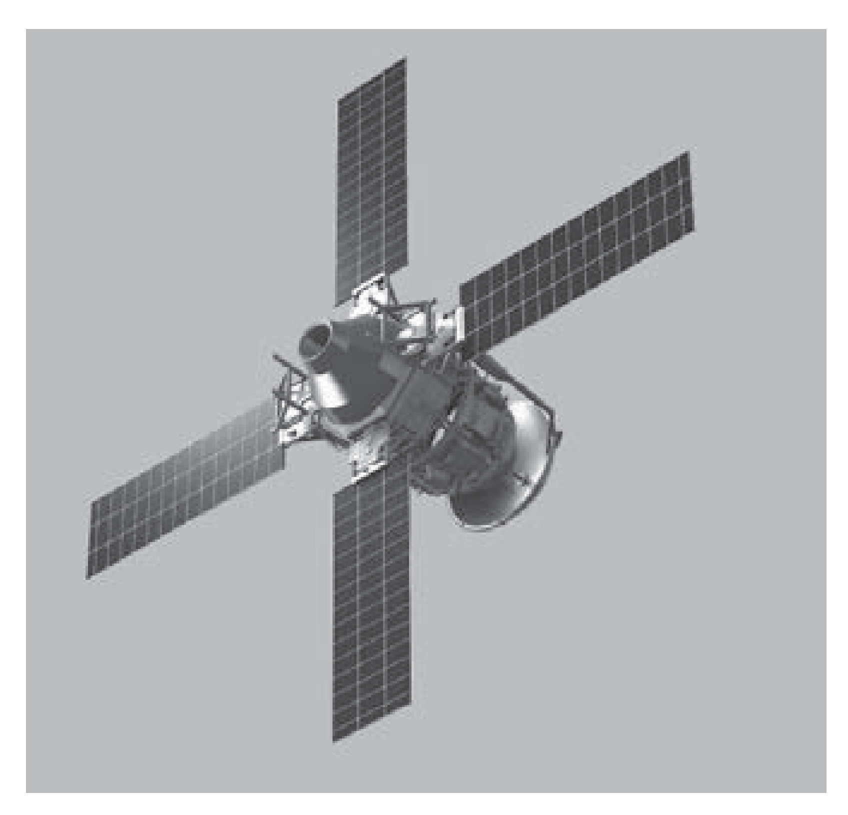
Fig. P13.109

13.109 Un péndulo está conectado al poste vertical por medio de una abrazadera en *A*. La masa *B* de la pesa es 1.2 kg y la masa del brazo *AB* es despreciable. El poste rota con una rapidez angular constante, haciendo que la pesa recorra un círculo horizontal. Si $\theta = 85°$, determine: (a) la fuerza tensora en *AB* y (b) la rapidez *v* de la pesa.

14

Principios de trabajo-energía y de impulso-cantidad de movimiento para una partícula





Se requiere bastante energía para lanzar una nave espacial para un viaje interplanetario. El problema 14.48 muestra cómo calcular la energía necesaria para escapar del campo gravitacional terrestre. (©iStockphoto.com/Konstantin Inozemtsev)

14.1 Introducción

En el método de fuerza-masa-aceleración, que se utilizó en los capítulos 12 y 13, las ecuaciones de movimiento de la partícula se obtuvieron directamente de la segunda ley de Newton, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. La solución de esas ecuaciones requirió dos integraciones, la primera para obtener la velocidad y la segunda para determinar la posición.

Los métodos de trabajo-energía y de impulso-cantidad de movimiento usan formas integrales de las ecuaciones de movimiento. Si se integran ambos lados de $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ respecto a la *posición*, se obtienen las ecuaciones que se utilizan en el método de trabajo-energía. La integración de $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ respecto al *tiempo* conduce a las ecuaciones del método de impulso-cantidad de movimiento. Las formas integrales de las ecuaciones de movimiento pueden ser muy eficaces en la solución de ciertos tipos de problemas. El método de trabajo-energía es útil para calcular el cambio de

rapidez durante un desplazamiento de la partícula. El método de impulso-cantidad de movimiento es más adecuado para determinar el cambio de velocidad durante un intervalo de tiempo.

14.2 Trabajo de una fuerza

a. Definición de trabajo

Se empieza por definir el trabajo de una fuerza, concepto que desempeña un papel fundamental en el principio de trabajo-energía que se deriva en el siguiente apartado. Sea A el punto de aplicación de una fuerza $\mathbf{F}$, se sigue la trayectoria $\mathscr{L}$ que se muestra en la figura 14.1. El vector de posición de A (medido desde un punto fijo O) se denota por $\mathbf{r}$ al tiempo t y $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ al tiempo $t + dt$. Observe que $d\mathbf{r}$, el desplazamiento del punto durante el intervalo de tiempo infinitesimal dt, es tangente a la trayectoria en A. El trabajo diferencial dU realizado por la fuerza $\mathbf{F}$ cuando su punto de aplicación ejecuta el desplazamiento $d\mathbf{r}$ está definido por



$$dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \tag{14.1}$$

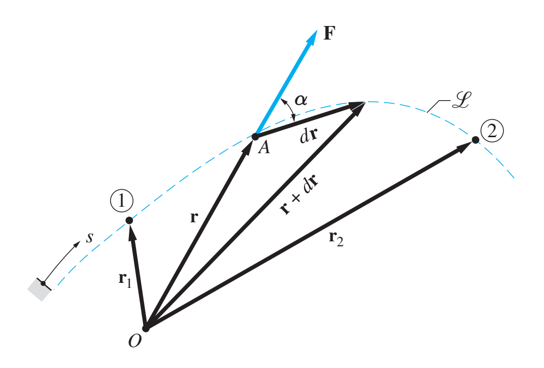


Fig. 14.1

El trabajo hecho por $\mathbf{F}$ cuando el punto A se mueve de la posición 1 a 2 se obtiene al integrar la ecuación (14.1) sobre la trayectoria $\mathscr{L}$:

$$U_{1-2} = \int_{\mathscr{L}} dU = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \tag{14.2}$$

El trabajo es una cantidad escalar que puede ser positiva, negativa o cero. Su dimensión es $[FL]$ con unidades lb · pie o lb · pulg en el sistema inglés y N · m o *joule* (J) (1 J = 1 N · m) en el SI.

Al introducir la notación $ds = |d\mathbf{r}|$ y $F = |\mathbf{F}|$, la ecuación (14.1) puede escribirse en la forma

$$dU = F \cos \alpha \, ds \tag{14.3}$$

donde α es el ángulo entre $\mathbf{F}$ y $d\mathbf{r}$, como se muestra en la figura 14.1. Al consultar la figura 14.2(a), se observa que $F \cos \alpha = F_t$ es la componente de $\mathbf{F}$ que es tangente a la trayectoria en A.

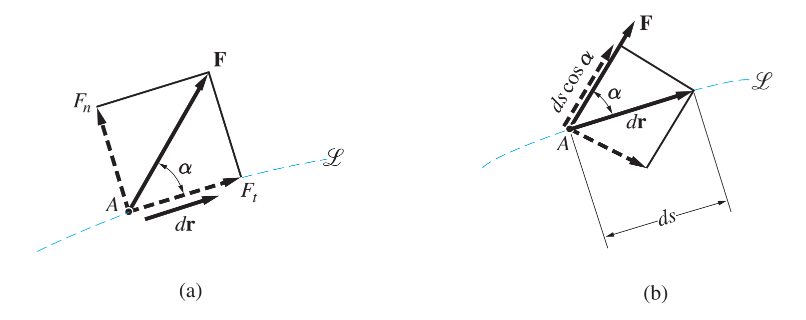


Fig. 14.2

Por tanto, la ecuación (14.2) es equivalente a

$$U_{1-2} = \int_{s_1}^{s_2} F_t \, ds \tag{14.4}$$

donde s es la longitud de la trayectoria medida desde un punto fijo arbitrario sobre la trayectoria que se muestra en la figura 14.1. La componente normal F_n, al ser perpendicular a la curva, no realiza trabajo ($\mathbf{F}_n \cdot d\mathbf{r} = 0$). Ya que la componente tangencial F_t hace todo el trabajo, se llama *componente de trabajo* de **F**. Así, el incremento de trabajo puede verse como

$$\begin{aligned} dU &= F_t \, ds \\ &= (\text{componente de trabajo de } \mathbf{F}) \times (\text{magnitud de } d\mathbf{r}) \end{aligned}$$

En la figura 14.3 se muestra una interpretación geométrica de la ecuación (14.4): el trabajo U_{1-2} es igual al área bajo el diagrama $F_{t\text{-}s}$.

La figura 14.2(b) permite obtener otra interpretación del incremento de trabajo. Observe que $ds \cos \alpha$ es la componente de $d\mathbf{r}$ que es paralela a **F**. A ésta se le llama *componente de absorción de trabajo* del desplazamiento diferencial. Por tanto, el incremento de trabajo es

$$\begin{aligned} dU &= F(ds \cos \alpha) \\ &= (\text{magnitud de } \mathbf{F}) \times (\text{componente de absorción de trabajo de } d\mathbf{r}) \end{aligned}$$

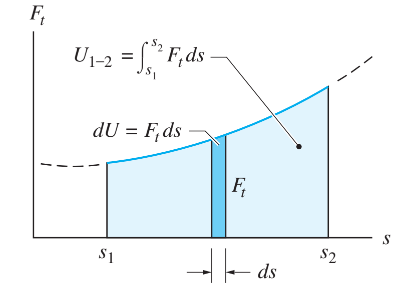


Fig. 14.3

Otra expresión útil para el trabajo realizado por una fuerza resulta al escribir el producto punto $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ en coordenadas rectangulares:

$$\begin{aligned} U_{1-2} &= \int_{\mathscr{L}} (F_x \, dx + F_y \, dy + F_z \, dz) \\ &= \int_{x_1}^{x_2} F_x \, dx + \int_{y_1}^{y_2} F_y \, dy + \int_{z_1}^{z_2} F_z \, dz \end{aligned} \tag{14.5}$$

donde dx, dy y dz son las componentes de $d\mathbf{r}$ y (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2) son las coordenadas de los puntos 1 y 2, respectivamente.

b. *Trabajo de una fuerza constante*

Si la fuerza **F** es constante en magnitud y dirección, la ecuación (14.2) queda:



$$U_{1-2} = \mathbf{F} \cdot \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} d\mathbf{r} = \mathbf{F} \cdot \Delta\mathbf{r}$$

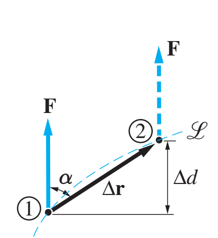


Fig. 14.4

donde $\Delta\mathbf{r}$ es el vector de desplazamiento de la posición 1 a la posición 2, como se muestra en la figura 14.4.

Sea α el ángulo entre **F** y $\Delta\mathbf{r}$, con Δd el desplazamiento en la dirección de **F**. Empleando la definición del producto punto, el trabajo hecho por **F** se convierte en $U_{1-2} = \mathbf{F} \cdot \Delta\mathbf{r} = F\,|\Delta\mathbf{r}| \cos\alpha$, que puede escribirse como*

$$U_{1-2} = F\Delta d \qquad (14.6)$$

Observe que Δd *no* es el desplazamiento del punto de aplicación de **F**; es la componente de absorción de trabajo del desplazamiento.

De la ecuación (14.6) se observa que el trabajo hecho por una fuerza constante sólo depende de las posiciones inicial y final de su punto de aplicación; es decir, el trabajo es independiente de la trayectoria $\mathscr{L}$.

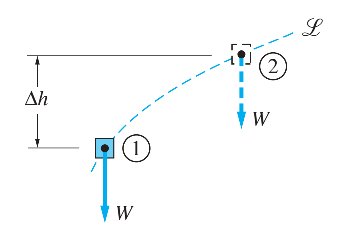


Fig. 14.5

Si un objeto está en las cercanías de la superficie terrestre, su peso puede considerarse como una fuerza constante y la ecuación (14.6) se puede emplear para calcular su trabajo. La figura 14.5 muestra tal objeto de peso W, que se mueve de la posición 1 a la 2. Observe que el incremento Δh en la elevación también es la componente de absorción de trabajo del desplazamiento. Por tanto, el trabajo hecho por W es

$$U_{1-2} = -W\Delta h \qquad (14.7)$$

El signo "menos" en esta ecuación se debe a que W y el incremento en la elevación tienen direcciones opuestas. Como es el caso para todas las fuerzas constantes, el trabajo hecho por W es independiente de la trayectoria.

c. *Trabajo de una fuerza central*

Una *fuerza central* tiene dos características que la definen: 1. siempre está dirigida hacia un punto fijo, y 2. su magnitud es una función de la distancia entre el punto fijo y el punto de aplicación de la fuerza. La atracción gravitacional y la fuerza ejercida por un resorte son dos ejemplos comunes de una fuerza central.

Considere el trabajo realizado por la fuerza central **F**, que se muestra en la figura 14.6, conforme su punto de aplicación se mueve la distancia infinitesimal ds sobre la trayectoria $\mathscr{L}$. De la ecuación (14.3), el incremento de trabajo es

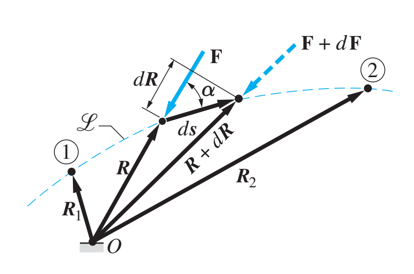


Fig. 14.6

$$dU = -F \cos\alpha \, ds = -F \, dR$$

*La ecuación (14.6) es la base para la "definición" común de trabajo como "fuerza por distancia". Es importante recordar que esta ecuación es válida sólo para una fuerza constante; la definición general de trabajo está dada por la ecuación (14.2).

donde dR es el incremento en la distancia entre el punto de aplicación de **F** y el punto fijo O. El signo "menos" es el resultado de **F** y dR cuando se tienen direcciones opuestas. El trabajo de **F** durante un desplazamiento finito de la posición 1 a la posición 2 es

$$U_{1-2} = -\int_{R_1}^{R_2} F\, dR \tag{14.8}$$

Note que el trabajo es independiente de la trayectoria $\mathscr{L}$, sólo depende de los valores inicial y final de R.

1. Trabajo de la fuerza de un resorte Un resorte "ideal" tiene un peso despreciable y su deformación (elongación o contracción) es proporcional a la fuerza que la ocasiona. La mayoría de los resortes en espiral se aproximan de manera muy cercana a esas condiciones ideales. La proporcionalidad entre la fuerza F y la elongación resultante δ se expresa en la forma

$$F = k\delta \tag{14.9}$$

donde k es la *rigidez* del resorte o *constante del resorte*. La dimensión de k es $[F/L]$; sus unidades son lb/pie, lb/pulg o N/m. Otra propiedad importante de un resorte es su longitud no deformada, que también se llama *longitud libre*. Si se denota la longitud libre con L_0 y la longitud deformada con L, la elongación del resorte es $\delta = L - L_0$.

La figura 14.7(a) muestra un resorte en espiral de longitud deformada L. Como la fuerza F ejercida por el resorte es una fuerza central, su trabajo puede calcularse empleando la ecuación (14.8). El incremento de elongación $d\delta$ que se muestra en la figura es equivalente a dR en la ecuación (14.8) con ambos representando el cambio incremental en la distancia entre el punto fijo O y el punto de aplicación de la fuerza. Por tanto, al reemplazar dR en la ecuación (14.8) con $d\delta$, se obtiene el trabajo hecho por el resorte conforme su deformación cambia de δ_1 a δ_2:

$$U_{1-2} = -\int_{\delta_1}^{\delta_2} F\, d\delta = -k\int_{\delta_1}^{\delta_2} \delta\, d\delta = -\frac{1}{2}k(\delta_2^2 - \delta_1^2) \tag{14.10}$$

Las ecuaciones (14.9) y (14.10) son válidas para elongación (δ positiva) y también para contracción (δ negativa).

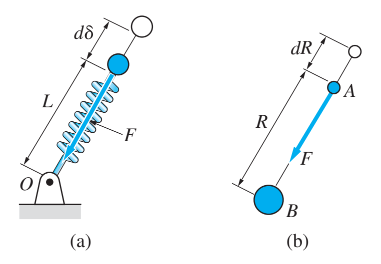


Fig. 14.7

2. Trabajo de una fuerza gravitacional El trabajo de la fuerza gravitacional (peso) que actúa sobre un cuerpo cerca de la superficie terrestre puede calcularse a partir de la ecuación (14.8).

Lejos de la superficie de la Tierra, el trabajo debe determinarse con la ley de la gravitación de Newton

$$F = G\frac{m_A m_B}{R^2} \qquad \text{(11.17, repetida)}$$

donde F es la fuerza de atracción entre dos cuerpos de masas m_A y m_B separadas por la distancia R, y G representa la constante gravitacional universal.

La fuerza F que se muestra en la figura 14.7(b) representa la fuerza gravitacional ejercida por el cuerpo B sobre otro A. Cuando se sustituye la ecuación (11.17) en la (14.8), el trabajo de F será

$$U_{1-2} = -Gm_A m_B \int_{R_1}^{R_2} \frac{dR}{R^2} = Gm_A m_B\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) \qquad (14.11)$$

donde R_1 y R_2 son las distancias inicial y final entre los cuerpos.

Una aplicación común de la ecuación (14.11) es en la mecánica espacial, particularmente en el vuelo de satélites. En ese caso, $m_A = M_T$ (la masa de la Tierra) y R es la distancia al satélite desde el centro de la Tierra.

14.3 Principio de trabajo y energía cinética

El principio de trabajo y energía cinética (también conocido como principio de trabajo-energía) establece que el trabajo realizado por todas las fuerzas que actúan sobre una partícula (el trabajo de la fuerza resultante) es igual al cambio en la energía cinética de la partícula. Este principio, que forma la base para el método de trabajo-energía del análisis cinético, se deduce al integrar la segunda ley de Newton sobre la trayectoria de la partícula.

Considere una partícula de masa m que se mueve de la posición 1 a la 2 sobre la trayectoria $\mathscr{L}$ con su coordenada de trayectoria cambiando de s_1 a s_2. Sea que $\Sigma\mathbf{F}$ denote la fuerza resultante (suma vectorial de todas las fuerzas) que actúan sobre la partícula. Aplicando la segunda ley de Newton en la dirección tangente a la trayectoria, se obtiene

$$\Sigma F_t = ma_t \qquad (14.12)$$

De acuerdo con la ecuación (13.9), $a_t = v\,dv/ds$, que puede sustituirse en la ecuación (14.12), resulta en $\Sigma F_t = mv\,dv/ds$ o

$$\Sigma F_t\,ds = mv\,dv$$

Al integrar sobre la trayectoria $\mathscr{L}$, se obtiene

$$\int_{s_1}^{s_2} \Sigma F_t\,ds = \int_{v_1}^{v_2} mv\,dv$$

donde v_1 y v_2 son la rapidez de la partícula en los puntos extremos 1 y 2 de la trayectoria. El resultado de la integración es

$$U_{1-2} = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) \qquad (14.13)$$

Por definición, la *energía cinética* de una partícula es

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \qquad (14.14)$$

de manera que la ecuación (14.13) adquiere la forma

$$U_{1-2} = T_2 - T_1 = \Delta T \tag{14.15}$$

La ecuación (14.15) es el *principio de trabajo-energía* (o el balance de trabajo y energía cinética):

Trabajo hecho por la fuerza resultante que actúa sobre una partícula
= cambio en la energía cinética de la partícula.

Cuando este principio se utiliza en el análisis cinético, el proceso se conoce como el *método de trabajo-energía*.

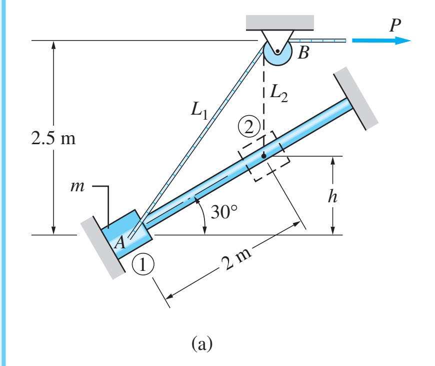
Ya que el principio de trabajo-energía resulta de integrar la segunda ley de Newton, entonces no es independiente. Por tanto, cualquier problema que pueda resolverse con el método de trabajo-energía también puede, en teoría, resolverse con el de fuerza-masa-aceleración (FMA).

Las ventajas principales del método de trabajo-energía respecto al método FMA son las siguientes:

1. En problemas donde el trabajo puede calcularse sin integración (como en los casos que se analizaron en el apartado anterior), el cambio en la rapidez de la partícula puede obtenerse fácilmente con un mínimo de cálculos. (Si la integración debe emplearse para calcular el trabajo, el método de trabajo-energía, en general, no tiene ventaja sobre la integración de la aceleración determinada con el método FMA.)
2. Sólo deben considerarse las fuerzas que realizan trabajo; en el análisis no se incluyen las que no lo hacen.
3. Si la posición final, es decir, la posición 2, se elige de modo arbitrario, entonces el método de trabajo-energía determinará la rapidez como una función de la posición de la partícula.

Precaución Cuando se utiliza el método de trabajo-energía deben considerarse los siguientes puntos:

- El trabajo de una fuerza es una cantidad *escalar* (positiva, negativa o cero) que está asociada con un *cambio en la posición* del punto de aplicación de la fuerza. (La frase "trabajo en una posición dada" no tiene sentido.)
- La energía cinética es una cantidad *escalar* (siempre positiva) asociada con la rapidez de una partícula en un instante dado. Las unidades de la energía cinética coinciden con las de trabajo: N · m, lb · pie, y así sucesivamente.
- El principio de trabajo-energía, $U = \Delta T$, es una ecuación *escalar*. No obstante que eso es obvio, un error común es aplicar el principio de trabajo-energía de manera separada en las direcciones x, y o z, lo que, de hecho, es incorrecto.
- Cuando se aplica el método de trabajo-energía, puede utilizarse un *diagrama de fuerza activa*, que sólo muestra las fuerzas que realizan trabajo, en lugar del diagrama de cuerpo libre convencional. Un proceso conveniente para determinar el diagrama de fuerza activa consiste en dibujar primero el DCL de la partícula en una posición arbitraria y después eliminar o marcar las fuerzas que no efectúan trabajo. En este libro, estas últimas se muestran en el DCL como flechas discontinuas.



(a)

Problema de ejemplo **14.1**

La figura (a) muestra un collarín A de masa $m = 1.8$ kg que resbala sobre una varilla sin fricción que se encuentra en el plano vertical. Una cuerda está unida a A y pasa sobre una polea en B. La fuerza horizontal constante P se aplica al final de la cuerda. El collarín se suelta a partir del reposo en la posición 1; 1. determine la rapidez del collarín en la posición 2 si $P = 20$ N; 2. encuentre el valor menor de P para el que el collarín alcanzará la posición 2.

Solución

Análisis preliminar

Se pide determinar el cambio en la rapidez del collar entre dos posiciones especificadas, que de manera ideal es una tarea adecuada para el método de trabajo-energía.

En la figura (b) se muestra el DCL del collar. Sólo el peso W de este último y la fuerza P aplicada por la cuerda realizan trabajo sobre el collarín. La fuerza normal de contacto N_A, no efectúa trabajo porque es perpendicular a la varilla (la trayectoria del collar); por tanto, en la figura N_A se indica como una flecha discontinua, lo que indica que no es parte del diagrama de fuerza activa (recuerde que un diagrama de fuerza activa puede obtenerse al eliminar en el DCL todas las fuerzas que no realizan trabajo).

(b)

Trabajo de W El trabajo realizado por el peso $W = mg$ del collarín puede obtenerse de la ecuación (14.7):

$$U_{1-2} = -mgh \tag{a}$$

donde h es el cambio en la elevación que se muestra en la figura (a).

Trabajo de P En la figura (b) P es una fuerza central (siempre está dirigida hacia B) de magnitud constante. Así, su trabajo puede calcularse mediante la ecuación (14.8):

$$U_{1-2} = -P\int_{L_1}^{L_2} dL = P(L_1 - L_2) \tag{b}$$

donde L_1 y L_2 son las longitudes que se muestran en la figura (a).

Parte 1

Sea v_2 la rapidez del collar en la posición 2, entonces se tiene $T_1 = 0$ (el collarín está en reposo en la posición 1) y $T_2 = \frac{1}{2}mv_2^2$. Así, el principio de trabajo-energía implica

$$U_{1-2} = T_2 - T_1$$

$$-mgh + P(L_1 - L_2) = \frac{1}{2}mv_2^2 - 0 \tag{c}$$

El trabajo U_{1-2} resultó al sumar las contribuciones de W y P en las ecuaciones (a) y (b). De la figura (a) se obtiene que $h = 2 \text{ sen } 30^{\circ} = 1.0$ m, $L_1 = \sqrt{(2\cos 30^{\circ})^2 + (2.5)^2} =$ 3.041 m, y $L_2 = 2.5 - 1.0 = 1.5$ m. Cuando se sustituyen esos valores, junto con $m = 1.8$ kg y $P = 20$ N, en la ecuación (c), se obtiene

$$-(1.8)(9.81)(1.0) + 20(3.041 - 1.5) = \frac{1}{2}(1.8)v_2^2$$

que implica

$$v_2 = 3.82 \text{ m/s}$$ *Respuesta*

Parte 2

En esta parte del problema, el collarín también está en reposo en la posición 2, de modo que $T_1 = T_2 = 0$. Entonces el problema se reduce a encontrar el valor de P para el que $U_{1-2} = 0$, es decir,

$$-mgh + P(L_1 - L_2) = 0$$

La solución es

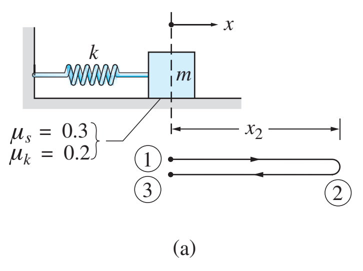
$$P = \frac{mgh}{L_1 - L_2} = \frac{(1.8)(9.81)(1.0)}{3.041 - 1.5} = 11.46 \text{ N} \qquad \textit{Respuesta}$$

Notas

- Si el valor dado de P en la parte 1 fuera menor que 11.46 N, U_{1-2} sería negativo, resultando en una rapidez imaginaria (raíz cuadrada de un número negativo) en la posición 2. Esto indicaría la imposibilidad de que el collarín alcance la posición 2.
- Si la fricción entre la varilla y el collarín no fuera despreciable, se tendría que agregar la fuerza de fricción cinética $F_k = \mu_k N_A$ en el diagrama de fuerza activa de la figura (b). Como N_A varía con la coordenada de posición x, entonces F_k también dependería de x. Por tanto, la integración requeriría calcular el trabajo de la fuerza de fricción. Así el método de trabajo-energía no tendría ventaja sobre el método FMA. Sin embargo, en casos en los que la fuerza normal es constante, el trabajo de la fuerza de fricción puede obtenerse sin integración (véase el problema de ejemplo 14.2).

Problema de ejemplo **14.2**

Como se muestra en la figura (a), el bloque de masa $m = 1.6$ kg se coloca sobre un plano horizontal unido a un resorte ideal. Los coeficientes estático y cinético de fricción entre el bloque y el plano se presentan en la figura. El resorte tiene la rigidez de $k = 30$ N/m y no está deformado cuando $x = 0$. El bloque se lanza en $x = 0$ con la velocidad de 6 m/s hacia la derecha; 1. determine el valor de x cuando el bloque llega al reposo por primera vez; 2. muestre que el bloque no permanece en reposo en la posición encontrada en la parte 1; 3. obtenga la rapidez del bloque cuando llega a $x = 0$ por segunda vez.

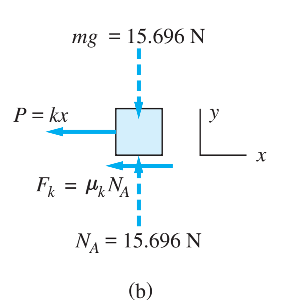


(a)

Solución

Parte 1

La figura (b) muestra el DCL del bloque, aceptando el movimiento hacia la derecha. El peso $mg = (1.6)(9.81) = 15.696$ N y la fuerza de contacto normal N_A se muestran como flechas discontinuas ya que no realizan trabajo (las fuerzas son perpendiculares a la trayectoria del bloque). Sin duda, debe calcularse N_A, porque ésta determina la fuerza de fricción cinética F_k, que efectúa trabajo. De $\Sigma F_y = 0$, se obtiene $N_A = mg = 15.696$ N. Así $F_k = \mu_k N_A = (0.2)(15.696) = 3.139$ N. Observe que F_k es constante (N_A es constante) y como se opone al movimiento entonces su trabajo es negativo.



(b)

La única otra fuerza que realiza trabajo es la del resorte $P = kx$ (en este caso, el desplazamiento x del bloque coincide con la elongación del resorte).

Aplicando el principio de trabajo-energía entre la posición 1 de lanzamiento y la posición 2 de reposo, se obtiene

$$U_{1-2} = T_2 - T_1$$

$$-\frac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2) - F_k x_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

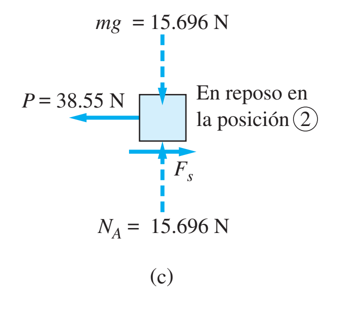
$$-\frac{1}{2}(30)(x_2^2 - 0) - 3.139x_2 = 0 - \frac{1}{2}(1.6)(6)^2$$

Las dos soluciones son $x_2 = 1.2850$ m y -1.4942 m. La velocidad de lanzamiento fue hacia la derecha, entonces sólo la raíz positiva tiene significado físico; es decir,

$$x_2 = 1.285 \text{ m}$$ *Respuesta*



Parte 2



(c)

En la figura (c) se muestra el DCL del bloque en reposo en la posición 2. La fuerza del resorte $P = kx_2 = (30)(1.2850) = 38.55$ N, que tiende a jalar al bloque hacia la izquierda, es opuesta a la fuerza de fricción estática F_s. En esta posición se tiene equilibrio sólo si $F_s = P = 38.55$ N. La máxima fuerza de fricción posible es $F_{\max} = \mu_s N_A = (0.3)(15.696) = 4.709$ N. Como $F_s > F_{\max}$, el equilibrio no es posible, entonces el bloque iniciará su movimiento hacia la izquierda.



Parte 3

En la figura (a), el 3 denota la posición del bloque cuando llega a $x = 0$ por segunda vez. Para obtener la rapidez del bloque en esta posición, se aplica el principio de trabajo-energía entre las posiciones 1 y 3 (se lograría el mismo resultado con las posiciones 2 y 3). Es cero el trabajo neto de la fuerza del resorte, porque este último no está deformado en ambas posiciones. El trabajo hecho por la fuerza de fricción cinética es $-F_k x_2$ cuando el bloque se mueve de 1 a 2 y $-F_k x_2$ entre 2 y 3 (recuerde que el trabajo de la fuerza de fricción siempre es negativo) para un total de $-2F_k x_2$. Por tanto, el principio de trabajo-energía da

$$U_{1-3} = T_3 - T_1$$

$$-2F_k x_2 = \frac{1}{2}m(v_3^2 - v_1^2)$$

$$-2(3.139)(1.2850) = \frac{1}{2}(1.6)(v_3^2 - 6^2)$$

que implica

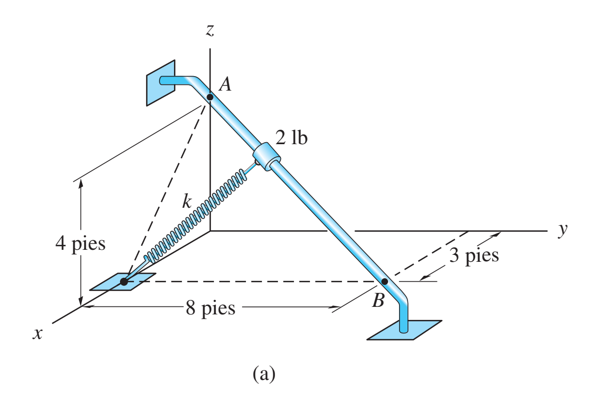
$$v_3 = 5.09 \text{ m/s}$$ *Respuesta*

Nota

Si v_3 fuera imaginaria (la raíz cuadrada de un número imaginario), se concluiría que el bloque no logra alcanzar la posición 3 porque llegaría al reposo en algún punto entre las posiciones 2 y 3. Esta posición de reposo podría determinarse con otra aplicación del principio de trabajo-energía.

Problema de ejemplo **14.3**

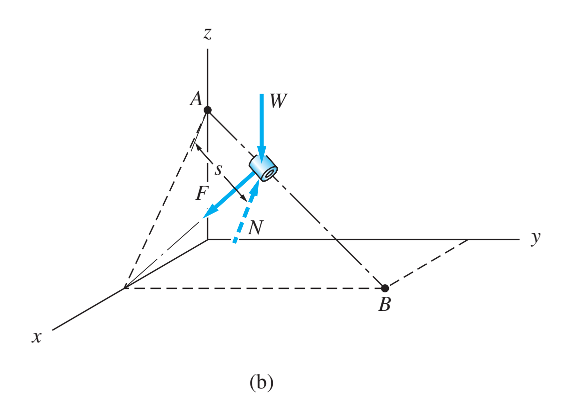
En la figura (a), el collar de 2 lb resbala sobre la varilla guía con fricción despreciable. La longitud libre del resorte unido al collarín es $L_0 = 6$ pies y su rigidez es $k = 8$ lb/pie. Si el collarín se desliza hacia abajo de la varilla con rapidez $v_A = 12$ pies/s cuando está en A, determine la rapidez del collarín en B.



(a)

Solución

En la figura (b) se muestra el diagrama de cuerpo libre (DCL) del collarín cuando éste se encuentra a una distancia arbitraria s de A. Las fuerzas que actúan sobre el collarín son el peso W, la fuerza F del resorte y la fuerza de contacto normal N aplicada por la varilla. Sólo W y F realizan trabajo sobre el collarín; N no efectúa trabajo porque es perpendicular a la trayectoria AB del mismo.



(b)

Trabajo de W De la ecuación (14.7), el trabajo del peso es

$$U_{A-B} = -W(z_B - z_A) = -2(0 - 4) = 8 \text{ lb} \cdot \text{pie} \qquad \text{(a)}$$

Trabajo de F El trabajo hecho por la fuerza del resorte sobre el collarín se obtiene de la ecuación (14.10):

$$U_{A-B} = -\frac{1}{2}k(\delta_B^2 - \delta_A^2) \qquad \text{(b)}$$

Sean L_A y L_B las longitudes del resorte cuando el collarín está en A y B, respectivamente, entonces las elongaciones correspondientes del resorte son

$$\delta_A = L_A - L_0 = \sqrt{3^2 + 4^2} - 6 = -1.0 \text{ pies}$$

$$\delta_B = L_B - L_0 = 8 - 6 = 2.0 \text{ pies}$$

El signo negativo indica que el resorte está comprimido cuando el collar está en A. Sustituyendo los valores de δ_A y δ_B en la ecuación (b), se obtiene

$$U_{A-B} = -\frac{1}{2}(8)[(2.0)^2 - (-1.0)^2] = -12 \text{ lb} \cdot \text{pie} \qquad \text{(c)}$$

El trabajo total realizado sobre el collar se determina sumando las ecuaciones (a) y (c):

$$U_{A-B} = 8 - 12 = -4 \text{ lb} \cdot \text{pie}$$

Al aplicar el principio de trabajo-energía entre las posiciones A y B, resulta

$$U_{A-B} = T_B - T_A = \frac{1}{2}\frac{W}{g}(v_B^2 - v_A^2)$$

$$-4 = \frac{1}{2}\frac{2}{32.2}(v_B^2 - 12^2)$$

que da

$$v_B = 3.90 \text{ pies/s} \qquad \textit{Respuesta}$$

Notas

- Si el análisis hubiera predicho una v_B imaginaria (la raíz cuadrada de un número negativo), se concluiría que el collar llegó al reposo antes de alcanzar B.
- La facilidad con que se obtuvo v_B demuestra el poder del método de trabajo-energía en la solución de algunos problemas. La inspección del DCL de la figura (b) revela que la relación entre la fuerza F del resorte y la coordenada de posición s es compleja. Se deduce que si se hubiera empleado el método FMA, el lado izquierdo de la ecuación de movimiento $\Sigma F = m\ddot{s}$ sería una función complicada de s. En consecuencia, la integración de esta ecuación sería muy difícil. Sin embargo, al utilizar el método de trabajo-energía, se elimina esta dificultad porque la integración ya se ha efectuado en la derivación del principio de trabajo-energía.

Problemas

14.1 (a) Calcule el trabajo hecho por cada fuerza dada en la siguiente lista conforme su punto de aplicación se mueve de 1 a 3 sobre la recta que conecta 1 y 3. (b) Repita el inciso (a) si la trayectoria consta de los segmentos rectos 1-2 y 2-3 (x y y están en pies).

1. $\mathbf{F} = 30\mathbf{i} - 10\mathbf{j}$ lb
2. $\mathbf{F} = 3x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$ lb
3. $\mathbf{F} = 3y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$ lb

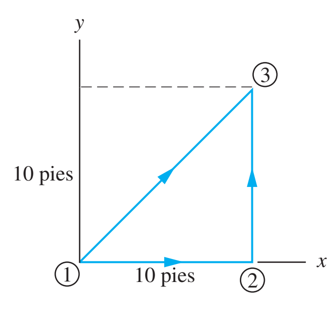


Fig. P14.1

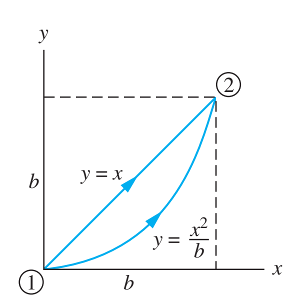


Fig. P14.2, P14.3

14.2 Calcule el trabajo de la fuerza $\mathbf{F} = (F_0/b^3)(xy^2\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j})$ conforme su punto de aplicación se mueve de 1 a 2 sobre (a) la recta $y = x$ y (b) la parábola $y = x^2/b$.

14.3 Repita el problema 14.2 para la fuerza $\mathbf{F} = (F_0/b^3)(x^2y\mathbf{i} + xy^2\mathbf{j})$.

14.4 El collarín de peso W resbala sin fricción sobre un arco circular de radio R. El resorte ideal unido al collarín tiene la longitud libre $L_0 = R$ y rigidez k. Cuando el deslizador se mueve de A a B, calcule (a) el trabajo hecho por el resorte y (b) el trabajo realizado por el peso.

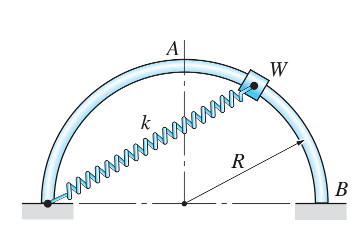


Fig. P14.4

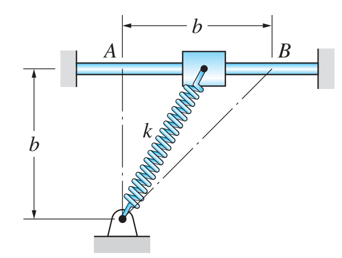


Fig. P14.5, P14.6

14.5 Obtenga la expresión para el trabajo efectuado por el resorte ideal sobre el deslizador cuando éste se mueve de A a B. Suponga que la longitud libre del resorte es (a) $L_0 = b$ y (b) $L_0 = 0.8b$.

14.6 El coeficiente de fricción cinética entre el deslizador y la varilla es μ y la longitud libre del resorte es $L_0 = b$. Deduzca la expresión para el trabajo realizado por la fuerza de fricción sobre el deslizador cuando éste se mueve de *A* a *B*. Desprecie el peso del deslizador.

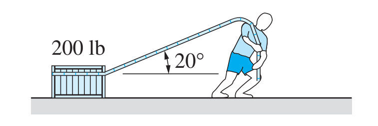


Fig. P14.7

14.7 El hombre arrastra sobre el piso un cajón de 200 lb jalándolo con una fuerza constante de 40 lb. Si el cajón estaba inicialmente en reposo, ¿qué tanto se moverá antes de que su rapidez sea 4.5 pies/s? El coeficiente de fricción cinética entre el cajón y el piso es 0.18.

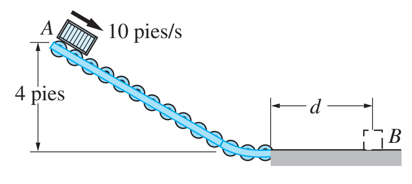


Fig. P14.8

14.8 El paquete de 5 lb llega a *A*, en lo alto de la banda transportadora inclinada, con una rapidez de 10 pies/s. Después de descender por la banda, el paquete resbala una distancia *d* sobre una superficie horizontal rugosa, deteniéndose en *B*. Si el coeficiente de fricción cinética entre el paquete y el plano horizontal es 0.4, determine la distancia *d*.

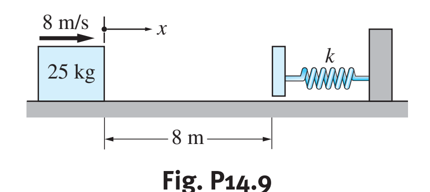


Fig. P14.9

14.9 La caja de 25 kg se lanza desde la posición que se muestra, sobre un plano horizontal rugoso, con una velocidad de 8 m/s. Determine la distancia *x* que la caja viajará antes de que el resorte detenga el movimiento hacia adelante. El coeficiente de fricción cinética entre la caja y el plano es $\mu_k = 0.2$ y la constante del resorte es $k = 150$ N/m.

14.10 La rapidez del automóvil en la base de una colina de 30 pies de alto es 45 mi/h. Suponiendo que la conductora no pisa los pedales de freno y acelerador, ¿cuál será la rapidez del vehículo en lo alto de la montaña?

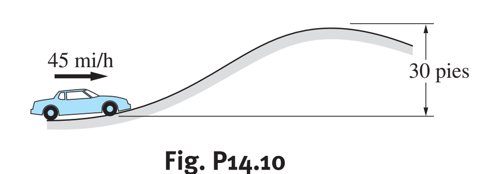


Fig. P14.10

14.11 El deslizador de 0.8 kg está en reposo en la posición 1 cuando la fuerza vertical constante *F* se aplica a la cuerda unida al deslizador. ¿Cuál es la magnitud de *F* requerida para que el deslizador alcance la posición 2 con una rapidez de 6 m/s? Desprecie la fricción.

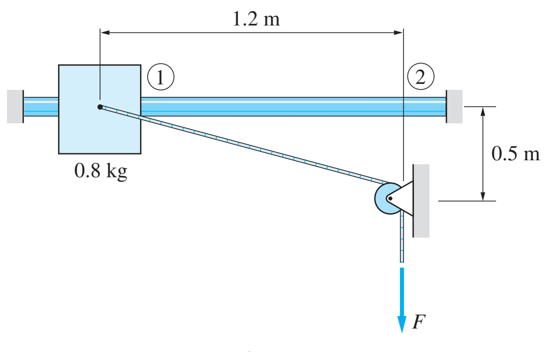


Fig. P14.11

14.12 Un cajón de peso W se arrastra sobre el piso desde A hasta B por medio de una fuerza vertical constante P que actúa en el extremo de la cuerda. Calcule el trabajo que la fuerza P realiza sobre el cajón. Suponga que este último no se levanta del piso.

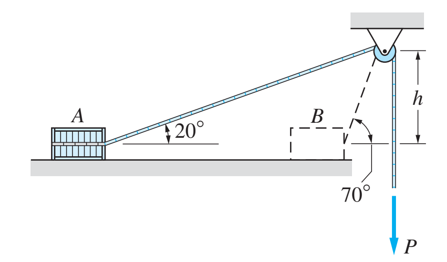


Fig. P14.12, P14.13

***14.13** Para el cajón descrito en el problema 14.12, determine el trabajo efectuado por la fuerza de fricción si el coeficiente cinético de fricción entre el cajón y el piso es μ.

14.14 La masa de 0.31 kg se desliza sobre un alambre sin fricción que está en el plano vertical. El resorte ideal unido a la masa tiene una longitud libre de 80 mm y su rigidez es 120 N/m. Calcule el menor valor de la distancia b si la masa debe alcanzar el extremo del alambre en B después de ser liberada, a partir del reposo, en A.

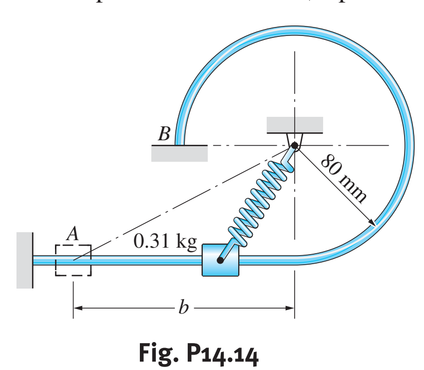


Fig. P14.14

14.15 El collarín de 3 lb se mueve de A a B sobre una varilla sin fricción. La rigidez del resorte es k y su longitud libre es 8 pulg. Calcule el valor de k tal que el deslizador llegue a B con una rapidez de 2 pies/s después de ser liberado, a partir del reposo, en A.

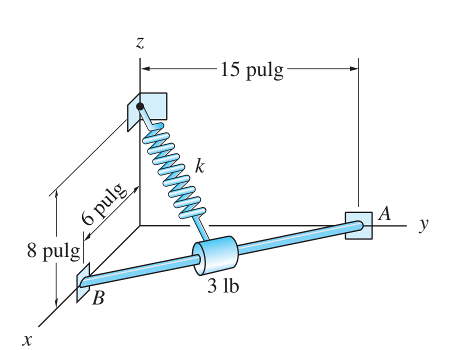


Fig. P14.15

14.16 Un paquete de 10 kg, inicialmente en reposo en A, se impulsa entre A y B gracias a la fuerza constante P que se muestra en la gráfica. Despreciando la fricción, encuentre el valor menor de P tal que el paquete alcance D.

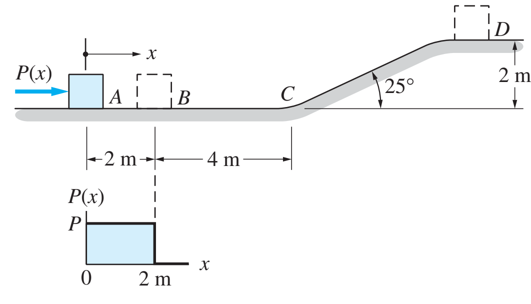


Fig. P14.16, P14.17

14.17 Resuelva el problema 14.16 suponiendo que el coeficiente de fricción cinética entre el paquete y las superficies de contacto es 0.15.

14.18 En la posición 1, el bloque de 0.25 kg se mantiene contra el resorte, comprimiéndolo 150 mm. Entonces se suelta el bloque y el resorte lo dispara hacia arriba de la superficie cilíndrica. Despreciando la fricción, obtenga la fuerza de contacto ejercida sobre el bloque por la superficie en la posición 2.

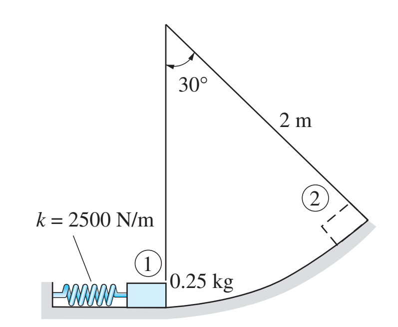


Fig. P14.18

14.19 En la posición que se muestra, la caja de 5 kg se mueve hacia abajo del plano inclinado con una rapidez de 6 m/s. ¿Cuál es la fuerza máxima en el resorte después de que la caja lo golpea? El coeficiente de fricción cinética entre la caja y el plano es $\mu_k = 0.25$ y la constante del resorte es $k = 4$ kN/m.

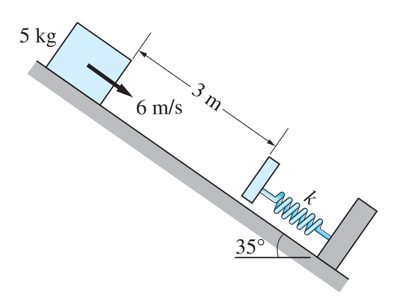


Fig. P14.19

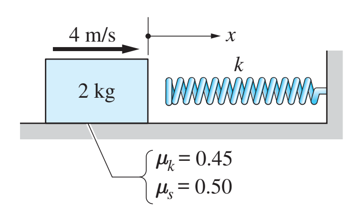


Fig. P14.20

14.20 El bloque de 2 kg golpea el resorte con una rapidez de 4 m/s. Determine la distancia total recorrida por el bloque antes de que se detenga de manera permanente. Utilice $k = 8$ N/m y los coeficientes de fricción que se indican.

14.21 Un bloque de masa m está suspendido de un resorte de rigidez k. Si el bloque se jala hacia abajo una distancia h de su posición de equilibrio y se libera, obtenga su rapidez cuando pase por la posición de equilibrio.

14.22 El bloque de 8 lb se desliza en una ranura sin fricción que está en el plano vertical. Los resortes A y B tienen una rigidez de $k_A = 40$ lb/pie y $k_B = 20$ lb/pie, respectivamente. Cuando el bloque está en la posición 1, el resorte A se comprime 0.5 pies y el resorte B queda sin deformación. Si en la posición 1 el bloque se lanza con rapidez v_1 hacia abajo de la ranura, encuentre el valor menor de v_1 que permitirá al bloque llegar a la posición 2.

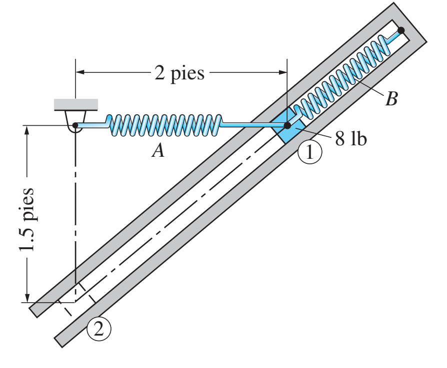
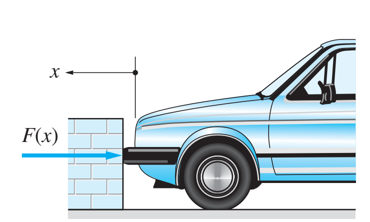


Fig. P14.22



F(x)
4800 lb
0
0
4 pulg
x

Fig. P14.23

14.23 El diagrama muestra la relación entre la fuerza F y la deformación x para la defensa del automóvil absorbente de impactos. Determine la deformación máxima de la defensa si un automóvil de 2400 lb golpea una pared rígida a una rapidez de (a) 3 mi/h y (b) 5 mi/h.

14.24 El diagrama muestra cómo la fuerza F que se requiere para empujar una flecha lentamente a través de un paquete de heno varía con la distancia de penetra-

ción x. Suponiendo que la gráfica F contra x es independiente de la rapidez de penetración, calcule la rapidez de salida de una flecha de 3.2 oz si su rapidez de entrada es 210 pies/s.

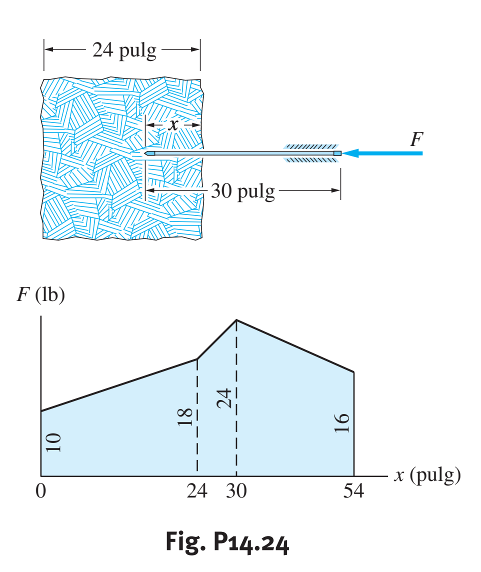


Fig. P14.24

14.25 El peso de 8 lb está unido al rin de una rueda ligera con libertad para rotar respecto a un eje vertical en O. Una cuerda está enrollada en las tres cuartas partes del perímetro de la rueda. La rueda está en reposo en la posición que se muestra, cuando la fuerza horizontal constante P se aplica al extremo de la cuerda. Obtenga la P menor que causa que la rueda gire con rapidez angular de 500 rev/min en el tiempo en que la cuerda se desenrolla. Desprecie la fricción y la masa de la rueda.

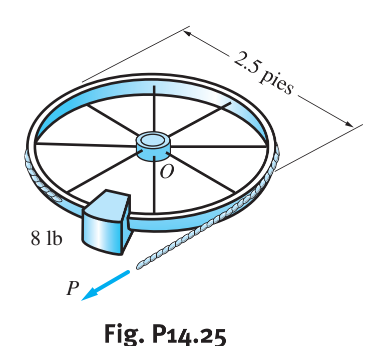


Fig. P14.25

14.4 *Fuerzas conservativas y la conservación de la energía mecánica*

Una fuerza es *conservativa* si su trabajo sólo depende de las posiciones inicial y final de su punto de aplicación. Todas las fuerzas específicas que se analizaron en el apartado anterior son conservativas, porque en cada caso podría determinarse el trabajo sin haber especificado la trayectoria entre los puntos extremos.

Con frecuencia es conveniente describir los efectos de las fuerzas conservativas en términos de sus energías potenciales. En términos generales, la energía potencial es la capacidad de una fuerza conservativa para realizar trabajo. El principio de con-

servación de la energía establece que la energía total (la suma de todas las formas de energía) permanece constante para un sistema cerrado. Puede cambiar la forma de la misma (por ejemplo, la eléctrica puede convertirse en mecánica) pero la energía total no puede crearse ni destruirse.

En mecánica, la atención se limita a la energía mecánica, definida como la suma de las energías potencial y cinética. Si todas las fuerzas que actúan sobre una partícula, un cuerpo o un sistema cerrado de cuerpos son conservativas la energía mecánica se conserva, un concepto conocido como *principio de conservación de la energía mecánica*.

En este apartado se analiza la aplicación del principio de conservación de la energía mecánica, que es simplemente una reformulación del principio de trabajo-energía, $U_{1-2} = \Delta T$, para los sistemas de fuerzas conservativas. Aunque, en algunos problemas, el principio de energía puede ser más fácil de aplicar que el método de trabajo-energía, su uso está limitado porque no es válido para las fuerzas no conservativas, tales como la fricción cinética.

a. *Fuerzas conservativas y energía potencial*

Si la fuerza **F** es conservativa, su trabajo

$$U_{1-2} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \qquad \text{(14.2, repetida)}$$

es una función de las posiciones inicial y final de su punto de aplicación. La integral en la ecuación (14.2) puede ser una función de $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ sólo si el integrando es una diferencial exacta de alguna función escalar $-V(\mathbf{r})$; es decir, si el integrando puede escribirse en la forma

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -dV \qquad (14.16)$$

(el signo "menos" se introduce por convención). La función $V(\mathbf{r})$ es la *energía potencial* de la fuerza **F**. Al sustituir la ecuación (14.16) en la ecuación (14.2), se obtiene

$$U_{1-2} = -\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} dV = -(V_2 - V_1) = -\Delta V \qquad (14.17)$$

donde se usó la notación $V_1 = V(\mathbf{r}_1)$ y $V_2 = V(\mathbf{r}_2)$.

La ecuación (14.17) muestra que

El trabajo de una fuerza conservativa = disminución en su energía potencial.

Así, la energía potencial puede verse como la capacidad de la fuerza para realizar trabajo. Un trabajo positivo disminuye el potencial para efectuar más trabajo y un trabajo negativo incrementa el potencial.

Es importante observar que la ecuación (14.7) implica el *cambio* en la energía potencial. Por tanto, el plano de referencia (o *datum*) desde el cual se mide V puede elegirse de manera arbitraria.

Una propiedad útil de una fuerza conservativa es que sus componentes pueden obtenerse a partir de su energía potencial. Considere una fuerza conservativa **F** que actúa en un punto con coordenadas rectangulares (x, y, z). Al emplear $\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}$ y $d\mathbf{r} = dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j} + dz\,\mathbf{k}$, se logra

$$dV = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -(F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz) \qquad (14.18)$$

Como dV es una diferencial exacta de energía potencial V, entonces puede escribirse como:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz \qquad (14.19)$$

Al comparar las ecuaciones (14.18) y (14.19), las componentes rectangulares de **F** serán

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \qquad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \qquad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \qquad (14.20)$$

La ecuación (14.20) muestra que una fuerza conservativa **F** es el *gradiente negativo* de su función potencial V. Cuando se emplea el operador gradiente ∇ (que se pronuncia "nabla"), entonces la ecuación (14.20) puede escribirse en la forma

$$\mathbf{F} = -\nabla V \qquad (14.21)$$

Sólo las fuerzas conservativas son deducibles de una función potencial de esta manera. Una fuerza no conservativa, como la fricción, no posee tal potencial.

b. Conservación de la energía mecánica

Si todas las fuerzas que actúan sobre una partícula son conservativas entonces su resultante también lo es. La energía potencial $V(\mathbf{r})$ de la fuerza resultante puede obtenerse sumando las energías potenciales de todas las fuerzas que actúan sobre la partícula. Si ésta se mueve de la posición 1 a la 2, es posible emplear la ecuación (14.17) para relacionar el trabajo de la fuerza resultante con el cambio en su energía potencial: $U_{1-2} = -(V_2 - V_1)$. Al sustituir esto en el principio de trabajo-energía $U_{1-2} = \Delta T$, se obtiene que $-(V_2 - V_1) = T_2 - T_1$ o

$$V_1 + T_1 = V_2 + T_2 \qquad (14.22)$$

Si se establece que la energía mecánica total* E sea la suma de las energías cinética y potencial, es decir:

$$E = T + V \qquad (14.23)$$

La ecuación (14.22) se convierte en

$$E_1 = E_2 \quad \text{o} \quad \Delta E = 0 \qquad (14.24)$$

Esta ecuación recibe el nombre de *principio de conservación de la energía mecánica*.

Como el trabajo hecho por una fuerza de fricción cinética no es independiente de la trayectoria, entonces la fricción cinética es una fuerza no conservativa. Por tanto, cuando dicha fricción está presente no se conserva la energía mecánica total, sino que se reduce debido al trabajo negativo efectuado por la fuerza de fricción. Esta energía no se pierde; se convierte en energía térmica en forma de calor. En otras palabras, la energía total sigue conservándose; sólo ha cambiado su forma.

*Aquí el énfasis se coloca sobre la energía mecánica. Otras formas de energía, como el calor, se excluyen de este análisis.

Ya que la energía mecánica total E es constante si todas las fuerzas son conservativas, se concluye que

$$\frac{dE}{dt} = 0 \tag{14.25}$$

Algunas veces esta ecuación es útil para obtener la aceleración de la partícula.

c. Cálculo de la energía potencial

Las energías potenciales de las fuerzas conservativas pueden calcularse comparando su trabajo, que se deduce con los métodos del apartado 14.2, con la definición de energía potencial dada en la ecuación (14.17). En la tabla 14.1 se resumen los resultados.

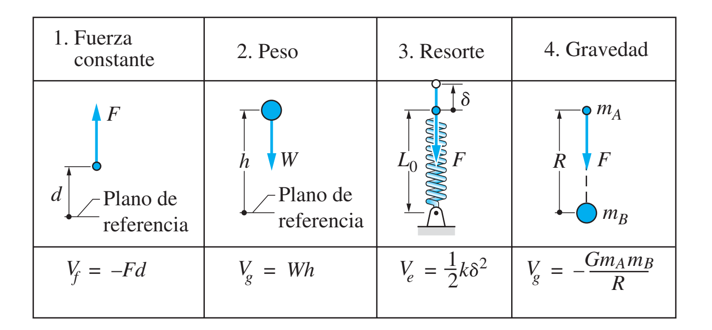


Tabla 14.1 Fórmulas para la energía potencial

1. *Energía potencial de una fuerza constante* El trabajo realizado por una fuerza constante **F** (constante en magnitud y dirección) se mostró antes como:

$$U_{1-2} = F\,\Delta d \quad \text{(14.6, repetida)}$$

donde F es la magnitud de la fuerza y Δd representa el desplazamiento que absorbe el trabajo de su punto de aplicación, como se muestra en la figura 14.4. Al comparar esto con $U_{1-2} = -\Delta V$, se concluye que la energía potencial de una fuerza constante **F** es

$$V_f = -Fd \tag{14.26}$$

donde d se mide desde cualquier plano de referencia conveniente.

2. *Energía potencial de un peso* Si se supone que el movimiento está restringido a distancias pequeñas a partir de la superficie terrestre, el peso de un objeto puede considerarse como una fuerza constante. El trabajo efectuado por el peso W de la figura 14.5 está dado por

$$U_{1-2} = -W\,\Delta h \quad \text{(14.7, repetida)}$$

Al comparar esta ecuación con $U_{1-2} = -\Delta V$, se concluye que la energía potencial de W, llamada *energía potencial gravitacional*, es igual a

$$V_g = Wh \quad \text{(para un peso } W \text{ constante)} \tag{14.27}$$

donde la dirección positiva de h debe estar hacia arriba en sentido vertical. Como sólo el cambio en la energía potencial es significativo, el plano de referencia a partir del que se mide y es arbitrario.

3. *Energía potencial de un resorte* De acuerdo con la ecuación (14.10), el trabajo realizado por un resorte ideal* cuando su punto extremo libre se mueve de la posición 1 a la 2 es

$$U_{1-2} = -\frac{1}{2}k(\delta_2^2 - \delta_1^2) = \frac{1}{2}k\Delta(\delta^2)$$

donde δ es la elongación del resorte, medida desde su longitud libre L_0. La energía potencial del resorte, también llamada *energía potencial elástica,*† se obtiene al comparar esta ecuación con $U_{1-2} = -\Delta V$. Entonces la energía potencial elástica es

$$V_e = \frac{1}{2}k\delta^2 \tag{14.28}$$

Observe que la energía potencial elástica siempre es positiva.

4. *Energía potencial gravitacional* La ecuación (14.27) puede utilizarse para calcular la energía potencial gravitacional de un peso sólo si la variación de la aceleración gravitacional g es despreciable. Para los movimientos que violan esta restricción, el peso constante debe reemplazarse por la fuerza obtenida de la ley de Newton de la gravitación $F = Gm_Am_B/R^2$. Se determinó que el trabajo realizado por F en la ecuación (14.11) es:

$$U_{1-2} = Gm_Am_B\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) = Gm_Am_B\Delta(1/R)$$

donde m_A y m_B son las masas que se atraen entre sí. Al comparar esta ecuación con $U_{1-2} = -\Delta V$, se ve que la energía potencial gravitacional del sistema que consta de las masas m_A y m_B es

$$V_g = -\frac{Gm_Am_B}{R} \tag{14.29}$$

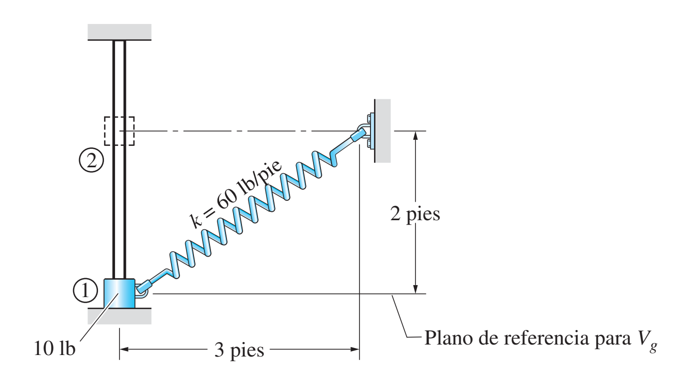
Note que la energía potencial gravitacional siempre es una cantidad negativa que se aproxima a cero cuando R tiende a infinito.

*Observe que se considera el trabajo hecho *por* el resorte y no el trabajo efectuado *sobre* él. La energía potencial de un resorte se refiere a su capacidad para efectuar trabajo sobre el cuerpo al que está unido, no al efecto que el cuerpo tiene sobre el resorte.

† *Elasticidad* se refiere a la capacidad de un cuerpo deformado para recuperar su aspecto no deformado cuando las cargas se eliminan.

Problema de ejemplo 14.4

La figura muestra un collarín de 10 lb que resbala sin fricción sobre una varilla vertical bajo las acciones de la gravedad y de un resorte ideal. Este último tiene una rigidez de 60 lb/pie y su longitud libre es de 2.5 pies. El collarín se libera a partir del reposo en la posición 1. Utilice el principio de conservación de la energía mecánica para determinar la rapidez del collarín en la posición 2.



Solución

Sin dibujar el diagrama de cuerpo libre del collarín, se reconoce que sólo el peso y el resorte realizan trabajo sobre el collarín conforme se mueve sobre la varilla (la fuerza normal entre el collarín y la varilla no realiza trabajo). Como el peso y la fuerza del resorte son conservativos, el uso del principio de conservación de la energía mecánica se justifica.

Energía potencial gravitacional Es conveniente tomar la posición 1 como el plano de referencia desde el cual se mide h. Por tanto,

$$(V_g)_1 = 0 \quad (V_g)_2 = Wh_2 = 10(2) = 20 \text{ lb} \cdot \text{pie}$$

Energía potencial elástica Las elongaciones del resorte en las dos posiciones son

$$\delta_1 = \sqrt{2^2 + 3^2} - 2.5 = 1.1056 \text{ pie}$$
$$\delta_2 = 3 - 2.5 = 0.5 \text{ pies}$$

que da

$$(V_e)_1 = \frac{1}{2}k\delta_1^2 = \frac{1}{2}(60)(1.1056)^2 = 36.67 \text{ lb} \cdot \text{pie}$$
$$(V_e)_2 = \frac{1}{2}k\delta_2^2 = \frac{1}{2}(60)(0.5)^2 = 7.5 \text{ lb} \cdot \text{pie}$$

Energía cinética Si se observa que el collar está en reposo en la posición 1, las energías cinéticas son

$$T_1 = 0 \qquad T_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}\frac{10}{32.2}v_2^2 = 0.15528v_2^2$$

Conservación de la energía Al igualar las energías inicial y final, se obtiene

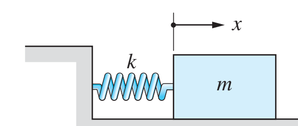
$$T_1 + (V_g)_1 + (V_e)_1 = T_2 + (V_g)_2 + (V_e)_2$$
$$0 + 0 + 36.67 = 0.15528 v_2^2 + 20 + 7.5$$

que da la siguiente rapidez del collar

$$v_2 = 7.68 \text{ pies/s} \qquad \textit{Respuesta}$$

Problema de ejemplo **14.5**

La figura muestra un bloque de masa m que resbala sobre un plano horizontal sin fricción. La coordenada de posición x se mide desde la posición no deformada del resorte ideal cuya rigidez es k. Obtenga la aceleración del bloque como una función de x, utilizando el principio de conservación de la energía mecánica. (Esto se resolvió en el problema de ejemplo 12.7 con el método de fuerza-masa-aceleración.)



Solución

Debido a que sólo la fuerza conservativa del resorte realiza trabajo cuando el bloque se mueve, se justifica el uso del principio de conservación de la energía mecánica.

La energía cinética T del bloque es

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \qquad \text{(a)}$$

Ya que la coordenada de posición x se mide desde la posición no deformada del resorte, ésta también representa la elongación δ del resorte. Por tanto, la energía potencial elástica es

$$V_e = \frac{1}{2} k \delta^2 = \frac{1}{2} k x^2 \qquad \text{(b)}$$

Si se combinan las ecuaciones (a) y (b), la energía mecánica total E es

$$E = T + V_e = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

Como la energía mecánica total se conserva, entonces de la ecuación (14.25) se tiene que:

$$\frac{dE}{dt} = m \dot{x} \ddot{x} + k x \dot{x} = 0$$

o

$$\dot{x}(m \ddot{x} + k x) = 0$$

Al ignorar la solución estática $\dot{x} = 0$, y reconocer que la aceleración es $a = \ddot{x}$, se obtiene que la aceleración está dada por:

$$a = -\frac{k}{m} x \qquad \textit{Respuesta}$$

Esto concuerda con el resultado que se obtuvo en el problema de ejemplo 12.7 con el método de fuerza-masa-aceleración.

Problemas

14.26 La caja de peso W se mantiene justo encima del resorte y se libera. Determine la fuerza máxima en el resorte durante el movimiento resultante.

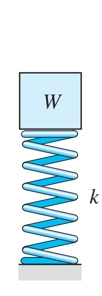


Fig. P14.26

Fig. P14.27

14.27 La pelota de 100 g se libera a partir del reposo en la posición 1. Después de hacer contacto con el resorte, la pelota golpea el extremo de este último y rebota a la posición 2. Encuentre la distancia vertical y entre las posiciones 1 y 2.

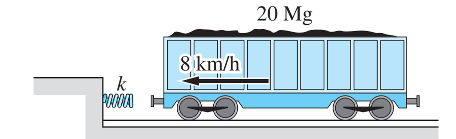


Fig. P14.28

14.28 Un resorte lineal de rigidez k está diseñado para detener un vagón de 20 Mg con una velocidad de 8 km/h en una distancia de 400 mm después del impacto. Encuentre el menor valor de k que producirá el resultado deseado. (*Nota:* Esto se resolvió en el problema 12.50 con el método FMA.)

14.29 Resuelva el problema 14.28 si el único resorte se reemplaza por dos resortes de idéntica rigidez k, anidados como se muestra (observe que un resorte es 200 mm más corto que el otro).

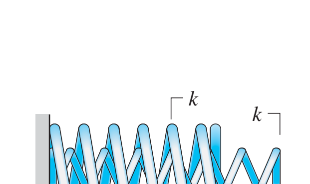


Fig. P14.29

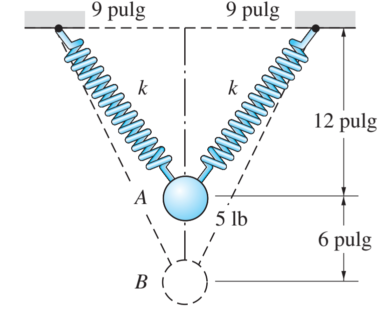


Fig. P14.30

14.30 El peso de 5 lb se libera a partir del reposo en la posición A, donde los dos resortes con rigidez k están sin deformar. Determine la k mayor para la que el peso llegará a la posición B.

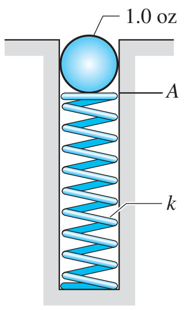


Fig. P14.31

14.31 El resorte con rigidez k está sin deformar en la posición que se muestra. La pelota de 1.0 oz se coloca en el resorte y se lanza en sentido vertical comprimiéndolo 6 pulg y liberándolo. Si la pelota alcanza una elevación de 50 pies sobre A, obtenga el valor de k.

14.32 El collarín deslizante de peso $W = 2$ lb está unido a dos resortes con rigidez $k_1 = 6$ lb/pie y $k_2 = 2$ lb/pie. La longitud libre de cada resorte es de 1.5 pies. Si el collar parte del reposo en la posición A, obtenga su rapidez en la posición B. Desprecie la fricción.

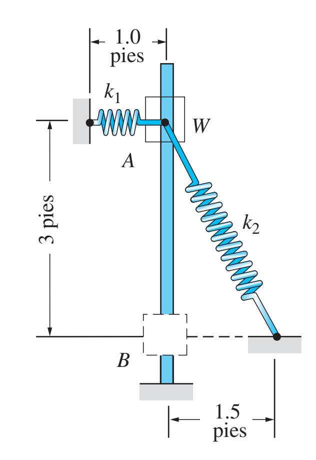


Fig. P14.32

14.33 El resorte unido al collarín deslizante de 0.6 kg tiene una rigidez de 200 N/m y una longitud libre de 150 mm. Si la rapidez del collar en la posición A es 3 m/s hacia la derecha, determine la rapidez en la posición B. Desprecie la fricción.

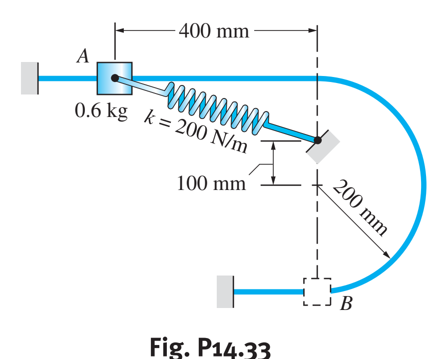


Fig. P14.33

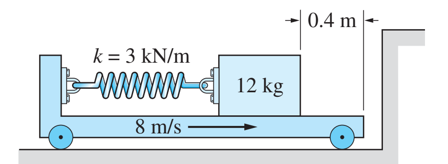


Fig. P14.34

14.34 La plataforma y el bloque de 12 kg se mueven hacia la derecha a 8 m/s cuando la plataforma se detiene de golpe al chocar con la pared. Antes de la colisión, el resorte que conecta al bloque con la plataforma estaba sin deformar. Despreciando la fricción, determine la rapidez con la que el bloque golpea la pared.

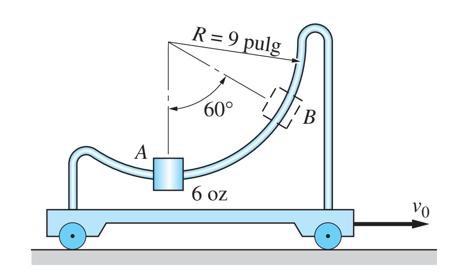


Fig. P14.35

14.35 El collarín de 6 oz resbala con fricción despreciable sobre la varilla guía circular que está unida a la plataforma. El collarín está en la posición A cuando la plataforma se recorre hacia la derecha con rapidez v_0. Después de que la plataforma se detiene de manera abrupta, el collarín se desliza hacia arriba de la varilla, alcanzando su más alta posición en B. Determine v_0.

14.36 El péndulo de 0.5 kg oscila con una amplitud de $\theta_{max} = 50°$. Determine la máxima fuerza en la cuerda que lo sostiene.

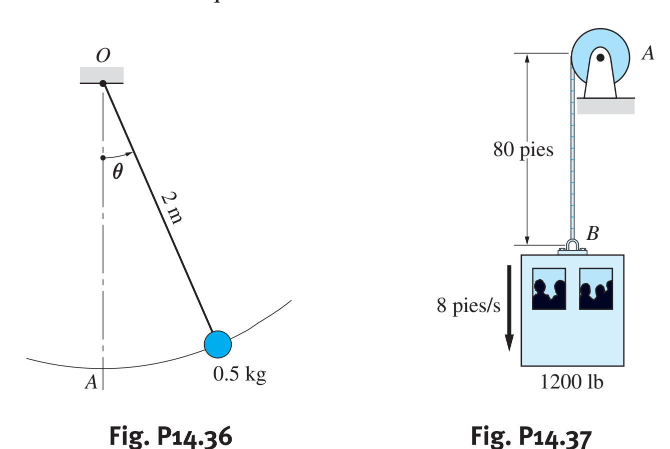


Fig. P14.36 **Fig. P14.37**

14.37 Conforme el cable de acero se desenrolla del carrete A, el elevador de 1200 lb desciende con rapidez constante de 8 pies/s. Si el carrete se detiene de golpe cuando

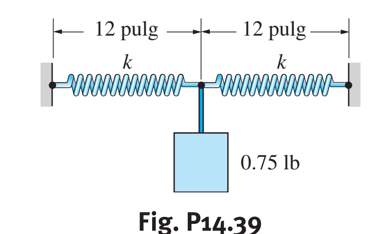


Fig. P14.39

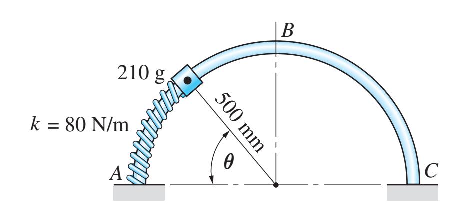


Fig. P14.40

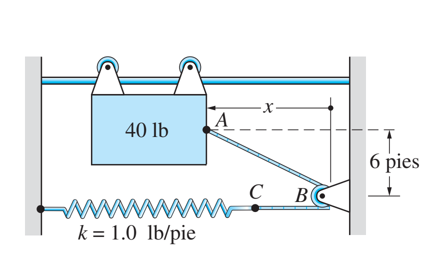


Fig. P14.41

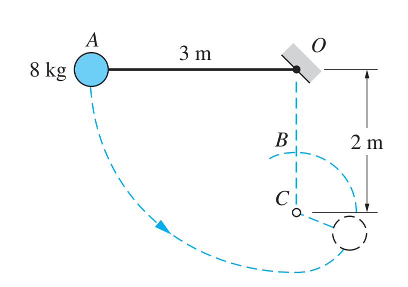


Fig. P14.44

el elevador está en la posición que se muestra, calcule la máxima fuerza resultante en el cable. Debido a la elasticidad del acero, el cable actúa como un resorte ideal de rigidez 660×10^3 lb/pie.

14.38 Resuelva el problema 14.37, suponiendo que un resorte de rigidez $k = 4800$ lb/pie se ha colocado entre el elevador y el cable en *B*.

14.39 La pesa de 0.75 lb está unida a dos resortes, cada uno de rigidez $k = 30$ lb/pie. La pesa se mantiene en la posición que se muestra donde cada resorte está estirado 0.12 pulg. Si la pesa se suelta desde esta posición, encuentre su rapidez después de una caída de 3 pulg.

14.40 La cadena, de 6 pies de largo y un peso de 1.2 lb/pie, se suelta a partir del reposo en la posición que se muestra. Despreciando la fricción, determine la rapidez de la cadena en el instante en que el último eslabón abandona la mesa.

14.41 La varilla semicircular *AC* está en el plano vertical. El resorte enrollado sobre la varilla carece de deformación cuando $\theta = 45°$. Si el deslizador de 210 g se presiona contra el resorte y se libera en $\theta = 30°$, determine la velocidad del deslizador cuando pasa por *B*. Desprecie la fricción y suponga que el deslizador no está unido al resorte.

14.42 La partícula de masa *m* está en reposo en *A* cuando se desplaza ligeramente para que resbale hacia abajo sobre la superficie cilíndrica de radio *R*. Despreciando la fricción, determine (a) la rapidez de la partícula como una función del ángulo θ y (b) el valor de θ cuando la partícula abandona la superficie.

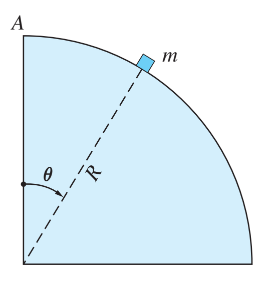


Fig. P14.42

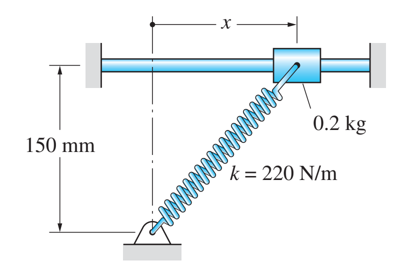


Fig. P14.43

14.43 El resorte unido al collarín de 0.2 kg tiene una rigidez de 220 N/m y una longitud libre de 150 mm. Si el collarín se suelta a partir del reposo cuando $x = 150$ mm obtenga su aceleración como una función de *x*. Desprecie la fricción.

14.44 El panel deslizante de 40 lb está suspendido de rodillos sin fricción con desplazamiento horizontal sobre el riel. El resorte unido a la cuerda *ABC* tiene una rigidez de 1.0 lb/pie y está sin deformación cuando el panel se encuentra en la posición $x = 0$. Si el panel arranca del reposo en $x = 8$ pies, determine su rapidez cuando $x = 0$.

14.45 El péndulo de 8 kg se libera a partir del reposo en *A*. Inicialmente, el péndulo oscila respecto a *O*, pero después de que la cuerda hace contacto con el perno *C*, entonces la rotación se realiza respecto a *C*. Cuando la pesa del péndulo está en *B*, obtenga (a) su rapidez y (b) la tensión en la parte *BC* de la cuerda.

Fig. P14.45

14.46 Una catapulta está hecha de dos bandas elásticas, cada una de 5 pulg de largo cuando están sin estirar. Cada banda se comporta como un resorte ideal de rigidez de 36 lb/pie. Si una roca de 2.5 oz se lanza desde la posición que se muestra, obtenga su rapidez cuando abandona la catapulta en *D*.

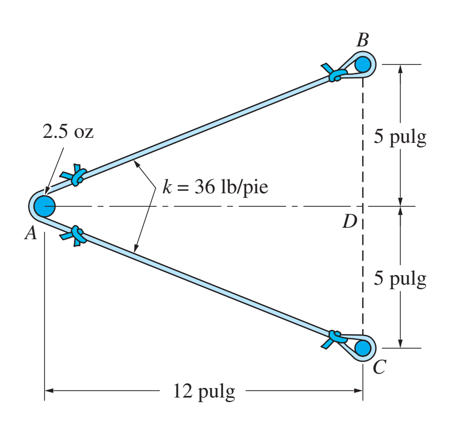


Fig. P14.46

14.47 El collarín de 0.25 lb resbala sobre una varilla circular *AB* que está en el plano vertical. El resorte unido al collarín tiene una longitud libre de 9 pulg y su rigidez es 0.1 lb/pulg. Si el collarín se libera a partir del reposo en *A*, encuentre la rapidez con la que llega a *B*.

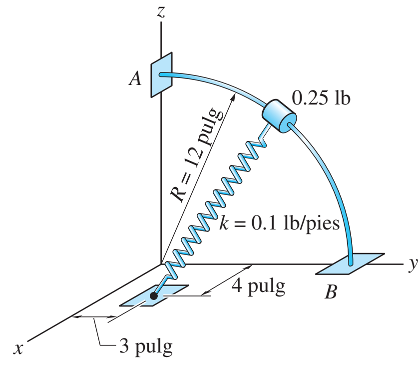


Fig. P14.47

14.48 Una nave espacial de 1200 kg se lanza desde la superficie terrestre. ¿Cuánta energía se requiere para que la nave escape del campo gravitacional de la Tierra? Utilice los siguientes datos: masa de la Tierra = 5.974×10^{24} kg, radio de la Tierra = 6378 km, constante gravitacional universal = 6.672×10^{-11} $m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}$.

14.49 Un satélite está en órbita elíptica alrededor de la Tierra. Si la rapidez del satélite en el perigeo (posición 1) es 9.5 km/s, calcule su rapidez en el apogeo (posición 2). Use $GM_T = 3.98 \times 10^{14}$ m^3/s^2, donde M_T es la masa de la Tierra y *G* es la constante gravitacional universal.

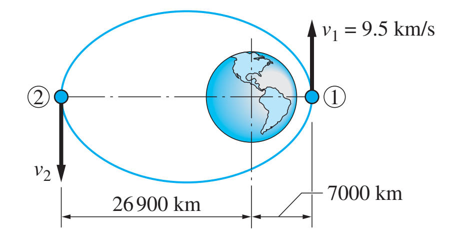


Fig. P14.49

14.50 El encendido de los retrocohetes hace que el satélite que rodea a la Tierra disminuya su velocidad a 3 km/s cuando llega a su perigeo *A*. Como resultado, el satélite deja su órbita y desciende hacia la Tierra; y se quema cuando entra a la atmósfera terrestre en *B*, 100 km sobre la superficie del planeta. Si se observó que la rapidez del satélite fue de 7.7 km/s en *B*, obtenga la altura *h* del perigeo. Utilice $GM_T = 3.98 \times 10^{14}$ m^3/s^2, donde M_T es la masa de la Tierra y *G* es la constante gravitacional universal.

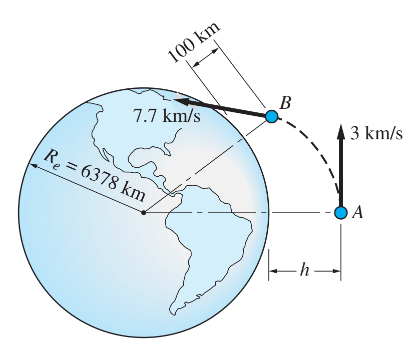


Fig. P14.50

14.5 Potencia y eficiencia

La potencia se define como la *razón o rapidez con que se realiza trabajo*. Sea P la potencia y U el trabajo, entonces

$$P = \frac{dU}{dt} \tag{14.30}$$

La potencia es un escalar de dimensión $[FL/T]$. En el Sistema Internacional (SI), su unidad es el *watt* (1 W = 1 J/s = 1 N · m/s). En el sistema inglés, la unidad de potencia es lb · pulg/s, lb · pie/s o *caballo de fuerza* (1 hp = 550 lb · pie/s).

La *potencia de una fuerza* **F** se obtiene al sustituir $dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ de la ecuación (14.1) en la ecuación (14.30), lo que implica que $P = (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r})/dt$. Al observar que $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}$ es la velocidad de la partícula sobre la que actúa **F**, resulta

$$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \tag{14.31}$$

Las máquinas, al ser dispositivos para realizar trabajo, también están asociadas con la potencia. La *potencia de entrada* de una máquina es la razón con que se alimenta energía a la máquina. La *potencia de salida* es la razón a la que la máquina efectúa trabajo. La *eficiencia* η de la máquina se define como

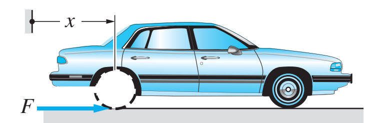
$$\eta = \frac{\textit{potencia de salida}}{\textit{potencia de entrada}} \times 100\% \tag{14.32}$$

La potencia de salida siempre es menor que la potencia de entrada debido a la pérdida de energía mecánica causada por la fricción, las vibraciones, etcétera. Así, la eficiencia de una máquina siempre es menor que 100%.

El eje transmisor (transmisión, árbol de transmisión y rueda motriz) de un automóvil es un ejemplo de una máquina. El motor del vehículo suministra la potencia de entrada. Algo de esta última se utiliza para vencer la fricción en la transmisión y en los cojinetes. Una cantidad menor de potencia se convierte en sonido por medio de las vibraciones del árbol y de los engranajes. La potencia restante es la potencia de salida que está disponible para mover las ruedas.

Problema de ejemplo 14.6

Un automóvil de 3000 lb acelera, con potencia constante, de 60 mi/h a 90 mi/h en una distancia de 1/4 mi en línea recta, al nivel de la pista de prueba; 1. determine la potencia en caballos de fuerza entregada por los ejes de las ruedas al auto; 2. calcule la potencia de salida del motor si la eficiencia del eje transmisor es 82%. Desprecie la resistencia del aire y del rodamiento.



Solución

Parte 1

Sea F la fuerza impulsora que los ejes de las ruedas (salida final del eje transmisor) aportan al auto, como se muestra en la figura. De acuerdo con la segunda ley de Newton, $F = ma$, donde m es la masa del vehículo y a es la aceleración. Al sustituir $a = v(dv/dx)$, se obtiene $F = mv(dv/dx)$. Como la velocidad v y la fuerza impulsora F tienen la misma dirección, entonces el producto punto $P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$ queda

$$P = Fv = mv^2 \frac{dv}{dx}$$

Al multiplicar ambos lados por dx, resulta

$$P\,dx = mv^2\,dv$$

Cuando se integra se obtiene (observe que P y m son constantes)

$$Px = \frac{1}{3}mv^3 + C$$

donde C es la constante de integración. Con $m = W/g = 3000/32.2 = 93.17$ slugs, la última ecuación adquiere la forma

$$Px = 31.06v^3 + C \qquad \text{(a)}$$

Los valores de P y C pueden encontrarse con las velocidades que se dan al inicio y final de la prueba de 1/4 milla. Sea $x = 0$ en el inicio de la prueba, cuando $v = 88$ pies/s (60 mi/h). Al sustituir esos valores en la ecuación (a) se obtiene

$$0 = 31.06(88)^3 + C \qquad \text{(b)}$$

Al final de la prueba, $x = 1320$ pies (1/4 mi) y $v = 132$ pies/s (90 mi/h). Por tanto, la ecuación (a) se convierte en

$$P(1320) = 31.06(132)^3 + C \qquad \text{(c)}$$

La solución de las ecuaciones (b) y (c) es $C = -21.17 \times 10^6$ lb · pie^2/s y $P =$ 38 080 lb · pies/s. Por lo que la potencia que los ejes de las ruedas aportan al vehículo es

$$P = 38\,080 \text{ lb} \cdot \text{pies/s} \times \frac{1 \text{ hp}}{550 \text{ lb} \cdot \text{pie/s}} = 69.2 \text{ hp} \qquad \textit{Respuesta}$$

Parte 2

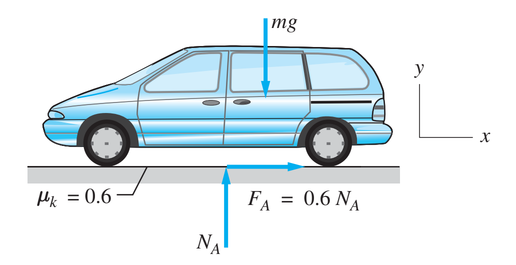
La eficiencia del eje transmisor es 82%. Así la potencia P' que se le da (la potencia de salida del motor) es, de acuerdo con la ecuación (14.32),

$$P' = \frac{P}{\eta} = \frac{69.2}{0.82} = 84.4 \text{ hp} \qquad \textit{Respuesta}$$

Problema de ejemplo **14.7**

Una camioneta de mensajería de 1800 kg viaja con una rapidez de 26 m/s cuando el conductor aplica los frenos al tiempo $t = 0$, deteniendo las cuatro llantas. La fricción entre éstas y el camino hace que la camioneta patine hasta detenerse. Determine la potencia de la fuerza de fricción como una función del tiempo si el coeficiente cinético de fricción entre las llantas y el terreno es 0.6.

Solución



En la figura se muestra el diagrama de cuerpo libre de la camioneta durante el frenado, donde N_A es la fuerza normal resultante que actúa sobre las llantas y F_A es la fuerza de fricción resultante. Del diagrama se obtienen las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$\Sigma F_x = ma \qquad \xrightarrow{+} \qquad 0.6N_A = ma$$

$$\Sigma F_y = 0 \qquad +\uparrow \qquad N_A - mg = 0$$

La solución es

$$N_A = mg = 1800(9.81) = 17\,658 \text{ N} = 17.658 \text{ kN}$$

$$a = 0.6g = 0.6(9.81) = 5.886 \text{ m/s}^2 \rightarrow$$

La velocidad de la camioneta durante el frenado es

$$v = \int a\,dt = \int 5.886\,dt = 5.886t + C \text{ m/s}$$

La constante de integración C se obtiene de la condición inicial $v = -26$ m/s cuando $t = 0$, lo que produce $C = -26$ m/s. Por tanto,

$$v = 5.886t - 26 \text{ m/s} \rightarrow \tag{a}$$

El tiempo en el que se detiene la camioneta es $26/5.886 = 4.42$ s.

La potencia de la fuerza de fricción puede calcularse de la ecuación (14.31). Al observar que F_A y v tienen la misma dirección, se obtiene

$$P = F_A v$$

Al sustituir para v de la ecuación (a) y emplear $F_A = 0.6N_A = 0.6(17.658) = 10.595$ kN, se obtiene

$$P = 10.595(5.886t - 26) = 62.4t - 275 \text{ kN} \cdot \text{m/s}$$

o

$$P = 62.4t - 275 \text{ kW} \qquad (0 \leq t \leq 4.42 \text{ s}) \qquad \textit{Respuesta}$$

Ya que P es la potencia que la fuerza de fricción da a la camioneta, entonces es negativa, como se esperaba.

Problemas

14.51 Un hombre de 170 lb conduce una motocicleta de 580 lb sobre un camino recto a 40 mi/h cuando de repente acelera a fondo. Determine su aceleración en ese instante, si sabe que la potencia de salida del motor es 35 hp. Desprecie cualquier impedimento para el movimiento, como la resistencia del aire.

14.52 Un automóvil de 3600 lb acelera de 30 mi/h a 60 mi/h cuando el motor aporta una potencia constante de 40 hp a los ejes de las ruedas. Encuentre la distancia recorrida por el vehículo durante la aceleración.

14.53 Una potencia constante de 450 kW se aplica a los ejes de las ruedas de una locomotora de 150 Mg. Si la rapidez de la locomotora es de 10 m/s en el tiempo $t = 0$, ¿cuál es su rapidez en $t = 60$ s?

14.54 La banda transportadora vacía 600 lb de carbón por segundo en un camión. Obtenga la potencia consumida por el motor de la banda si su eficiencia es 70%.

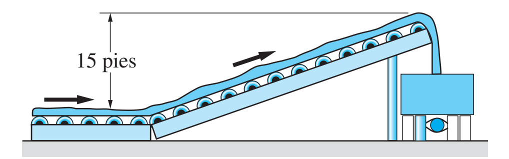


Fig. P14.54

14.55 Un automóvil de 3000 lb, que viaja sobre un camino recto, incrementa su rapidez de 40 mi/h a 55 mi/h en una distancia de 300 pies. La eficiencia del eje transmisor vale 85% y la potencia de salida del motor es constante. Determine la potencia de salida, en caballos de fuerza, del motor durante la aceleración. Desprecie la resistencia del aire y por rodamiento.

14.56 Un sistema de bombeo (la bomba más la tubería) eleva agua a razón de 1600 pies^3/min desde un depósito hasta un tanque colocado a 58 pies sobre la cisterna. Obtenga la eficiencia del sistema si la potencia de salida del motor que impulsa la bomba es de 240 hp (el agua pesa 62.4 lb/pie^3).

14.57 Un tren de 1200 Mg sube una pendiente de 0.03 (se eleva 3 m por cada 100 m horizontales) con rapidez constante. Si el motor del tren aporta 5000 kW de potencia a los ejes de las ruedas, determine la rapidez del tren. Desprecie la resistencia del aire y por rodamiento.

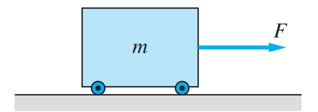


Fig. P14.58-P14.60

14.58 El bloque de masa m está en reposo en $t = 0$ cuando se aplica la fuerza F constante. Obtenga la potencia de F como una función del tiempo.

14.59 El bloque de masa m se encuentra en reposo en $t = 0$ cuando se aplica la fuerza F dependiente del tiempo. Si la potencia de F es constante, determine a esta última como una función del tiempo.

14.60 El bloque de masa $m = 12$ kg está en reposo cuando la fuerza $F = 60 \cos \pi t$ N se aplica durante el periodo $0 \leq t \leq 0.5$ s. (a) Determine la potencia de F como una función de t durante este periodo. (b) Encuentre la máxima potencia y el tiempo cuando ésta ocurre.

14.61 Un montacargas eléctrico levanta una masa de 500 kg con una rapidez constante de 0.68 m/s, consumiendo 4.2 kW de potencia. (a) Calcule la eficiencia del montacargas. (b) ¿Con qué rapidez constante puede este último levantar una masa de 800 kg con el mismo consumo de potencia que en el inciso (a)?

14.62 Una grúa eléctrica consume 5 kW de potencia, a razón constante, para elevar una masa de 500 kg. Suponiendo que la grúa tiene una eficiencia de 80%, determine la máxima rapidez que alcanza la masa.

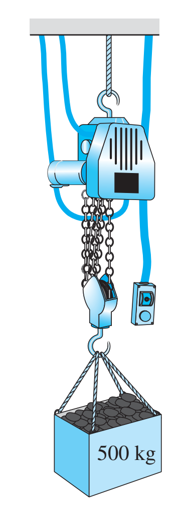


Fig. P14.61, P14.62

14.63 Un hombre de 165 lb pedalea una bicicleta de 35 lb subiendo una pendiente con 5° de inclinación, con una rapidez de 6 mi/h. Si la bicicleta es eficiente en 95%, calcule la potencia del hombre en caballos de fuerza.

14.64 Un automóvil de 1800 kg viaja sobre una carretera recta con una velocidad v. El arrastre aerodinámico sobre el vehículo es $F_D = 0.12v^2$ N, donde la unidad para v es m/s. Si la potencia máxima que se aplica a los ejes de las ruedas es 150 kW, obtenga la mayor aceleración posible del automóvil cuando (a) $v = 60$ km/h y (b) $v = 120$ km/h.

14.65 La fuerza F que se opone al movimiento de un automóvil depende de la rapidez v de este último como $F = F_0 + cv^2$, donde F_0 y c son constantes. Si la potencia de salida del eje transmisor es 19.3 hp con rapidez constante de 50 mi/h y 32.3 hp a 60 mi/h, encuentre la potencia requerida a 70 mi/h.

14.66 El bloque de 4 kg acelera a partir del reposo como resultado de la acción de la fuerza $F(t) = 12[1 - (t/2)]$, donde F está en newtons y t en segundos. La fuerza sólo dura 2 segundos. Calcule (a) la potencia de F como una función de t, y (b) la máxima potencia y el tiempo en que ésta ocurre.

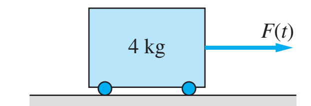


Fig. P14.66

***14.67** El diagrama muestra una típica relación P contra v para un automóvil impulsado por gasolina que acelera a fondo en primera velocidad, donde P es la potencia de la fuerza impulsora F y v es la rapidez del vehículo. Determine el máximo valor de F y la rapidez cuando ésta ocurre. (Sugerencia: la recta del origen a un punto sobre la curva tiene pendiente $F = P/v$.)

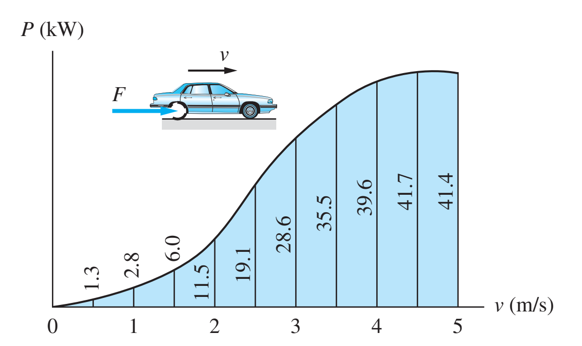


Fig. P14.67

14.6 Principio de impulso y cantidad de movimiento

Se ha visto que el principio de trabajo-energía es útil al determinar el cambio en la rapidez de una partícula durante un *desplazamiento* dado. Si se quiere encontrar el cambio en la velocidad durante un intervalo de *tiempo* dado, entonces el principio de impulso y cantidad de movimiento proporciona un método práctico de análisis. Aquí se inicia con las definiciones del impulso de una fuerza y de la cantidad de movimiento de una partícula,* y después se procede a la deducción del principio de impulso-cantidad de movimiento.

a. Impulso de una fuerza

El *impulso* $\mathbf{L}_{1-2}$ de una fuerza $\mathbf{F}$ en el intervalo de tiempo de t_1 a t_2 se define como

$$\mathbf{L}_{1-2} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\, dt \qquad (14.33)$$

El impulso es una cantidad vectorial, sus componentes rectangulares son

$$(L_{1-2})_x = \int_{t_1}^{t_2} F_x\, dt \qquad (L_{1-2})_y = \int_{t_1}^{t_2} F_y\, dt \qquad (L_{1-2})_z = \int_{t_1}^{t_2} F_z\, dt \qquad (14.34)$$

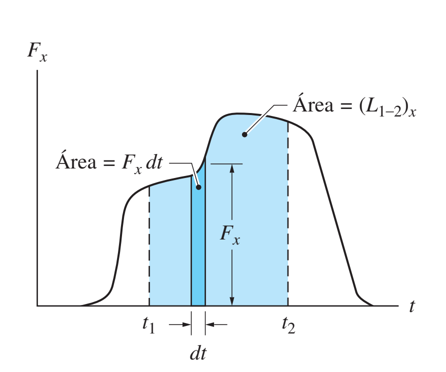


Fig. 14.8

donde F_x, F_y y F_z son las componentes de $\mathbf{F}$. Como se muestra en la figura 14.8, $(L_{1-2})_x$ es igual al área bajo el diagrama F_x contra t entre t_1 y t_2. De modo similar, $(L_{1-2})_y$ y $(L_{1-2})_z$ son las áreas bajo los diagramas F_y contra t y F_z contra t, respectivamente. Este hecho es muy útil al calcular el impulso de una fuerza cuando se da su dependencia en el tiempo en forma gráfica o numérica. La dimensión de impulso es $[FT]$; así, sus unidades son N · s, lb · s, etcétera.

En los métodos de trabajo-energía descritos en los apartados anteriores, sólo participan en el análisis las fuerzas que efectúan trabajo. En consecuencia, el diagrama de cuerpo libre podría reemplazarse por uno de fuerza activa. Sin embargo, los diagramas de cuerpo libre siempre deben utilizarse para calcular impulsos porque una fuerza tiene un impulso sin importar si realiza trabajo o no.

Un caso especial importante surge si la fuerza $\mathbf{F}$ es *constante* en magnitud y dirección. Entonces el impulso de la fuerza se reduce a $\mathbf{L}_{1-2} = \mathbf{F}\int_{t_1}^{t_2} dt$, o

$$\mathbf{L}_{1-2} = \mathbf{F}(t_2 - t_1) = \mathbf{F}\,\Delta t \qquad (\mathbf{F}\text{ constante}) \qquad (14.35)$$

Así, el impulso de una fuerza constante es igual al producto de la fuerza y del intervalo de tiempo, al estar el impulso en la misma dirección que la fuerza.

b. Cantidad de movimiento de una partícula y diagramas de cantidad de movimiento

La cantidad de movimiento $\mathbf{p}$ de una partícula de masa m en un instante de tiempo se define como

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \qquad (14.36)$$

*Con más exactitud, se les llama impulso *lineal* y cantidad de movimiento *lineal* para distinguirlos del impulso *angular* y de la cantidad de movimiento *angular*, que se analizarán en el siguiente apartado. Sin embargo, es común omitir el término "lineal" cuando el significado es claro a partir del contexto.

donde **v** es el vector velocidad de la partícula en ese instante. La cantidad de movimiento de una partícula es una cantidad vectorial que actúa en la misma dirección que la velocidad. La dimensión de cantidad de movimiento es $[ML/T]$ o de manera equivalente, $[FT]$. Por tanto, la dimensión de cantidad de movimiento coincide con la dimensión de impulso.

El *diagrama de cantidad de movimiento* para una partícula es un esquema de ésta que muestra su vector cantidad de movimiento $m\mathbf{v}$. Los diagramas de cantidad de movimiento son herramientas útiles en el análisis de problemas que emplean el principio de impulso y cantidad de movimiento.

c. *Relación fuerza-cantidad de movimiento*

Si la masa de la partícula es constante, la segunda ley de Newton establece que $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, donde $\Sigma\mathbf{F}$ es la fuerza resultante que actúa sobre la partícula. Si la masa varía con el tiempo, esta ley toma la forma

$$\Sigma\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v})$$

Al sustituir $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ se obtiene

$$\Sigma\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \tag{14.37}$$

La ecuación (14.37) es la forma general de la segunda ley de Newton: la fuerza resultante es igual a la razón de cambio de la cantidad de movimiento. Por tanto, $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ debería considerarse como un caso especial que es válido sólo para la masa constante.

d. *Principio de impulso-cantidad de movimiento*

Si se multiplican ambos lados de la ecuación (14.37) por dt y se integra del tiempo t_1 a t_2, se obtiene

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\,dt = \int_{t_1}^{t_2} d\mathbf{p} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 \tag{14.38}$$

donde $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}(t_1)$ y $\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}(t_2)$ representan la cantidad de movimiento en t_1 y t_2, respectivamente. Como el lado izquierdo de la ecuación (14.38) es el impulso de **F** en el intervalo de tiempo de t_1 a t_2, entonces

$$\mathbf{L}_{1-2} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = \Delta\mathbf{p} \tag{14.39}$$

La ecuación (14.39) se denomina *principio de impulso-cantidad de movimiento* o el *balance de impulso y cantidad de movimiento*. Cuando este principio se aplica al análisis de movimiento, la técnica se llama *método de impulso-cantidad de movimiento*.

Si se emplea un sistema de coordenadas rectangulares, la ecuación (14.39) es equivalente a las siguientes tres ecuaciones escalares:

$$
\begin{aligned}
(L_{1-2})_x &= \Delta p_x = (mv_x)_2 - (mv_x)_1 \\
(L_{1-2})_y &= \Delta p_y = (mv_y)_2 - (mv_y)_1 \\
(L_{1-2})_z &= \Delta p_z = (mv_z)_2 - (mv_z)_1
\end{aligned}
\tag{14.40}
$$

Precaución Es preciso ser cuidadosos para no confundir el principio de trabajo-energía, $U_{1-2} = T_2 - T_1$, con el principio de impulso-cantidad de movimiento, $\mathbf{L}_{1-2} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$. Algunas diferencias importantes entre ambos son las siguientes:

- El trabajo (U_{1-2}) es una cantidad *escalar* asociada con una fuerza y un cambio en la posición.
- El impulso ($\mathbf{L}_{1-2}$) es una cantidad *vectorial* asociada con una fuerza y un intervalo de tiempo.
- La energía cinética (T) es una cantidad *escalar* asociada con una masa y su rapidez en un instante.
- La cantidad de movimiento ($\mathbf{p}$) es una cantidad *vectorial* asociada con una masa y su vector de velocidad en un instante.
- El principio de trabajo-energía, $U_{1-2} = \Delta T$, es una relación *escalar*, mientras que el principio de impulso-cantidad de movimiento, $\mathbf{L}_{1-2} = \Delta\mathbf{p}$, es una relación *vectorial*.

e. Conservación de la cantidad de movimiento

Del principio de impulso-cantidad de movimiento, ecuación (14.39), se observa que si el impulso que actúa sobre una partícula es cero durante un intervalo de tiempo dado, la cantidad de movimiento de la partícula se conservará durante ese intervalo. En otras palabras, si $\mathbf{L}_{1-2} = \mathbf{0}$, entonces

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 \quad \text{o} \quad \Delta\mathbf{p} = \mathbf{0} \tag{14.41}$$

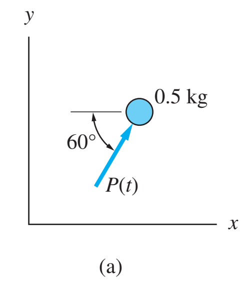
La ecuación (14.41) se denomina *principio de conservación de la cantidad de movimiento*. Observe que este principio es válido sólo si el impulso de la fuerza resultante que actúa sobre la partícula es cero. Si no hay una fuerza resultante que actúa sobre una partícula, el impulso resultante será obviamente cero y la cantidad de movimiento se conservará. Sin embargo, es posible que el impulso de una fuerza (es decir, su integral en el tiempo) sea cero aun si ésta no lo es.

Como la cantidad de movimiento es una cantidad vectorial, es posible que una o dos de sus componentes se conserven sin que la cantidad de movimiento total se mantenga. Por ejemplo, se observa a partir de la ecuación (14.40) que la cantidad de movimiento en la dirección x se conservará si $(L_{1-2})_x = 0$, sin importar los valores de $(L_{1-2})_y$ y $(L_{1-2})_z$.

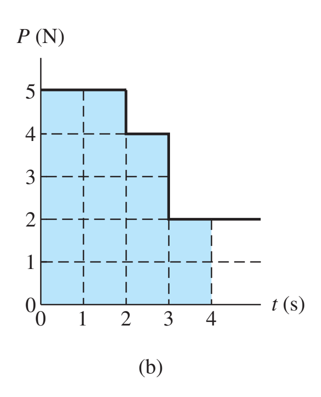
El principio de conservación de la cantidad de movimiento es muy útil en el análisis de impacto y otras interacciones entre partículas.

Problema de ejemplo 14.8

Al tiempo $t = 0$, la velocidad de la partícula de 0.5 kg de la figura (a) es 10 m/s hacia la derecha. Además de su peso (el plano xy es vertical), sobre la partícula actúa la fuerza $\mathbf{P}(t)$. La dirección de $\mathbf{P}(t)$ es constante durante el movimiento, pero su magnitud varía con el tiempo, como se muestra en la figura (b). Calcule la velocidad de la partícula cuando $t = 4$ s.



(a)

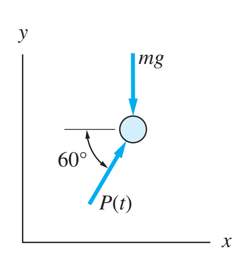


(b)

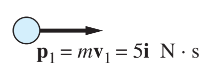
Solución

El método de impulso-cantidad de movimiento es el medio más directo para resolver este problema porque: 1. el método de impulso-cantidad de movimiento se ocupa directamente con el cambio de la cantidad de movimiento (velocidad) durante un intervalo de tiempo, y 2. los impulsos de las fuerzas se calculan con facilidad.

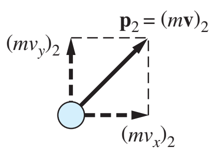
En las figuras (c)-(e) se muestran los diagramas requeridos para resolver el problema con el método de impulso-cantidad de movimiento, donde los subíndices 1 y 2 corresponden a $t = 0$ y 4 s, respectivamente. En la figura (c) se encuentra el DCL de la partícula en un tiempo t arbitrario. La figura (d) muestra el diagrama de cantidad de movimiento cuando $t = 0$, donde $\mathbf{p}_1 = m\mathbf{v}_1 = 0.5(10)\mathbf{i} = 5\mathbf{i}$ N · s. En la figura (e) se presenta el diagrama de cantidad de movimiento cuando $t = 4$ s, donde ambas componentes de $m\mathbf{v}_2$ se dibujaron en las direcciones coordenadas positivas.



(c) DCL al tiempo t



(d) Diagrama de cantidad de movimiento ($t = 0$)



(e) Diagrama de cantidad de movimiento ($t = 4$ s)

Impulso del peso Ya que el peso es una fuerza constante, las componentes de su impulso se calculan fácilmente a partir de la ecuación (14.35):

$$(L_{1-2})_x = 0$$
$$(L_{1-2})_y = -mg\Delta t = -0.5(9.81)(4) = -19.620 \text{ N} \cdot \text{s} \qquad \text{(a)}$$

Impulso de ***P****(t)* El área bajo el diagrama P contra t de la figura (b) entre 0 y 4 es $5(2) + 4(1) + 2(1) = 16$ N · s. Debido a que la dirección de $\mathbf{P}(t)$ es constante, las componentes de su impulso son

$$(L_{1-2})_x = 16(\cos 60°) = 8.0 \text{ N} \cdot \text{s}$$
$$(L_{1-2})_y = 16(\text{sen } 60°) = 13.856 \text{ N} \cdot \text{s} \qquad \text{(b)}$$

Al sustituir las ecuaciones (a) y (b) en el principio de impulso-cantidad de movimiento, la ecuación (14.40), para la dirección x resulta

$$(L_{1-2})_x = (mv_x)_2 - (mv_x)_1 \quad \xrightarrow{+} \quad 8.0 = 0.5(v_x)_2 - 5$$

de la que se obtiene

$$(v_x)_2 = 26.00 \text{ m/s}$$

Para la dirección y, resulta

$$(L_{1-2})_y = (mv_y)_2 - (mv_y)_1 \qquad +\uparrow \quad 13.856 - 19.620 = 0.5(v_y)_2 - 0$$

que da

$$(v_y)_2 = -11.53 \text{ m/s}$$

A continuación se muestra el vector velocidad correspondiente al tiempo $t = 4$ s.

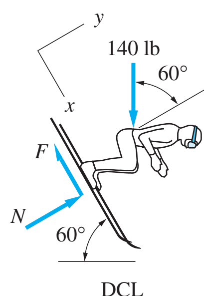
26.00
11.53
θ
$v = 28.4$ m/s

$$\theta = \tan^{-1}\frac{11.53}{26.00} = 23.9^\circ \qquad \textit{Respuesta}$$

Problema de ejemplo **14.9**

La parte recta de una rampa de esquí está inclinada 60º respecto a la horizontal. Después de abandonar la puerta de arranque con velocidad despreciable, un esquiador de 140 lb alcanza una rapidez de 88 pies/s en 3.5 s. Determine el coeficiente de fricción cinética entre los esquíes y la rampa. Desprecie la resistencia del aire.

Solución



DCL

Del DCL del esquiador en la figura, se obtiene

$$\Sigma F_y = 0 \qquad +\nearrow \quad N - 140\cos 60^\circ = 0$$

$$N = 70 \text{ lb}$$

Para encontrar la fuerza F de fricción, se aplica el principio de impulso-cantidad de movimiento en la dirección x. Observando que el peso del esquiador y la fuerza F de fricción son constantes, con el principio de impulso-cantidad de movimiento se obtiene

$$(L_{1-2})_x = m[(v_2)_x - (v_1)_x] \qquad \searrow + \quad (140 \operatorname{sen} 60^\circ - F)(3.5) = \frac{140}{32.2}(88 - 0)$$

$$F = 11.927 \text{ lb}$$

Por tanto, el coeficiente de fricción cinética es

$$\mu_k = \frac{F}{N} = \frac{11.927}{70} = 0.1704 \qquad \textit{Respuesta}$$

Problemas

14.68 La pelota de 4 oz golpea la superficie horizontal con la rapidez $v_0 = 20$ pies/s. Si 15% de la energía se pierde durante el impacto, obtenga el impulso que actuó sobre la pelota durante éste.

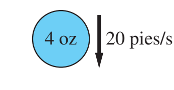


Fig. P14.68

14.69 La velocidad de una partícula de 2 kg al tiempo $t = 0$ es $\mathbf{v} = 10\mathbf{i}$ m/s. Determine la velocidad en $t = 5$ s si la partícula está bajo la acción de la fuerza $\mathbf{F} = 2t\mathbf{i} - 0.6t^2\mathbf{j}$ N, donde t está en segundos.

14.70 Una fuerza horizontal constante **P** (que no se muestra) actúa sobre el cuerpo de 4 lb conforme éste se desliza sin fricción sobre una mesa horizontal. Durante el intervalo de tiempo de $t = 5$ s a $t = 7.5$ s, la velocidad cambia como se indica en la figura. Encuentre la magnitud y la dirección de **P**.

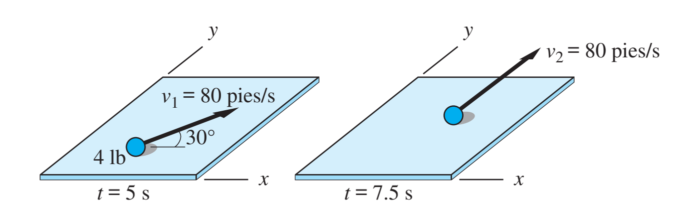


Fig. P14.70

14.71 La masa de 0.2 kg se mueve en el plano vertical *xy*. Al tiempo $t = 0$, la velocidad de la masa es $8\mathbf{j}$ m/s. Además de su peso, la masa está bajo la acción de la fuerza $\mathbf{F}(t) = F(t)\mathbf{i}$, donde la magnitud de la fuerza varía con el tiempo como se muestra en la figura. Determine el vector velocidad de la masa en $t = 4$ s.

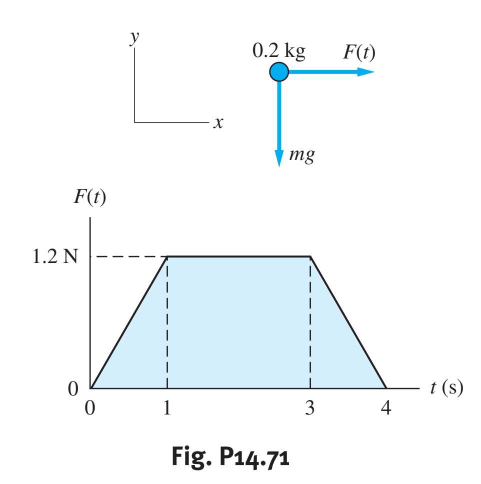


Fig. P14.71

14.72 Obtenga el menor tiempo en que un automóvil de 2800 lb que viaja a 60 mi/h puede detenerse si el coeficiente de fricción estática entre las llantas y el terreno es 0.65. Suponga que el camino está nivelado.

14.73 Resuelva el problema 14.72 si el automóvil desciende por una colina que está inclinada 5° respecto a la horizontal.

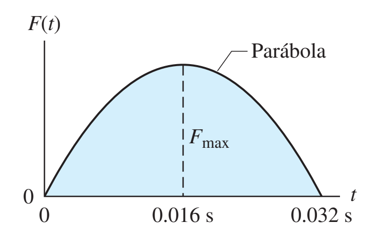


Fig. P14.74

14.74 Una pelota de tenis de 0.09 kg que viaja a 15 m/s rebota en la dirección opuesta a 20 m/s después de ser golpeada por una raqueta. Durante el periodo de contacto de 0.032 s, la magnitud de la fuerza $F(t)$ ejercida por la raqueta tiene la dependencia temporal parabólica que se muestra. Calcule F_{max}, el máximo valor de $F(t)$. Debido al breve tiempo de contacto, puede despreciarse el impulso del peso de la pelota.

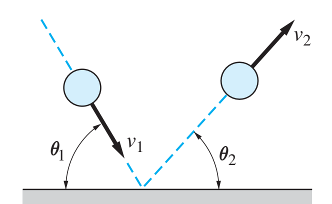


Fig. P14.75, P14.76

14.75 Una pelota de 2.8 oz golpea una superficie horizontal, rígida y sin fricción, con la rapidez $v_1 = 30$ pies/s a un ángulo $\theta_1 = 70°$. El ángulo de rebote es $\theta_2 = 62°$. Calcule (a) la rapidez de la pelota inmediatamente después del rebote y (b) el impulso resultante que actúa sobre ella durante el tiempo de contacto con la superficie.

14.76 Una pelota con una masa de 0.05 kg golpea una superficie horizontal, rígida y sin fricción, con la rapidez $v_1 = 20$ m/s en un ángulo $\theta_1 = 45°$. El impulso que actúa sobre la bola durante su contacto con la superficie es 1.8 N · s. Encuentre la velocidad v_2 de rebote y el ángulo θ_2 correspondiente.

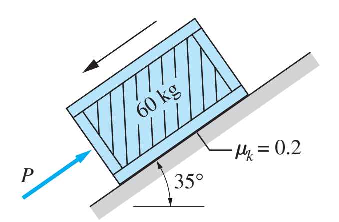


Fig. P14.77

14.77 El cajón de 60 kg resbala hacia abajo sobre el plano inclinado. El coeficiente de fricción cinética entre el cajón y el plano es 0.2 y la fuerza P aplicada al cajón es constante. Si la rapidez del cajón cambia de 8 m/s a cero en 3 segundos, obtenga P.

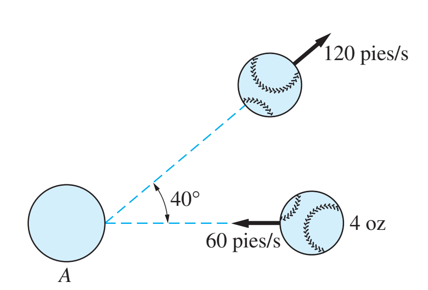


Fig. P14.78

14.78 La pelota de beisbol de 4 oz se lanza en sentido horizontal hacia un bateador, a 60 pies/s. Después de ser golpeada por el bat en A, la velocidad de la pelota es 120 pies/s en la dirección indicada. Determine la magnitud de la fuerza promedio aplicada a la pelota por el bat durante los 0.02 s de contacto.

14.79 El bloque de 100 kg está en reposo sobre una superficie sin fricción cuando se aplica la fuerza $P(t)$. Obtenga (a) la máxima velocidad del bloque y el tiempo correspondiente, y (b) la velocidad del bloque en $t = 6$ s.

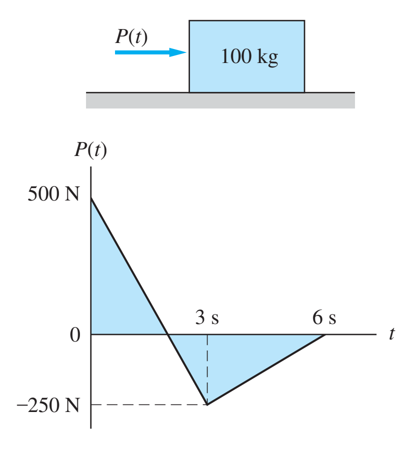


Fig. P14.79

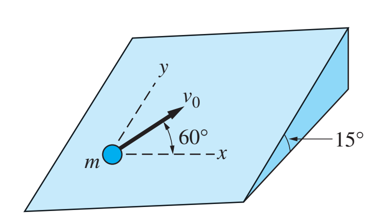


Fig. P14.80

14.80 La partícula de masa m se lanza sobre una superficie inclinada con la rapidez $v_0 = 2$ m/s en la dirección que se muestra. Despreciando la fricción, obtenga el vector velocidad de la partícula 0.5 s más tarde.

14.81 La caja de 12 kg se desliza hacia abajo en una rampa sobre la superficie horizontal. El impacto con el vértice en A reduce la rapidez de la caja de 6 m/s a 4.8 m/s. Determine el vector impulso dado por el vértice a la caja.

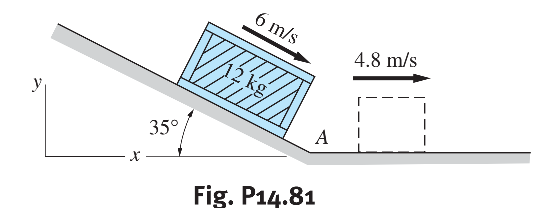


Fig. P14.81

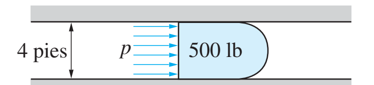


Fig. P14.82

14.82 El tapón de limpieza de 500 lb se inserta en una tubería de 4 pies de diámetro y se empuja por medio de la presión de aire p que varía como $p = 4(1-e^{-0.5t})$ lb/pie^2 (t está en segundos). Si el tapón arranca a partir del reposo en $t = 0$, encuentre su rapidez en $t = 10$ s. Desprecie la fricción.

14.83 El bloque de peso W está en reposo sobre una superficie rugosa en $t = 0$. Durante el periodo de $t = 0$ a 2 s, el bloque se encuentra bajo la acción de una fuerza que varía de manera sinusoidal $P(t) = W\,\text{sen}(\pi t/2)$ donde t está en segundos. Al utilizar los coeficientes de fricción que se indican obtenga (a) el tiempo en que el bloque empieza a moverse y (b) su velocidad, medida en pies/s, en $t = 2$ s.

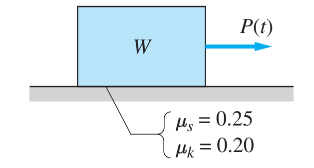


Fig. P14.83

14.84 Se coloca un paquete sobre una banda transportadora que se mueve a 4 m/s. Si el coeficiente de fricción cinética entre el paquete y la banda es 0.25, calcule el tiempo que aquél requiere para alcanzar la rapidez de la banda.

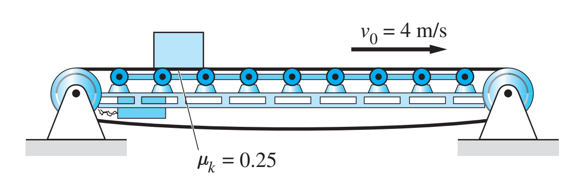


Fig. P14.84

14.85 Un paquete inicia el ascenso de la parte inclinada de la banda con la misma velocidad que ésta, a saber, 8 pies/s. Sin embargo, el paquete resbala sobre la banda debido a la fricción insuficiente, alcanzando su altura máxima en 4 s. Determine el coeficiente de fricción cinética entre el paquete y la banda transportadora.

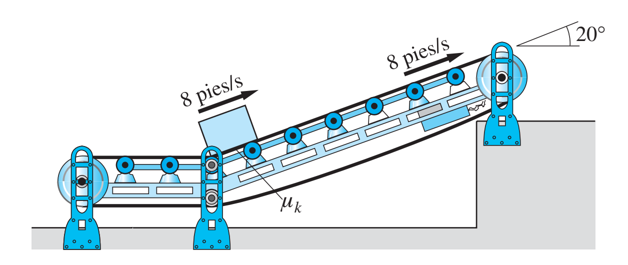


Fig. P14.85

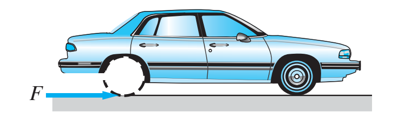


Fig. P14.86

14.86 El automóvil de 3200 lb arranca del reposo en $t = 0$ sobre un camino recto y nivelado. La fuerza impulsora F que los ejes de las llantas aplican al vehículo va-

ría con el tiempo como $F = 289t - 17.4t^2$ lb, donde t está en segundos. Calcule la rapidez del automóvil en mi/h cuando $t = 10$ s.

14.87 El elevador de peso W parte del reposo en el tiempo $t = 0$ y alcanza su rapidez de operación en 3 s. La aceleración se alcanza variando la tensión F en el cable AB (por medio de un circuito de control), como se muestra en el diagrama. Encuentre la rapidez de operación del elevador en m/s.

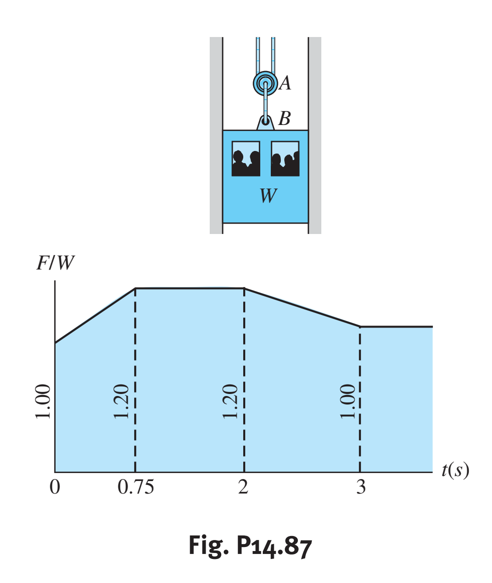


Fig. P14.87

14.7 Principio de impulso y cantidad de movimiento angulares

El impulso angular y la cantidad de movimiento angular son los momentos del impulso (lineal) y de la cantidad de movimiento (lineal), respectivamente. Para cada ecuación que se ha presentado en el apartado anterior existe una ecuación análoga para el impulso angular y la cantidad de movimiento angular. El principio de impulso-cantidad de movimiento angular sirve para el mismo propósito que su contraparte lineal: relaciona el cambio en la velocidad de una partícula durante un intervalo de tiempo con las fuerzas que actúan sobre ésta.

a. Impulso angular de una fuerza

Como se muestra en la figura 14.9, sea **r** el vector que se ha dibujado desde un punto arbitrario A al punto de aplicación de la fuerza **F**. El *impulso angular* de **F** respecto al punto A durante el intervalo de tiempo t_1 a t_2 se define como

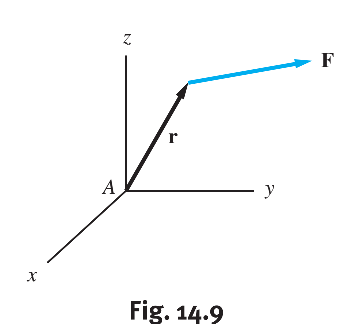


Fig. 14.9

$$(\mathbf{A}_A)_{1-2} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{r} \times \mathbf{F}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_A\, dt \qquad (14.42)$$

donde $\mathbf{M}_A = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ es el momento de **F** respecto al punto A. La cantidad de movimiento angular es un *vector* de dimensión $[FLT]$. Por tanto, sus unidades son N · m · s, lb · pie · s, etcétera.

Sea A el origen de un sistema de coordenadas rectangulares, como se indica en la figura 14.9. Entonces se puede escribir $\mathbf{M}_A = M_x\mathbf{i} + M_y\mathbf{j} + M_z\mathbf{k}$ y las componentes rectangulares de la ecuación (14.42) se convierten en

$$(A_x)_{1-2} = \int_{t_1}^{t_2} M_x\,dt \qquad (A_y)_{1-2} = \int_{t_1}^{t_2} M_y\,dt \qquad (A_z)_{1-2} = \int_{t_1}^{t_2} M_z\,dt \tag{14.43}$$

A las componentes de $(\mathbf{A}_A)_{1-2}$ en la ecuación (14.43) también se les llama impulsos angulares de $\mathbf{F}$ respecto a los ejes de coordenadas que pasan por el punto A.

Si la *dirección* de $\mathbf{M}_A$ es constante en el intervalo de tiempo t_1 a t_2, entonces $\mathbf{M}_A$ y $(\mathbf{A}_A)_{1-2}$ tienen la misma dirección. En ese caso, la magnitud del impulso angular es $(A_A)_{1-2} = \int_{t_1}^{t_2} M_A\,dt$.

Si la *dirección* y la *magnitud* de $\mathbf{M}_A$ son constantes, entonces el impulso angular queda $(\mathbf{A}_A)_{1-2} = \mathbf{M}_A \int_{t_1}^{t_2} dt$, que da

$$(\mathbf{A}_A)_{1-2} = \mathbf{M}_A(t_2 - t_1) = \mathbf{M}_A\,\Delta t \qquad (\mathbf{M}_A \text{ constante}) \tag{14.44}$$

b. *Cantidad de movimiento angular de una partícula*

Por definición, la *cantidad de movimiento angular* de una partícula respecto a un punto A es

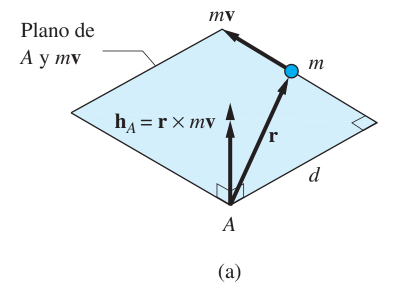
$$\mathbf{h}_A = \mathbf{r} \times (m\mathbf{v}) \tag{14.45}$$

donde $m\mathbf{v}$ es la cantidad de movimiento de la partícula y $\mathbf{r}$ denota su vector de posición medido desde A, como se muestra en la figura 14.10(a). A la cantidad de movimiento angular también se le conoce como el *momento de la cantidad de movimiento*, porque la ecuación (14.45) es análoga a la definición del momento de una fuerza: $\mathbf{M}_A = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$. La dimensión de la cantidad de movimiento angular es $[ML^2/T]$ o de manera equivalente, $[FLT]$, que coincide con la dimensión del impulso angular.

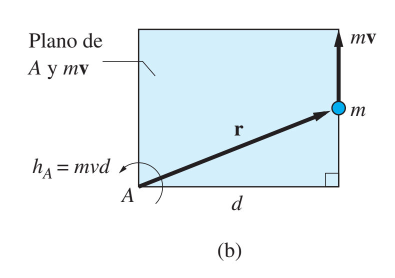
De las propiedades del producto cruz, se deduce que la cantidad de movimiento angular es un *vector* de magnitud

$$h_A = mvd \tag{14.46}$$

donde d es el *brazo de momento* de A del vector de cantidad de movimiento $m\mathbf{v}$, como se indica en la figura 14.10(a). La dirección del vector cantidad de movimiento angular es perpendicular al plano generado por A y $m\mathbf{v}$. En la figura 14.10(b) se muestra una vista bidimensional de la cantidad de movimiento angular. Observe que el sentido de h_A (siguiendo las manecillas del reloj o contrario a ellas) está determinado por la regla de la mano derecha.



(a)



(b)

Fig. 14.10

Al emplear las componentes rectangulares $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}$, la ecuación (14.45) da

$$\mathbf{h}_A = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ mv_x & mv_y & mv_z \end{vmatrix} \tag{14.47}$$

Cuando se desarrolla la determinante, se obtiene

$$\mathbf{h}_A = h_x\mathbf{i} + h_y\mathbf{j} + h_z\mathbf{k} \tag{14.48a}$$

donde

$$h_x = m(yv_z - zv_y) \qquad h_y = m(zv_x - xv_z) \qquad h_z = m(xv_y - yv_x) \tag{14.48b}$$

son las componentes de la cantidad de movimiento angular de la partícula respecto a los ejes de coordenadas a través de A.

c. *Relación momento-cantidad de movimiento angular*

Al derivar la cantidad de movimiento angular de la partícula en la ecuación (14.45) respecto al tiempo, se obtiene

$$\dot{\mathbf{h}}_A = \frac{d}{dt}[\mathbf{r} \times (m\mathbf{v})] = \mathbf{r} \times \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times (m\mathbf{v})$$

De acuerdo con la ecuación (14.37), $d(m\mathbf{v})/dt = \Sigma\mathbf{F}$, donde $\Sigma\mathbf{F}$ es la fuerza resultante que actúa sobre la partícula. Por tanto,

$$\dot{\mathbf{h}}_A = \mathbf{r} \times \Sigma\mathbf{F} + \dot{\mathbf{r}} \times (m\mathbf{v}) = \mathbf{M}_A + \dot{\mathbf{r}} \times (m\mathbf{v})$$

donde $\mathbf{M}_A = \mathbf{r} \times \Sigma\mathbf{F}$ es el momento de la fuerza resultante respecto al punto A. Al resolver para el momento, se obtiene

$$\mathbf{M}_A = \dot{\mathbf{h}}_A - \dot{\mathbf{r}} \times (m\mathbf{v}) \tag{14.49}$$

Recuerde que $\mathbf{r}$ es el vector de posición de la partícula medido desde A. No se han establecido restricciones sobre la elección de A; puede ser un punto fijo o móvil. Si A está fijo respecto a un marco de referencia inercial, entonces $\dot{\mathbf{r}}$ es la velocidad $\mathbf{v}$ de la partícula y el último término de la ecuación (14.49) será $\dot{\mathbf{r}} \times (m\mathbf{v}) = \mathbf{v} \times (m\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ (el producto cruz de dos vectores paralelos es cero). En consecuencia,

$$\mathbf{M}_A = \dot{\mathbf{h}}_A \qquad (A\text{: punto fijo}) \tag{14.50}$$

Cuando A no está fijo, entonces en general la ecuación (14.50) no es válida y es preciso emplear la (14.49). Este caso se desarrolla en el siguiente capítulo.

d. Principio de impulso-cantidad de movimiento angular

La integración de la ecuación (14.50) en el intervalo de tiempo de t_1 a t_2 da

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_A \, dt = \int_{t_1}^{t_2} d\mathbf{h}_A = (\mathbf{h}_A)_2 - (\mathbf{h}_A)_1$$

donde $(\mathbf{h}_A)_1 = \mathbf{h}_A(t_1)$ y $(\mathbf{h}_A)_2 = \mathbf{h}_A(t_2)$. Como el lado izquierdo de $\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_A \, dt = (\mathbf{A}_A)_{1-2}$ es el impulso angular de la fuerza resultante respecto al punto A, entonces se puede escribir

$$(\mathbf{A}_A)_{1-2} = (\mathbf{h}_A)_2 - (\mathbf{h}_A)_1 = \Delta\mathbf{h}_A \qquad (A: \text{ punto fijo}) \tag{14.51a}$$

que se conoce como el *principio de impulso angular y cantidad de movimiento angular*. Las componentes rectangulares de la ecuación (14.51a) son

$$\begin{aligned} (A_x)_{1-2} &= (h_x)_2 - (h_x)_1 \\ (A_y)_{1-2} &= (h_y)_2 - (h_y)_1 \\ (A_z)_{1-2} &= (h_z)_2 - (h_z)_1 \end{aligned} \tag{14.51b}$$

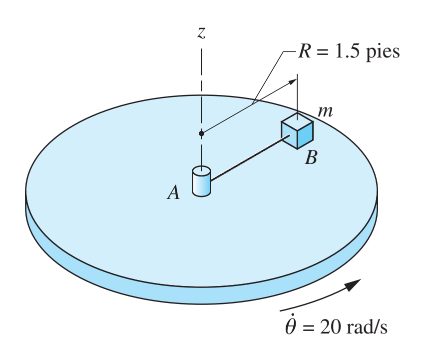
Las posibilidades de cometer errores pueden reducirse al aplicar este principio gracias al uso de un diagrama de cuerpo libre para calcular el impulso angular de la fuerza resultante que actúa sobre la partícula.

e. Conservación de la cantidad de movimiento angular

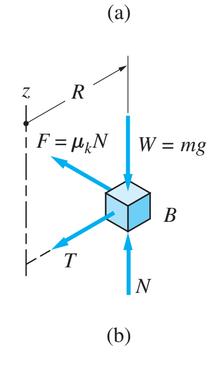
Si el impulso angular respecto al punto A es cero, a partir de la ecuación (14.51a) resulta que se conserva la cantidad de movimiento angular de la partícula respecto a A. En otras palabras,

$$\text{si} \quad (\mathbf{A}_A)_{1-2} = 0, \quad \text{entonces} \quad (\mathbf{h}_A)_1 = (\mathbf{h}_A)_2 \quad (A: \text{ punto fijo}) \tag{14.52}$$

que se conoce como el *principio de conservación de la cantidad de movimiento angular*. Si sólo se anula una componente del impulso angular, entonces sólo se conserva la componente correspondiente de la cantidad de movimiento angular. Por ejemplo, si $(A_x)_{1-2} = 0$ en la ecuación (14.51b), entonces $(h_x)_1 = (h_x)_2$, aun si h_y y h_z no se conservan.



(a)



(b)

Problema de ejemplo 14.10

La tabla circular de la figura (a) rota con rapidez angular constante $\dot{\theta} = 20$ rad/s respecto al eje vertical z. El bloque B de masa m se coloca sobre la tabla giratoria con velocidad inicial cero, con la cuerda AB tensa. Si el bloque se desliza durante 3.11 s antes de alcanzar la rapidez de la tabla, determine el coeficiente de fricción cinética entre ambos.

Solución

En la figura (b) se muestra el DCL del bloque B. La tensión T en la cuerda pasa por el eje z, mientras que el peso W y la fuerza normal de contacto N son paralelos al eje. Así que el momento de cada una de esas fuerzas respecto al eje z es cero. El momento de la fuerza de fricción cinética F respecto al eje z es $M_z = (\mu_k N)R$. Al sustituir $N = mg$, que se obtiene de la ecuación de equilibrio $\Sigma F_z = 0$, se tiene que

$$M_z = \mu_k mgR$$

Sea $t_1 = 0$ el tiempo en que el bloque se coloca sobre la mesa, entonces $t_2 =$ 3.11 s es el tiempo en que el deslizamiento termina. Ya que M_z es constante, el impulso angular de la fuerza de fricción respecto al eje z durante el periodo del deslizamiento es

$$(A_z)_{1-2} = M_z(t_2 - t_1) = \mu_k mgRt_2$$

El cambio correspondiente en la cantidad de movimiento angular del bloque respecto al eje z es

$$(h_z)_2 - (h_z)_1 = mvR - 0 = mR^2\dot{\theta}$$

donde se sustituyó $v = R\dot{\theta}$. Al aplicar el principio de impulso-cantidad de movimiento angular respecto al eje z, se obtiene

$$(A_z)_{1-2} = (h_z)_2 - (h_z)_1 \qquad \mu_k mgRt_2 = mR^2\dot{\theta}$$

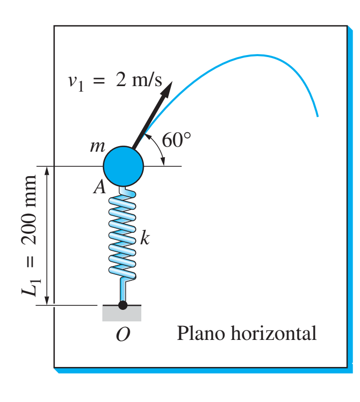
por lo que el coeficiente de fricción cinética es

$$\mu_k = \frac{R\dot{\theta}}{gt_2} = \frac{(1.5)(20)}{(32.2)(3.11)} = 0.300$$ *Respuesta*

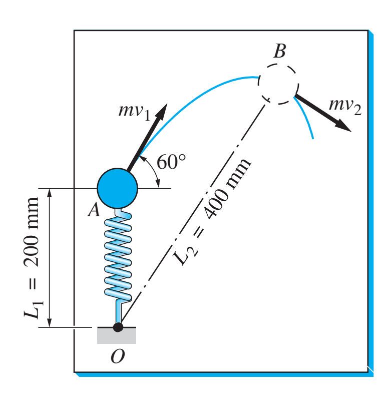
Problema de ejemplo **14.11**

La partícula de masa $m = 0.3$ kg que se muestra en la figura (a) se mueve sobre un plano horizontal sin fricción. Un extremo del resorte lineal está unido a la partícula y el otro extremo al punto fijo O. Si la partícula se lanza desde la posición A con velocidad $\mathbf{v}_1$ como se indica, determine la rigidez k del resorte si la distancia máxima entre la trayectoria de la partícula y el punto O es 400 mm. El resorte está sin deformación cuando la partícula se encuentra en A.

Solución



(a)



(b) Diagrama de cantidad de movimiento

El diagrama de la figura (b) muestra los vectores cantidad de movimiento $m\mathbf{v}_1$ y $m\mathbf{v}_2$ cuando la partícula está en los puntos A y B, respectivamente. El punto B es la posición de la partícula cuando la longitud del resorte es igual a su valor máximo $L_2 = 400$ mm. Observe que la dirección de $\mathbf{v}_2$ es tangente a la trayectoria de la partícula; en otras palabras, el vector velocidad es perpendicular al resorte.

Debido a que la fuerza del resorte siempre está dirigida hacia O, se conserva la cantidad de movimiento angular respecto a O. En relación con los vectores cantidad de movimiento de la figura (b) y al recordar que la cantidad de movimiento angular es igual al momento de la cantidad de movimiento lineal ($h_O = mvd$), se obtiene

$$(h_O)_1 = (h_O)_2 \quad \circlearrowleft + \quad (mv_1 \cos 60°)L_1 = mv_2 L_2$$

lo que resulta

$$v_2 = \frac{v_1 \cos 60° L_1}{L_2} = \frac{2 \cos 60° (200)}{400} = 0.500 \text{ m/s}$$

Ya que la fuerza del resorte es conservativa, se conserva la energía mecánica de la partícula

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}k\delta_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}k\delta_2^2$$

donde δ_1 y δ_2 son las elongaciones del resorte cuando la partícula está en A y B, respectivamente. Al sustituir $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = L_2 - L_1 = 200$ mm $= 0.200$ m y los valores para m, v_1 y v_2, se obtiene

$$\frac{1}{2}(0.3)(2)^2 + 0 = \frac{1}{2}(0.3)(0.500)^2 + \frac{1}{2}k(0.200)^2$$

de lo que resulta la rigidez del resorte:

$$k = 28.1 \text{ N/m}$$ *Respuesta*

Problemas

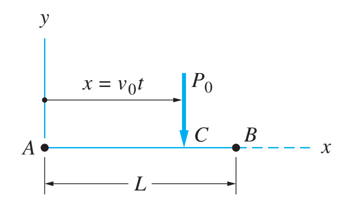


Fig. P14.88

14.88 La fuerza P_0 tiene magnitud y dirección constantes, pero su punto de aplicación C se mueve sobre el eje x con rapidez constante v_0. Determine el impulso angular de la fuerza respecto al punto A para el intervalo de tiempo en que C se mueve desde A hasta B.

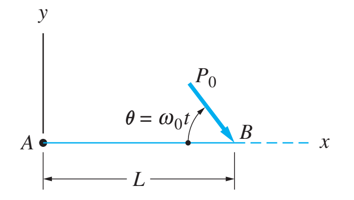


Fig. P14.89

14.89 La fuerza que se muestra tiene magnitud constante P_0 y el punto fijo de aplicación B, pero su línea de acción rota con rapidez angular constante ω_0. Determine el impulso angular de la fuerza respecto al punto A para el tiempo durante el cual la fuerza rota de $\theta = 0$ a $\theta = 90°$.

14.90 La velocidad de la partícula de 500 g en B es $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ m/s. Calcule la cantidad de movimiento angular de la partícula respecto al punto A en este instante.

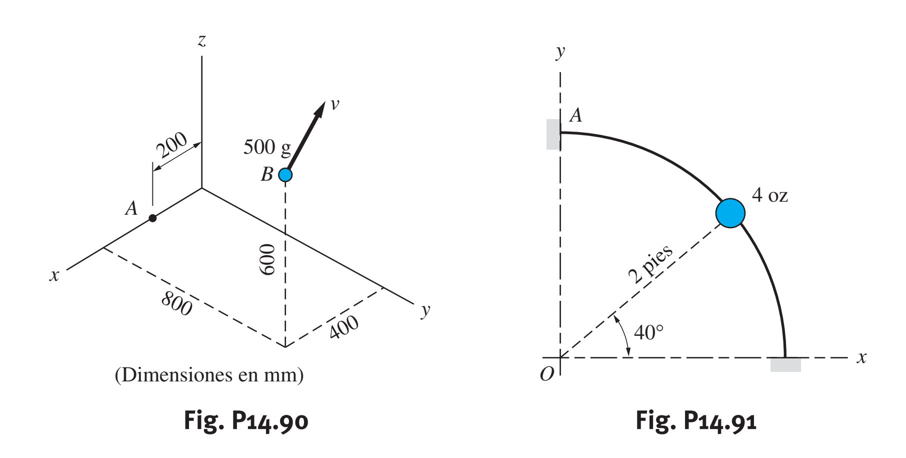


Fig. P14.90

Fig. P14.91

14.91 La cuenta de 4 oz se desliza hacia abajo sobre el alambre circular. Cuando la cuenta está en la posición que se muestra, su rapidez es de 15 pies/s. Para este instante, obtenga la cantidad de movimiento angular de la cuenta respecto: (a) al punto O y (b) al punto A.

14.92 La partícula de masa m viaja sobre una trayectoria circular de radio R. Cuando la partícula se encuentra en la posición que se muestra, su rapidez es v. ¿Cuál es su cantidad de movimiento angular respecto a O en esta posición?

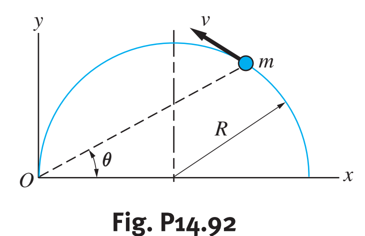


Fig. P14.92

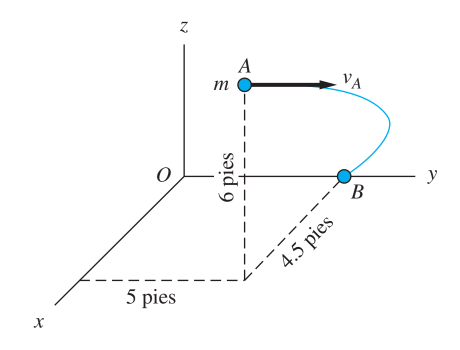


Fig. P14.93

14.93 La partícula de masa m se mueve de manera que su cantidad de movimiento angular respecto a O siempre se conserva. Cuando la partícula está en A, su velocidad es $v_A = 20$ pies/s en la dirección y. En B, la rapidez se ha incrementado a $v_B = 50$ pies/s. Determine el vector de velocidad de la partícula en B.

14.94 Una cuerda restringe a la partícula de masa m para que viaje en una trayectoria circular sobre la mesa horizontal. El coeficiente de fricción cinética entre la partícula y la mesa es 0.15. Si la rapidez inicial de la partícula es $v_1 = 8$ m/s, obtenga el tiempo que transcurre antes de que ésta se detenga.

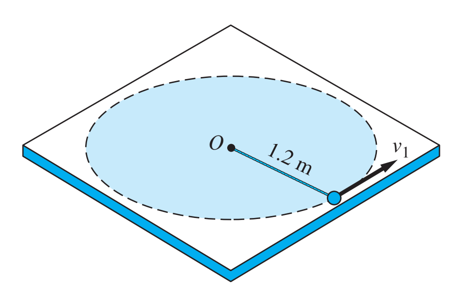
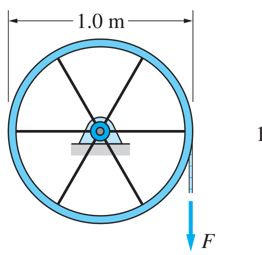


Fig. P14.94

14.95 Una cuerda enrollada en el rin de una rueda se jala con la fuerza F, que varía con el tiempo como se muestra. Calcule el impulso angular de F respecto al centro de la rueda durante el intervalo de tiempo $t = 0$ a $t = 0.5$ s.



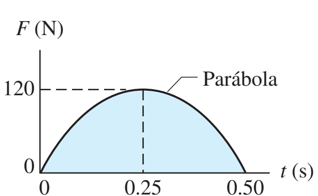


Fig. P14.95

14.96 El montaje consta de un collar de 12 lb unido a una varilla doblada de peso despreciable. El montaje rota libremente respecto al eje vertical con la velocidad angular $\dot{\theta} = 5$ rad/s cuando el freno M se aplica al tiempo $t = 0$. Si M varía con el tiempo como se indica, ¿cuánto más continuará rotando el montaje?

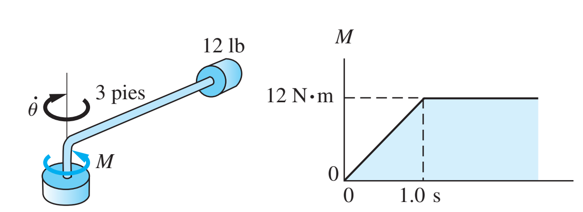


Fig. P14.96

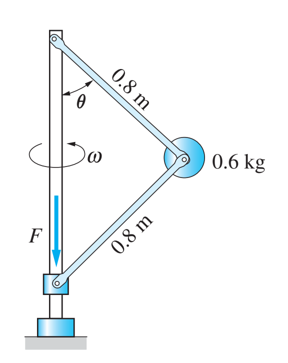


Fig. P14.97

14.97 La masa de 0.6 kg está sostenida por dos brazos de masa despreciable. El ángulo θ de los brazos puede variar al cambiar la fuerza F que actúa sobre el collar deslizante. Cuando $\theta = 70°$, el montaje rota libremente respecto al eje vertical con velocidad angular $\omega = 15$ rad/s. Determine la velocidad angular después de que θ se redujo a 30°.

14.98 La trayectoria del satélite terrestre es la elipse

$$\frac{1}{R} = (119.3 \times 10^{-9})(1 + 0.161 \cos\theta)$$

donde R está en metros. Si la rapidez del satélite en A es 6000 m/s, obtenga su rapidez en B.

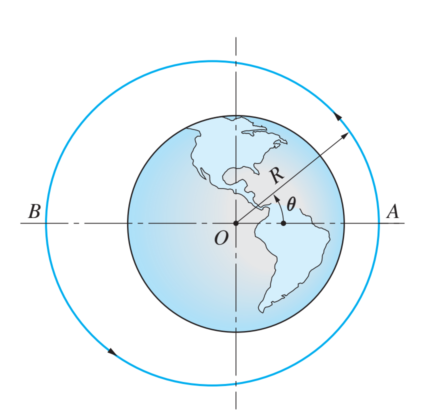


Fig. P14.98

14.99 La partícula, conectada por un resorte al punto fijo O, resbala sin fricción sobre una mesa horizontal. La partícula se lanza en A con velocidad v_A en la dirección y. Si su velocidad en B es $\mathbf{v}_B = 3.66\mathbf{i} - 5.72\mathbf{j}$ m/s, encuentre v_A.

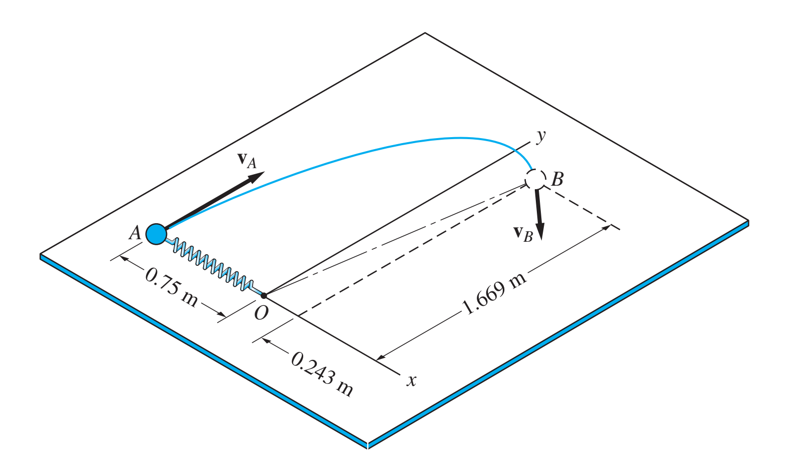


Fig. P14.99

14.100 Un motor rota la varilla OB respecto al eje z con rapidez angular constante de 8 rad/s. El resorte unido al deslizador A de 2 kg se libera a razón constante de 0.25 m/s. Determine la magnitud de la fuerza de contacto entre el deslizador y la varilla cuando $R = 0.8$ m. Desprecie la fricción y la masa de la varilla OB.

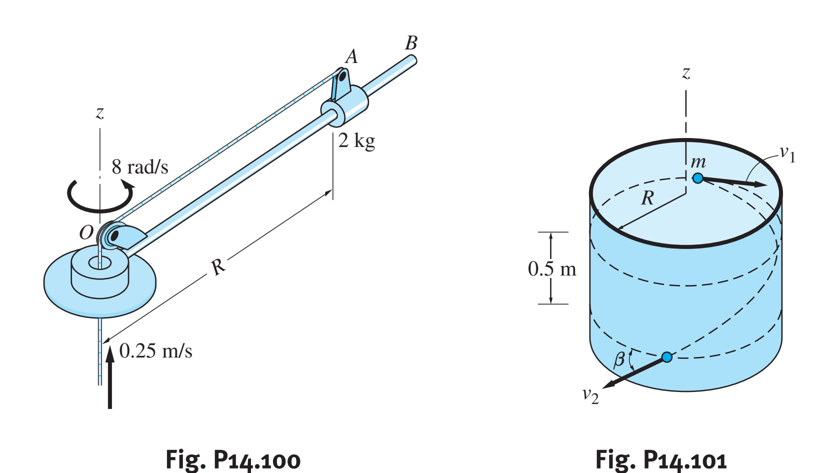


Fig. P14.100 **Fig. P14.101**

14.101 La partícula de masa m se lanza sobre la pared interior de un recipiente cilíndrico con la rapidez $v_1 = 6$ m/s dirigida horizontalmente. Cuando la partícula alcanza la posición 0.5 m bajo la posición de lanzamiento, obtenga (a) la rapidez v_2 y (b) el ángulo β entre $\mathbf{v}_2$ y la horizontal. Desprecie la fricción.

14.102 Un satélite terrestre tiene una órbita elíptica con la propiedad $R_1/R_2 = 0.25$. Si la rapidez del satélite en el perigeo (punto más cercano a la Tierra) es $v_1 = 8$ km/s, determine (a) la rapidez v_2 en el apogeo (punto más alejado de la Tierra) y (b) la distancia R_1. Utilice $GM_T = 3.98 \times 10^{14}$ m^3/s^2, donde G es la constante gravitacional universal y M_T es la masa de la Tierra.

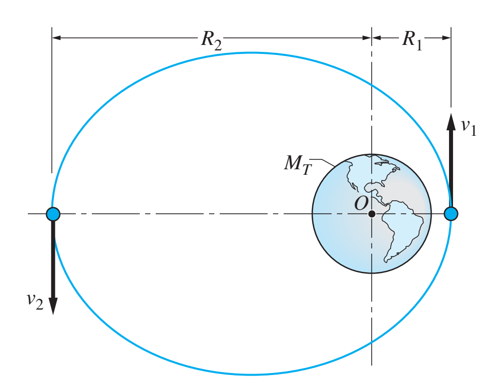


Fig. P14.102

14.103 El disco de 0.5 kg se desliza sin fricción sobre una superficie horizontal. La cuerda elástica que conecta el disco al punto fijo O tiene una rigidez de 100 N/m y una longitud libre de 0.75 m. Al disco se le da una velocidad inicial v_1 en la dirección $\beta = 70°$ en la posición que se muestra. Determine la v_1 menor para la que la cuerda siempre permanecerá tensa. (Sugerencia: **v** es perpendicular a la cuerda cuando $R = R_{min}$.)

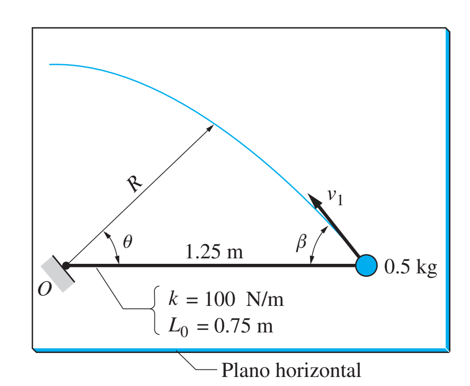


Fig. P14.103

14.104 El peso A de 2 lb está unido a una cuerda que pasa por el agujero O en la mesa horizontal sin fricción. Conforme el peso rota respecto a O, el extremo de la cuerda se jala hacia abajo con rapidez constante de 0.25 pies/s. Si la rapidez angular $\dot{\theta}$ de la cuerda es 8 rad/s cuando $R = 2$ pies, obtenga lo siguiente cuando $R = 1.0$ pies, (a) la rapidez angular de la cuerda y (b) su aceleración angular.

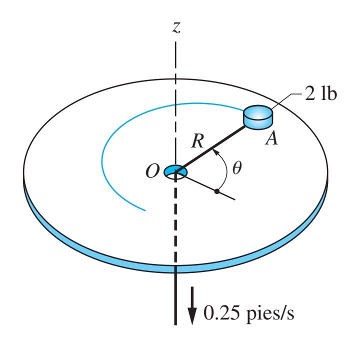


Fig. P14.104

14.105 La masa de 0.5 kg del péndulo esférico se lanza en la posición 1 con velocidad v_1 en la dirección que es horizontal y perpendicular a la cuerda. Si el punto más

bajo alcanzado por la masa es la posición 2, encuentre v_1. (Sugerencia: v_2 también es horizontal y perpendicular a la cuerda).

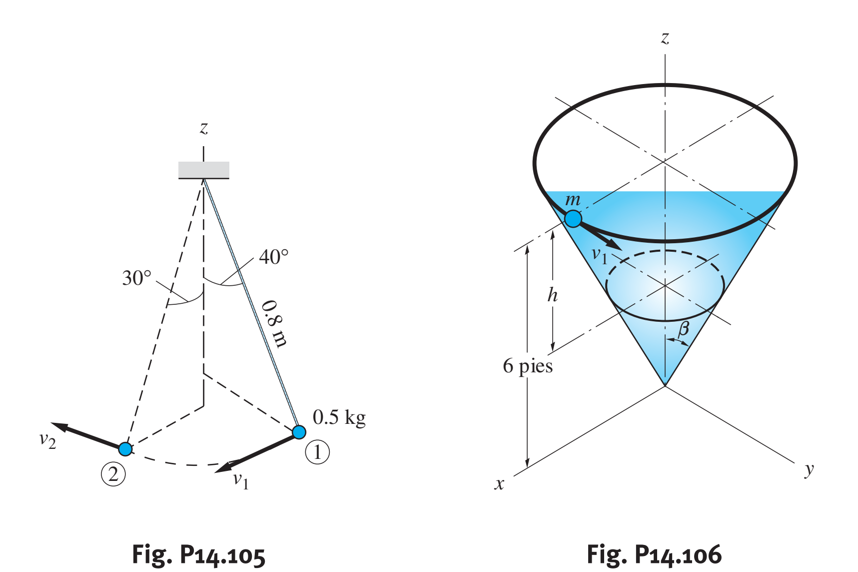


Fig. P14.105 **Fig. P14.106**

14.106 La partícula de masa m resbala sin fricción en el interior de un recipiente cónico. La velocidad inicial de la partícula es $v_1 = 10$ pies/s, tangente al borde del recipiente. Cuando la partícula está a una distancia $h = 1.5$ pies abajo del borde del cono, determine (a) la rapidez de la partícula y (b) el ángulo entre el vector velocidad y la horizontal.

*14.8 *Movimiento espacial bajo una fuerza gravitacional*

El movimiento espacial bajo la acción de una fuerza gravitacional pertenece a la categoría de movimiento de fuerza central. Las ecuaciones que gobiernan este último pueden deducirse rápidamente de los principios de conservación de la cantidad de movimiento angular y de la energía mecánica.

a. *Movimiento de fuerza central*

Considere una partícula que se mueve bajo la acción de una fuerza **F** que siempre está dirigida hacia un punto fijo A. Para este caso, que se llama *movimiento de fuerza central*, se tiene

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \dot{\mathbf{h}}_A = \mathbf{0}$$

donde **r** es el vector de posición de la partícula, dibujado desde A. De la ecuación (14.45), se tiene

$$\mathbf{h}_A = \mathbf{r} \times (m\mathbf{v}) = \text{constante} \tag{14.53}$$

Observe que esta ecuación sólo puede ser válida si **r** y **v** siempre están en el mismo plano. Por tanto, el movimiento de fuerza central es un movimiento plano con cantidad de movimiento angular constante respecto al punto A.

b. Movimiento bajo atracción gravitacional

El resto de este apartado analiza el movimiento de los cuerpos (por ejemplo, satélites) que se mueven bajo la atracción gravitacional de un planeta (o del Sol). La atención se limita a las trayectorias para las que la atracción gravitacional del planeta es la única fuerza que necesita considerarse. Sean m la masa del cuerpo y M la masa del planeta, se supone que $m \ll M$, lo que significa que el planeta se considera fijo durante el análisis.

Debido a que la única fuerza que actúa sobre el cuerpo es su peso, que siempre está dirigido hacia el centro del planeta, entonces el cuerpo experimenta un movimiento de fuerza central, como se describe en la ecuación (14.53). Es conveniente describir este movimiento, confinado a un plano, en términos de las coordenadas polares R y θ, como se muestra en la figura 14.11. El sistema de referencia xy no rotatorio tiene su origen en F, el centro del planeta, también llamado *foco* de la trayectoria.

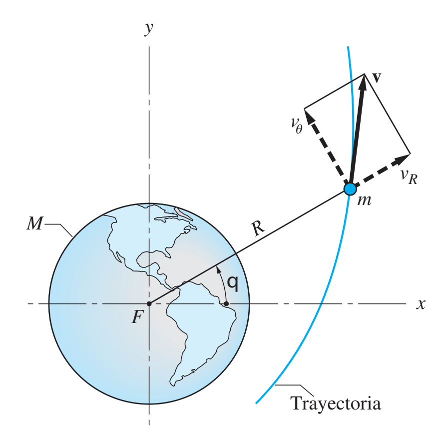


Fig. 14.11

De la ecuación (14.53) se sabe que se conserva la cantidad de movimiento angular del cuerpo respecto a F, lo que significa que $R(mv_\theta) = R(mR\dot{\theta})$ es constante. Si h_0 es la cantidad de movimiento angular respecto a F *por unidad de masa* del cuerpo,* entonces

$$h_0 = Rv_\theta = R^2\dot{\theta} \qquad \text{(una constante)} \tag{14.54}$$

La energía cinética del cuerpo es $T = \frac{1}{2}mv^2$ y su energía potencial, de acuerdo con la ecuación (14.29), es $V_g = -GMm/R$ (donde G es la constante gravitacional universal). Ya que la atracción gravitacional es una fuerza conservativa, entonces se conserva la energía total del cuerpo. Sea E_0 la energía total por unidad de masa, es decir, $E_0 = (T + V_g)/m$, se tiene

$$E_0 = \frac{1}{2}v^2 - \frac{GM}{R} \qquad \text{(una constante)} \tag{14.55}$$

Observe que la energía total por unidad de masa puede ser positiva, negativa o cero.

*El subíndice 0 (el número cero) en h y después en E, se utiliza para denotar constantes asociadas con la unidad de masa. No debe confundírsele con la letra O.

c. *Ecuación de la trayectoria*

Ahora se determina la ecuación de la trayectoria del cuerpo en la forma $R = R(\theta)$. Se empieza por sustituir $v^2 = v_R^2 + v_\theta^2$ en la ecuación (14.55) para obtener

$$E_0 = \frac{1}{2}(v_R^2 + v_\theta^2) - \frac{GM}{R} \tag{a}$$

Con la ayuda de la ecuación (14.54), v_R y R pueden eliminarse de la ecuación (a). Al aplicar la regla de la cadena para derivar la ecuación (14.54), se tiene

$$\dot{R}v_\theta + R\dot{v}_\theta = 0 \tag{b}$$

Sustituyendo

$$\dot{R} = v_R \quad \text{y} \quad \dot{v}_\theta = \frac{dv_\theta}{d\theta}\dot{\theta} = \frac{dv_\theta}{d\theta}\frac{v_\theta}{R}$$

La ecuación (b) se convierte en

$$v_R v_\theta = -R\left(\frac{dv_\theta}{d\theta}\frac{v_\theta}{R}\right)$$

que resulta en

$$v_R = -\frac{dv_\theta}{d\theta} \tag{c}$$

Al sustituir $R = h_0/v_\theta$ [véase la ecuación (14.54)] y la ecuación (c) en la ecuación (a), se encuentra

$$E_0 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{dv_\theta}{d\theta}\right)^2 + v_\theta^2\right] - \frac{GMv_\theta}{h_0} \tag{d}$$

La solución de la ecuación (d) para $d\theta$ es

$$d\theta = \pm\frac{dv_\theta}{\left(2E_0 + \dfrac{2GMv_\theta}{h_0} - v_\theta^2\right)^{1/2}} \tag{e}$$

Cuando se observa que E_0 es constante, la ecuación (e) puede integrarse (véase una tabla de integrales) para obtener

$$\theta = \pm\,\text{sen}^{-1}\left(\frac{v_\theta - \dfrac{GM}{h_0}}{\dfrac{GM}{h_0}\left[1 + 2E_0\left(\dfrac{h_0}{GM}\right)^2\right]^{1/2}}\right) - \alpha_0 \tag{f}$$

donde α_0 es una constante de integración. El signo dual significa que para cada punto sobre la trayectoria asociado con v_θ y θ, existe un segundo punto asociado con v_θ y ($\theta + \pi$). Por tanto, el signo menos será omitido sin pérdida de generalidad.

La inversión de la ecuación (f) implica

$$\text{sen}(\theta + \alpha_0) = \frac{v_\theta - \dfrac{GM}{h_0}}{\dfrac{GM}{h_0}e} \tag{14.56}$$

donde

$$e = \sqrt{1 + 2E_0\left(\frac{h_0}{GM}\right)^2} \tag{14.57}$$

es la *excentricidad* de la trayectoria. Es posible demostrar que e siempre es un número real; es decir, que el término que se encuentra debajo del radical en la ecuación (14.57) no puede ser negativo.

Al resolver la ecuación (14.56) para v_θ, se obtiene

$$v_\theta = \frac{GM}{h_0}[1 + e\,\text{sen}(\theta + \alpha_0)] \tag{14.58}$$

Debido a que $R = h_0/v_\theta$, de acuerdo con la ecuación (14.54), entonces

$$R = \frac{h_0^2}{GM[1 + e\,\text{sen}(\theta + \alpha_0)]} \tag{14.59}$$

De la ecuación (14.59) se observa que el menor valor de R ocurre cuando sen$(\theta + \alpha_0) = 1$; es decir, cuando $\theta + \alpha_0 = \pi/2$. Al hacer que esta posición corresponda a $\theta = 0$ (el eje x), como se muestra en la figura 14.12, la constante de integración es $\alpha_0 = \pi/2$. Como sen$(\theta + \alpha_0) =$ sen$[\theta + (\pi/2)] = \cos\theta$, las ecuaciones(14.58) y (14.59) quedan

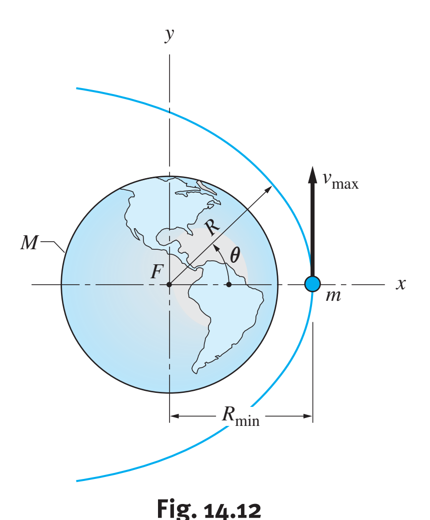


Fig. 14.12

$$v_\theta = \frac{GM}{h_0}(1 + e\cos\theta) \tag{14.60}$$

y

$$R = \frac{h_0^2}{GM(1 + e\cos\theta)} \tag{14.61}$$

La ecuación (14.61), que es la de la trayectoria, representa una sección cónica (círculo, elipse, parábola o hipérbola) en coordenadas polares, donde e es la excentricidad de la curva y F (el centro del planeta) es el foco.

Observe que las ecuaciones (14.60) y (14.61) son válidas sólo si el eje x se selecciona de manera tal que R es mínima cuando $\theta = 0$. Si éste no es el caso, entonces deben emplearse las ecuaciones (14.58) y (14.59).

De la ecuación (14.61), se observa que el valor mínimo de R es

$$R_{min} = R|_{\theta=0} = \frac{h_0^2}{GM(1 + e)} \tag{14.62}$$

A esto sigue que $\dot{R} = v_R = 0$ cuando $\theta = 0$, lo cual significa que $v = v_\theta$ en esta posición. Aún más, una inspección de la ecuación (14.55) revela que v es máxima cuando R es mínima, y así se concluye que la velocidad máxima es

$$v_{max} = v_\theta|_{\theta=0} = \frac{GM(1 + e)}{h_0} \tag{14.63}$$

Constante gravitacional universal: $G = 6.673 \times 10^{-11}$ m$^3 \cdot$ kg$^{-1} \cdot$ s^{-2} (3.439 $\times 10^{-8}$ pies$^3 \cdot$ slugs$^{-1} \cdot$ s^{-2})				
	Radio medio ecuatorial		**Masa**	
Cuerpo	**km**	**mi**	**kg**	**slugs**
Sol	696 000	432 000	1.9884×10^{30}	136.25×10^{27}
Luna	1 737	1 079	$0.073\,483 \times 10^{24}$	5.0352×10^{21}
Mercurio	2 440	1 516	$0.330\,22 \times 10^{24}$	22.627×10^{21}
Venus	6 052	3 761	$4.869\,0 \times 10^{24}$	333.63×10^{21}
Tierra	6 378.14	3 963.19	$5.974\,2 \times 10^{24}$	409.37×10^{21}
Marte	3 396	2 110	$0.641\,91 \times 10^{24}$	43.985×10^{21}

Los valores SI se han tomado de *The Astronomical Almanac for the Year 2007* (*Almanaque Astronómico para el Año 2007*), Oficina Náutica de Almanaques. Los valores en unidades del sistema inglés son conversiones de los valores del SI, utilizando los factores 1 slug = 14.593 903 kg, 1 mi (sistema inglés) = 1.609 344 km y 1 pie = 0.3048 m.

Tabla 14.2 Selección de constantes del Sistema Solar

dirigida como se muestra en la figura 14.12. Al sustituir $h_0 = R_{min} v_{max}$ en la ecuación (14.63) y resolver para v_{max} resulta

$$v_{max} = \sqrt{\frac{GM(1+e)}{R_{min}}} \tag{14.64}$$

En la tabla 14.2 se presentan los datos numéricos para los cuerpos seleccionados de nuestro sistema solar. Dichos datos deben emplearse para resolver los problemas que se encuentran al final de este apartado.

d. *Clasificación de trayectorias*

Se ha indicado que la ecuación (14.61) representa una sección cónica, lo que significa que la trayectoria debe ser una de las siguientes curvas, dependiendo del valor de e.

Caso I:	$e = 0$	círculo
Caso II:	$0 < e < 1$	elipse
Caso III:	$e = 1$	parábola
Caso IV:	$e > 1$	hipérbola

Si la trayectoria es circular o elíptica, se dice que el cuerpo fue capturado por el planeta. Entonces el cuerpo es un satélite y su trayectoria es una órbita. Para los otros dos casos, el jalón gravitacional no es suficientemente fuerte para capturar el cuerpo.

Caso	e	Trayectoria	E_0	Velocidad	Distancia del foco	Gráfica de la trayectoria
I	$e = 0$	Círculo	$E_0 < 0$	$v_{circ} = \sqrt{\frac{GM}{R_{circ}}}$	$R_{circ} = \frac{h_0^2}{GM}$	y, F, v_{circ}, x, R_{circ}
II	$0 < e < 1$	Elipse	$E_0 < 0$	$v_{max} = \sqrt{\frac{GM(1+e)}{R_{min}}}$ $v_{min} = \sqrt{\frac{GM(1-e)}{R_{max}}}$ $= \sqrt{\frac{(1-e)^2}{1+e} \cdot \frac{GM}{R_{min}}}$	$R_{min} = \frac{h_0^2}{GM(1+e)}$ $R_{max} = \frac{h_0^2}{GM(1-e)}$	y, F, v_{max}, x, v_{min}, R_{max}, R_{min}
III	$e = 1$	Parábola	$E_0 = 0$	$v_{max} = v_{esc}$ $= \sqrt{\frac{2GM}{R_{min}}}$	$R_{min} = \frac{h_0^2}{2GM}$ $R_{max} = \infty$ en $\theta = \pi$	y, F, $v_{max} = v_{esc}$, x, R_{min}
IV	$e > 1$	Hipérbola	$E_0 > 0$	$v_{max} = \sqrt{\frac{GM(1+e)}{R_{min}}}$	$R_{min} = \frac{h_0^2}{GM(1+e)}$ $R_{max} = \infty$ en $\cos\theta_1 = -\frac{1}{e}$	y, v_{max}, F, θ_1, x, θ_1, R_{min}

La velocidad v_{esc} es la *velocidad de escape* (la velocidad mínima requerida para escapar del campo gravitacional del planeta).

Tabla 14.3 Clasificación de trayectorias

En la tabla 14.3 se resumen las propiedades de los cuatro tipos de trayectorias.

e. Propiedades de órbitas elípticas

La figura 14.13 muestra una órbita elíptica centrada en el punto O. Observe que *perigeo* y *apogeo* son los nombres que se dan a las ubicaciones R_{max} y R_{min}, respectivamente.* Es posible demostrar que la interpretación geométrica de la excentricidad es

$$e = \frac{R_{max} - R_{min}}{R_{max} + R_{min}} \tag{14.65}$$

En la figura 14.13, la longitud del semieje mayor está dada por

$$a = \frac{R_{max} + R_{min}}{2} = \frac{h_0^2}{GM(1 - e^2)} \tag{14.66}$$

*Los términos *perigeo* y *apogeo* sólo se utilizan para el movimiento orbital con la Tierra como foco. Cuando el cuerpo que atrae no es la Tierra los términos correspondientes son *periapsis* y *apoapsis*, respectivamente.

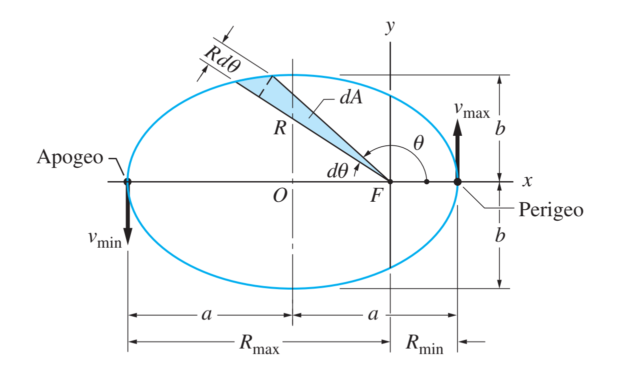


Fig. 14.13

A partir de la geometría analítica, la longitud del semieje menor puede escribirse como

$$b = \sqrt{R_{max}R_{min}} = \frac{h_0^2}{GM\sqrt{1-e^2}} \tag{14.67}$$

Al emplear las ecuaciones (14.66) y (14.67), el área A de la elipse queda así

$$A = \pi ab = \frac{\pi}{2}(R_{max} + R_{min})\sqrt{R_{max}R_{min}} = \frac{\pi h_0^4}{(GM)^2(1-e^2)^{3/2}} \tag{14.68}$$

El *periodo* τ de una órbita elíptica (o circular) es el tiempo requerido para completar una revolución sobre la trayectoria. El periodo puede relacionarse con el área de la elipse si se observa que el área diferencial que se muestra en la figura 14.13 se expresa como $dA = (1/2)R(Rd\theta)$. La razón en la que el área es barrida por la recta entre el foco y el satélite, a saber dA/dt, se llama *velocidad areal*. Utilizando la ecuación (14.54), se tiene

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}R^2\dot{\theta} = \frac{h_0}{2} \tag{14.69}$$

Observe que la velocidad areal es constante. Ésta es una de las celebradas leyes que Johannes Kepler (1571-1630) publicó, basándose en observaciones astronómicas. Al integrar respecto al tiempo de $t = 0$ a $t = \tau$ se obtiene $A = h_0\tau/2$. Por tanto, cuando se emplea la ecuación (14.68), el periodo es

$$\tau = \frac{2A}{h_0} = \frac{2\pi h_0^3}{(GM)^2(1-e^2)^{3/2}} \tag{14.70}$$

Un caso especial de trayectoria elíptica es la trayectoria balística, donde la elipse interseca la superficie del planeta. Todos los proyectiles siguen dicha trayectoria si se desprecia la resistencia del aire. Si la elevación del proyectil es suficientemente pequeña para que se pueda despreciar la variación de la fuerza gravitacional con la altura, entonces la trayectoria asume la forma parabólica familiar. Así, la trayectoria parabólica es una aproximación a la verdadera trayectoria elíptica, válida para los cambios pequeños de elevación.

Problema de ejemplo **14.12**

La excentricidad de la órbita terrestre alrededor del Sol es 0.017 y el periodo de la órbita es 365.26 días. Calcule los valores máximo y mínimo de: 1. la distancia de la Tierra al centro del Sol, y 2. la velocidad de la Tierra alrededor del Sol.

Solución

Cálculos preliminares

Al utilizar la tabla 14.1, la constante GM_s, donde M_s es la masa del Sol, queda

$$GM_s = (6.673 \times 10^{-11})(1.9884 \times 10^{30}) = 1.3269 \times 10^{20}\ \text{m}^3/\text{s}^2$$

El periodo dado de la órbita es

$$\tau = 365.26\ \text{días} \times \frac{24\ \text{h}}{1\ \text{día}} \times \frac{3600\ \text{s}}{1\ \text{h}} = 31.56 \times 10^6\ \text{s}$$

Resolviendo la ecuación (14.70) para h_0 (la cantidad de movimiento angular constante por unidad de masa de la Tierra respecto al centro del Sol) se tiene

$$\begin{aligned} h_0 &= \left[\frac{(GM_s)^2\tau(1-e^2)^{3/2}}{2\pi}\right]^{1/3} \\ &= \left[\frac{(1.3269 \times 10^{20})^2(31.56 \times 10^6)[1-(0.017)^2]^{3/2}}{2\pi}\right]^{1/3} \\ &= 4.455 \times 10^{15}\ \text{m}^2/\text{s} \end{aligned}$$

Parte 1

Empleando las fórmulas para el Caso II de la tabla 14.3 y las constantes recién determinadas, las distancias máxima y mínima de la Tierra al centro del Sol son

$$\left.\begin{matrix} R_{\text{min}} \\ R_{\text{max}} \end{matrix}\right\} = \frac{h_0^2}{GM_s(1 \pm e)} = \frac{(4.455 \times 10^{15})^2}{(1.3269 \times 10^{20})(1 \pm 0.017)}$$

a partir de las cuales se encuentra que

$$R_{\text{max}} = 1.522 \times 10^{11}\ \text{m} \qquad R_{\text{min}} = 1.471 \times 10^{11}\ \text{m}$$ *Respuesta*

Parte 2

Otra vez, respecto al Caso II de la tabla 14.3, la velocidad máxima de la Tierra está dada por

$$\begin{aligned} v_{\text{max}} &= \sqrt{\frac{GM_s(1+e)}{R_{\text{min}}}} = \sqrt{\frac{(1.3269 \times 10^{20})(1+0.017)}{1.471 \times 10^{11}}} \\ &= 30.29 \times 10^3\ \text{m/s} = 30.29\ \text{km/s} \end{aligned}$$ *Respuesta*

La velocidad mínima de la Tierra, con las fórmulas de la tabla 14.1, es

$$v_{\min} = \sqrt{\frac{GM_s(1-e)}{R_{\max}}} = \sqrt{\frac{(1.3269 \times 10^{20})(1-0.017)}{1.522 \times 10^{11}}}$$

$$= 29.28 \times 10^3 \text{ m/s} = 29.28 \text{ km/s} \qquad \textit{Respuesta}$$

Observe que la velocidad media de la Tierra es $(1/2)(v_{\max} + v_{\min}) = (1/2)\times(30.29 + 29.28) = 29.79$ km/s, que concuerda, dentro de cuatro dígitos significativos, con el valor comúnmente aceptado.

Un método alternativo para calcular $v_{\max}$ y $v_{\min}$ es utilizar el hecho de que h_0 es constante, es decir, resolver las ecuaciones $h_0 = v_{\max}R_{\min} = v_{\min}R_{\max}$.

Problemas

14.107 Una sonda espacial se lanza en A con la velocidad v_0, dirigida como se muestra. ¿Para qué valor de v_0 la sonda pasará por B? ¿Qué clasificación tiene la trayectoria?

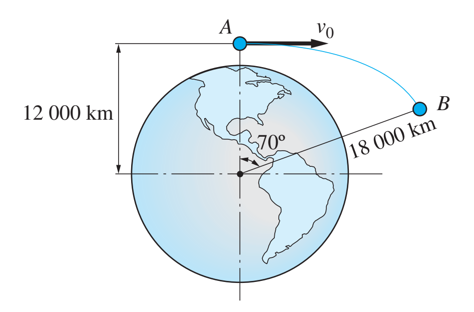


Fig. P14.107

14.108 La órbita de Ceres, un planetoide entre Marte y Júpiter, tiene una excentricidad de 0.08 y un semieje mayor de 413.7×10^9 m. Determine el periodo de la órbita.

14.109 Suponga que la órbita de la Luna alrededor de la Tierra es un círculo (en realidad su excentricidad es 0.055) y si sabe que el periodo de la órbita es de 27.3 días, calcule la distancia en millas entre los centros de la Tierra y la Luna.

14.110 Obtenga las distancias máxima y mínima en millas entre los centros de la Tierra y la Luna, tomando en cuenta la excentricidad de la órbita lunar. Utilice el dato que se proporcionó en el problema 14.109.

14.111 La órbita de Fobos, una luna de Marte, tiene una excentricidad de 0.018 y un semieje mayor de 9380 km. Determine el periodo orbital de Fobos.

14.112 Una nave espacial de 14 Mg está en órbita alrededor de la Luna. Las alturas máxima y mínima de la nave sobre la superficie lunar son 340 y 140 km, respec-

tivamente. Despreciando el efecto gravitacional de la Tierra, encuentre la mínima energía requerida para que la nave escape de la gravedad lunar y pueda regresar a la Tierra.

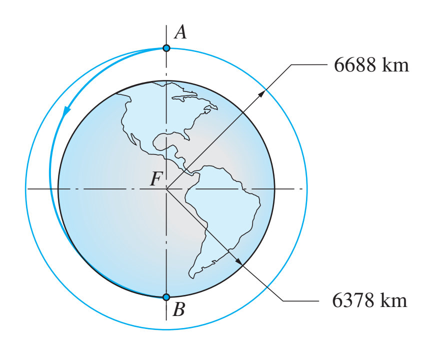


Fig. P14.113

14.113 Una cápsula espacial de 6000 kg está en una órbita circular de radio 6688 km alrededor de la Tierra. Cuando la cápsula está en A, su rapidez se reduce por el encendido de los retrocohetes. Determine el impulso requerido de estos últimos si la cápsula debe aterrizar en B con su línea de vuelo tangente a la superficie terrestre.

14.114 Conforme la nave espacial se aproxima al planeta Venus, su rapidez es $v_1 = 8000$ pies/s cuando $x_1 = 5.0 \times 10^8$ pies y $y_1 = 1.0 \times 10^8$ pies. Obtenga: (a) el tipo de trayectoria que seguirá la nave; (b) la distancia mínima entre la superficie de Venus y la trayectoria, y (c) la rapidez máxima de la nave.

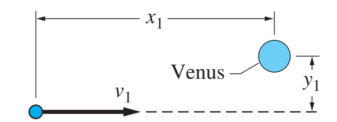


Fig. P14.114, P14.115

14.115 Para la nave descrita en el problema 14.114, determine: (a) la mayor rapidez v_1 que produciría una órbita elíptica, suponiendo que una órbita elíptica fuera posible, y (b) si una órbita elíptica es factible sin que la nave choque con la superficie de Venus.

14.116 Un satélite terrestre pasa por A con rapidez $v_1 = 9200$ m/s, en la dirección $\beta = 5°$. (a) Demuestre que la trayectoria es una elipse. (b) Calcule el ángulo que forma la línea FA con el eje mayor de la órbita. (c) Obtenga la menor distancia entre la órbita y la superficie terrestre.

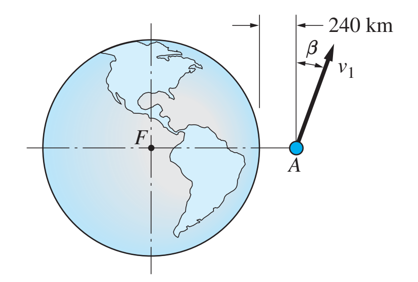


Fig. P14.116, P14.117

14.117 La rapidez de la nave espacial en A es $v_1 = 11.4$ km/s en la dirección $\beta = 10°$. (a) Pruebe que la trayectoria es hiperbólica. (b) Encuentre la rapidez terminal de la nave, ignorando la atracción gravitacional del Sol.

14.118 Un satélite de comunicaciones de 2400 lb viaja en una órbita circular estacionaria cuyo radio es de 4160 millas (órbita 1). El satélite debe atravesar la órbita elíptica AB para alcanzar la órbita geosíncrona circular deseada de radio 26 200 millas (órbita 2). Determine los impulsos que el satélite debe recibir en las posiciones A y B durante su transferencia entre las órbitas.

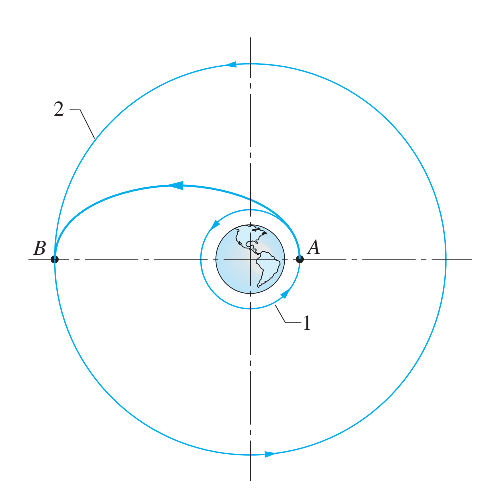


Fig. P14.118

14.119 Una nave espacial viaja en una órbita circular alrededor de la Tierra a una altitud de 210 millas. Cuando la nave llega al punto A, sus motores se encienden por un tiempo breve, reduciendo su rapidez en 7.5%. La trayectoria resultante es la curva de entrada AB. Encuentre el ángulo β, medido desde el eje x no rotatorio, que localiza el sitio de aterrizaje.

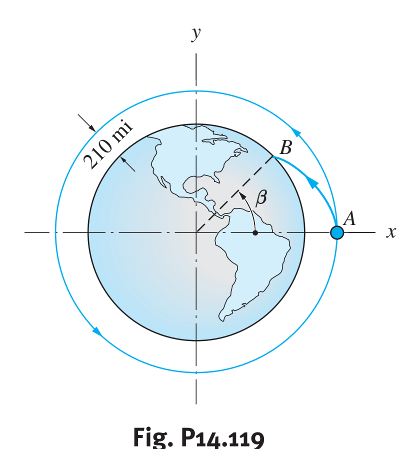


Fig. P14.119

14.120 Un misil balístico disparado desde el Polo Norte aterriza en el ecuador, después de alcanzar una altura máxima de 360 km sobre la superficie terrestre. Despreciando la resistencia del aire, encuentre el ángulo de disparo (medido con la vertical) y la rapidez inicial del misil.

14.121 Un satélite se lanza en órbita alrededor de la Tierra a una altitud $H_0 = 480$ mi con rapidez inicial $v_0 = 17\,500$ mi/h en la dirección que se muestra. (a) Obtenga las ecuaciones diferenciales de movimiento para el satélite y establezca las condiciones iniciales. (b) Resuelva numéricamente las ecuaciones desde el tiempo de lanzamiento hasta el tiempo en que el satélite retorna a la posición de lanzamiento; trace la gráfica R contra t. (c) Encuentre el periodo orbital (tiempo en el que se efectúa una revolución). (d) Determine las altitudes máxima y mínima logradas por el satélite.

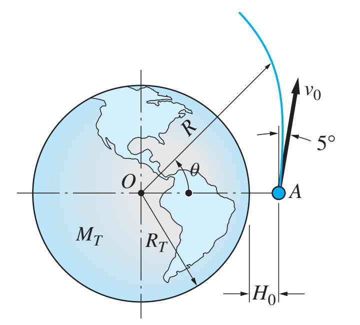


Fig. P14.121, P14.122

14.122 Una nave espacial tiene la velocidad $v_0 = 15\,000$ mi/h en la dirección que se muestra cuando su altitud es $H_0 = 480$ mi. (a) Deduzca las ecuaciones diferenciales de movimiento de la nave y establezca las condiciones iniciales. (b) Resuelva las ecuaciones numéricamente hasta el tiempo en que el satélite golpea la Tierra; trace la gráfica R contra θ. (c) Encuentre el ángulo θ en el punto de impacto.

Repaso de ecuaciones

Trabajo y energía potencial de una fuerza

	Trabajo	Energía potencial
Fuerza constante	$U_{1-2} = F\Delta d$	$V = -Fd$
Fuerza del resorte	$U_{1-2} = -\frac{1}{2}k(\delta_2^2 - \delta_1^2)$	$V = \frac{1}{2}k\delta^2$
Gravedad	$U_{1-2} = Gm_Am_B\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)$	$V = -\frac{Gm_Am_B}{R}$

Principio de trabajo y energía cinética

$$U_{1-2} = T_2 - T_1 \quad T = \frac{1}{2}mv^2$$

Conservación de la energía mecánica

$$V_1 + T_1 = V_2 + T_2$$

Potencia y eficiencia

Potencia de una fuerza: $P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$

Eficiencia de una máquina: $\eta = (P_{\text{salida}}/P_{\text{entrada}}) \times 100\%$

Impulso y cantidad de movimiento

Impulso de una fuerza: $\mathbf{L}_{1-2} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\,dt$

Cantidad de movimiento de una partícula: $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$

Principio de impulso-cantidad de movimiento: $\mathbf{L}_{1-2} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$

Impulso angular y cantidad de movimiento angular

Impulso angular: $(\mathbf{A}_A)_{1-2} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_A\,dt$

Cantidad de movimiento angular: $\mathbf{h}_A = \mathbf{r} \times (m\mathbf{v})$

Principio de impulso-cantidad de movimiento angular:

$(\mathbf{A}_A)_{1-2} = (\mathbf{h}_A)_2 - (\mathbf{h}_A)_1$ (A es un punto fijo)

Problemas de repaso

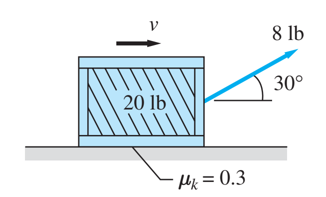


Fig. P14.123

14.123 Una fuerza constante de 8 lb jala un cajón de 20 lb sobre una superficie horizontal. Si el coeficiente de fricción cinética entre el cajón y la superficie es 0.3, determine el tiempo requerido para incrementar la rapidez v del cajón de 10 pies/s a 40 pies/s.

14.124 La partícula de 0.8 kg resbala sin fricción sobre un plano horizontal. La fuerza P que se aplica a la partícula siempre actúa en la dirección x, pero su magnitud varía con el tiempo como se muestra en el diagrama P contra t. Si la velocidad de la partícula en el tiempo $t = 0$ es 3 m/s en la dirección indicada, obtenga la rapidez cuando $t = 5$ s.

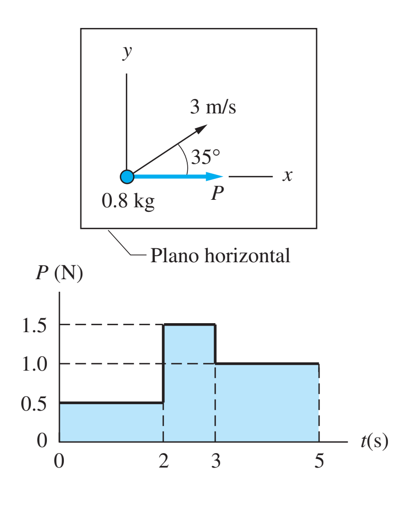


Fig. P14.124

14.125 El ciclista arranca del reposo en A y desciende la colina. (a) Encuentre la rapidez del ciclista en B y C. (b) Determine el radio menor de curvatura de la trayectoria en C para que la bicicleta no se levante del piso.

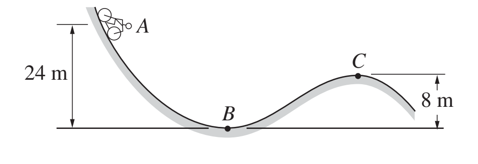


Fig. P14.125

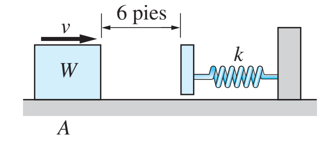


Fig. P14.126

14.126 El paquete de peso $W = 40$ lb se desliza hacia la derecha sobre una superficie rugosa horizontal. Cuando el paquete está en A, su rapidez es $v = 15$ pies/s. El resorte con rigidez $k = 300$ lb/pie lleva al paquete al reposo. Si el coeficiente de fricción cinética entre el paquete y la superficie es 0.3, determine la fuerza máxima en el resorte. Desprecie el peso de la placa unida en el extremo del resorte.

14.127 La figura muestra la órbita elíptica de un satélite terrestre. Las rapideces mínima y máxima del satélite son $v_1 = 6$ km/s y $v_2 = 7.5$ km/s, respectivamente. Calcule las altitudes correspondientes h_1 y h_2.

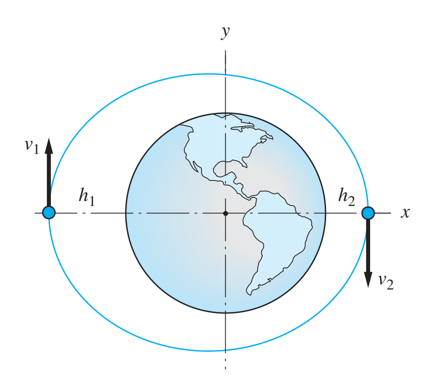


Fig. P14.127

14.128 El collarín de 3 lb es jalado sobre la varilla sin fricción por la fuerza $P(x) = 0.3/x^2$ lb, donde x está en pies. Cuando $x = 1.2$ pies, la velocidad del collarín es de 2 pies/s hacia la derecha. Cuando $x = 4$ pies, obtenga: (a) la velocidad del collarín y (b) la potencia de la fuerza P.

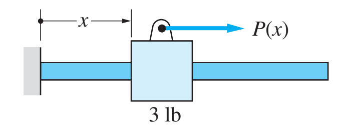


Fig. P14.128

14.129 Los coeficientes de fricción estática y cinética entre el cajón de 18 kg y la superficie horizontal son $\mu_s = 0.25$ y $\mu_k = 0.2$, respectivamente. El cajón está en reposo cuando se aplica la fuerza horizontal P, dependiente del tiempo. Determine la rapidez del cajón en $t = 10$ s.

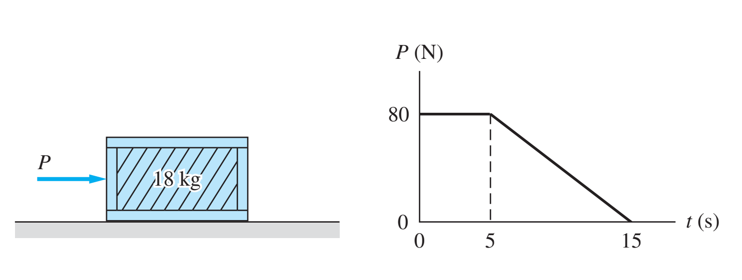


Fig. P14.129

14.130 El collarín A de 8 lb se desliza sobre la varilla vertical con fricción despreciable. El resorte AB tiene una longitud libre de 2.5 pies y su rigidez es 4.2 lb/pie. Si la masa se suelta a partir del reposo en la posición que se muestra, obtenga su rapidez en O.

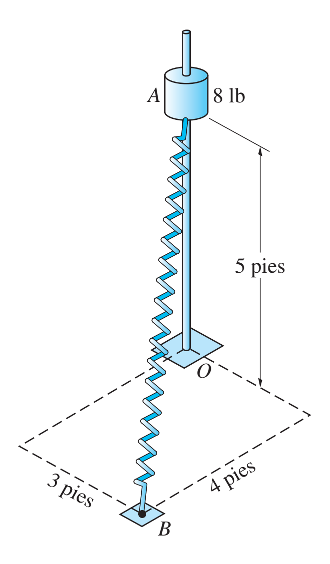


Fig. P14.130

14.131 Un paquete de masa M se coloca con velocidad cero sobre una banda transportadora que se mueve a 2 m/s. El coeficiente de fricción cinética entre el paquete y la banda es 0.4. Encuentre la distancia que viaja el paquete antes de que su rapidez iguale la rapidez de la banda.

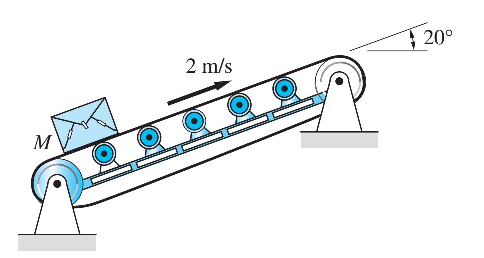


Fig. P14.131, P14.132

14.132 Determine el tiempo requerido para que la rapidez del paquete del problema 14.131 iguale la rapidez de la banda transportadora.

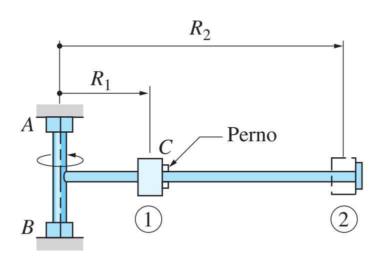


Fig. P14.133

14.133 El montaje que se muestra rota libremente respecto al eje vertical AB con el collarín C deslizante que se mantiene en la posición 1 por medio de un perno. Después este último falla, permitiendo que el collarín resbale a la posición 2. Obtenga el porcentaje de energía cinética que se pierde en el proceso en términos de las distancias R_1 y R_2. Desprecie todas las masas, excepto la del collar C.

14.134 El peso de 1.2 lb se desliza con fricción despreciable sobre una mesa horizontal. El resorte unido al peso tiene una rigidez de 2.5 lb/pie y una longitud libre de 1.5 pies. Cuando el peso está en A, su velocidad es de 25 pies/s con la dirección que se muestra. Determine la rapidez del peso en B donde la longitud del resorte es 2.5 pies. También, encuentre a qué razón se alarga el resorte en B.

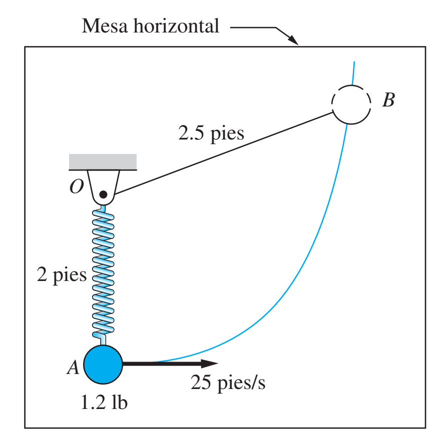


Fig. P14.134

Fig. P14.135

14.135 Utilice la relación de momento-cantidad de movimiento angular para demostrar que la ecuación diferencial que describe el movimiento del péndulo es $\ddot{\theta} + (g/L)\ \text{sen}\ \theta = 0$.

14.136 Un vehículo espacial no propulsado de masa m viaja hacia el planeta Venus sobre la trayectoria AB. Si las coordenadas de A y B son $(-5.0, -1.0) \times 10^8$ pies y $(3.960, 3.382) \times 10^8$ pies, respectivamente, determine la rapidez del vehículo en B.

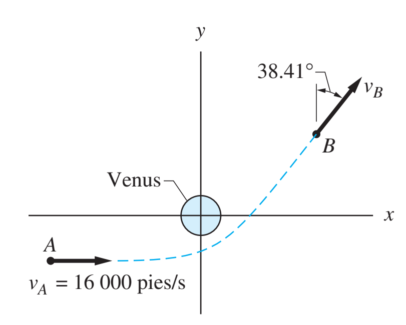


Fig. P14.136

14.137 La masa m está unida a una cuerda y oscila en un círculo horizontal de radio $R = 0.25$ m cuando $L = 0.5$ m. Entonces la longitud L se acorta, jalando la cuerda despacio a través del agujero A en una mesa hasta que la rapidez de la masa se duplica. Obtenga los valores correspondientes de: (a) radio R y (b) ángulo ϕ.

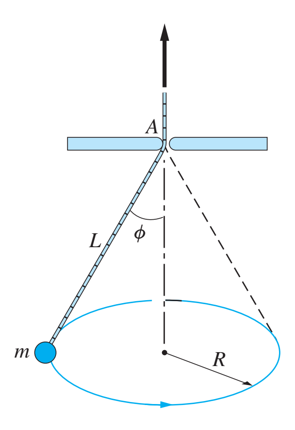


Fig. P14.137

14.138 La varilla OA gira libremente respecto al eje z con una rapidez angular de 30 rad/s. El resorte no está deformado cuando se rompe la cuerda que amarra al collarín B de 8 lb. Si el desplazamiento máximo del collarín relacionado con la varilla es 9 pulg, determine la rigidez k del resorte. Desprecie la fricción y la masa de la varilla OA.

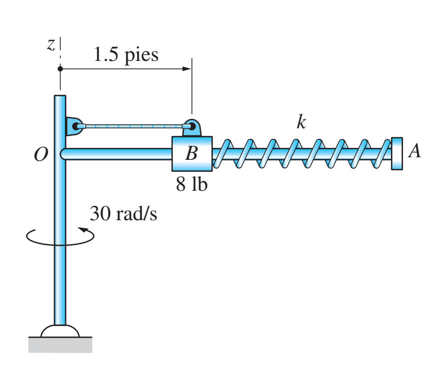


Fig. P14.138

14.139 La masa de 0.6 kg se desliza con fricción despreciable sobre la superficie cilíndrica. El resorte unido a la masa tiene una rigidez de 110 N/m y su longitud libre es 80 mm. Si la masa se libera a partir del reposo en A, obtenga su rapidez en B.

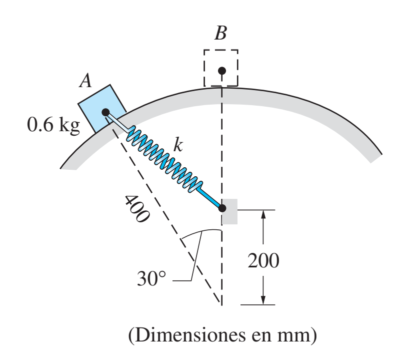


Fig. P14.139

14.140 El peso de 40 lb está unido a una barra de peso despreciable. El montaje gira en el plano vertical respecto a O. El resorte tiene una longitud libre de 42 pulg y su rigidez es 200 lb/pie. Si el sistema se libera a partir del reposo cuando $\theta = 90°$, encuentre la rapidez del peso cuando $\theta = 0$.

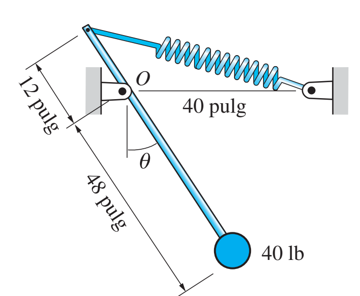
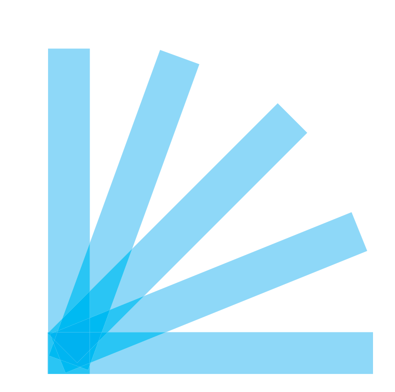


Fig. P14.140



15 Dinámica de sistemas de partículas



La colisión de vehículos está gobernada por los principios de impulso-cantidad de movimiento y trabajo-energía. Esos principios permiten a los investigadores realizar análisis de accidentes. En los problemas 15.95 y 15.98 aparecen dos ejemplos de tales análisis. (StockXpert)

15.1 Introducción

Hasta ahora, el estudio de la dinámica se ha enfocado en una sola partícula. Se han presentado tres procedimientos de análisis cinéticos: los métodos de fuerza-masa-aceleración, de trabajo-energía y de impulso-cantidad de movimiento. En este capítulo, esos métodos se extienden a los sistemas que contienen dos o más partículas.

Antes de proceder a la cinética de los sistemas de partículas, es necesario considerar otro tema de la cinemática, a saber, el concepto de *movimiento relativo*. Este último proporciona un medio conveniente para describir las restricciones cinemáticas (restricciones geométricas sobre el movimiento) que en general están presentes en un sistema de partículas.

Este capítulo también presenta dos nuevas aplicaciones de la dinámica: el impacto de partículas y el flujo de masa. El impacto se refiere a una colisión entre partículas y se caracteriza por un tiempo de contacto muy breve, así como por grandes fuerzas de contacto. El término “flujo de masa” se aplica a los problemas en los que la masa entra o sale continuamente del sistema, como en la circulación de fluidos a través de tuberías y la propulsión de cohetes.

15.2 Cinemática de movimiento relativo

a. Movimiento relativo

El análisis de la cinemática se ha limitado al movimiento *absoluto*, donde el movimiento de una partícula se describe en un marco de referencia fijo (inercial). Con la intención de enfatizar la naturaleza fija del marco de referencia, algunas veces se agrega el término "absoluto" a los nombres de las variables cinemáticas (por ejemplo, "velocidad absoluta"). La segunda ley de Newton y los principios de trabajo-energía e impulso-cantidad de movimiento que se deducen de ésta se aplican sólo al movimiento absoluto. En otras palabras, la posición, la velocidad y la aceleración que hay en esos principios cinéticos deben ser absolutas.

En cinemática, un marco fijo no siempre es la referencia más conveniente para describir el movimiento de una partícula. Por ejemplo, el marco de referencia natural para observar el movimiento de una gota de lluvia sobre la ventanilla de un automóvil que se mueve es la ventanilla (un marco en movimiento) y no el camino (un marco fijo). Una descripción de movimiento que se basa en un marco de referencia móvil, como la ventanilla, se denomina *relativa*.

La figura 15.1(a) muestra las trayectorias de dos partículas A y B. Los vectores de posición de estas últimas, que se miden desde el origen O del sistema de coordenadas fijo xyz, se denotan con $\mathbf{r}_A$ y $\mathbf{r}_B$ y sus velocidades son $\mathbf{v}_A = \dot{\mathbf{r}}_A$ y $\mathbf{v}_B = \dot{\mathbf{r}}_B$. Ya que estas variables se refieren a un marco de referencia fijo, representan los vectores de posición y las velocidades absolutas de las partículas. El vector $\mathbf{r}_{B/A}$, que se ha dibujado de A a B, se denomina vector de posición de B *relativo a* A.

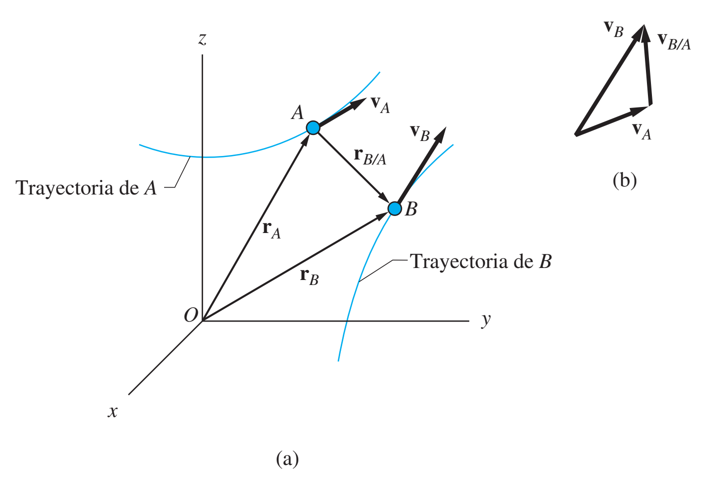


Fig. 15.1

En la figura 15.1(a) se observa que los vectores de posición absolutos y relativos se relacionan mediante

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A} \tag{15.1}$$

Al derivar respecto al tiempo e introducir la notación

$$\mathbf{v}_{B/A} = \dot{\mathbf{r}}_{B/A} \tag{15.2}$$

se obtiene

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} \tag{15.3}$$

El vector $\mathbf{v}_{B/A}$, que se muestra en la figura 15.1(b), se conoce como la velocidad de *B relativa* a *A*.

Si se derivan ambos lados de la ecuación (15.3), se obtiene

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A} \tag{15.4}$$

donde

$$\mathbf{a}_{B/A} = \dot{\mathbf{v}}_{B/A} = \ddot{\mathbf{r}}_{B/A} \tag{15.5}$$

es la aceleración de *B relativa* a *A*.

En la figura 15.1(a) se observa que el vector que se ha dibujado de *A* a *B* es el negativo del vector de *B* a *A*, que conduce a las siguientes identidades:

$$\mathbf{r}_{B/A} = -\mathbf{r}_{A/B} \qquad \mathbf{v}_{B/A} = -\mathbf{v}_{A/B} \qquad \mathbf{a}_{B/A} = -\mathbf{a}_{A/B} \tag{15.6}$$

b. Marco de referencia en traslación

Con frecuencia es conveniente describir el movimiento relativo respecto a un sistema de coordenadas que se mueve junto con la partícula de referencia. En la figura 15.2, los ejes *xyz* están fijos en un marco de referencia inercial, mientras que los ejes $x'y'z'$ están unidos a la partícula *A* de referencia (y se mueven con ella). En este capítulo sólo se considera el caso especial en el que los ejes $x'y'z'$ siempre permanecen paralelos a los ejes fijos. En otras palabras, los ejes en movimiento se *trasladan* con la partícula de referencia, pero no giran. Por tanto, los vectores base **i**, **j** y **k** del marco de referencia fijo también son los vectores base del marco en traslación.

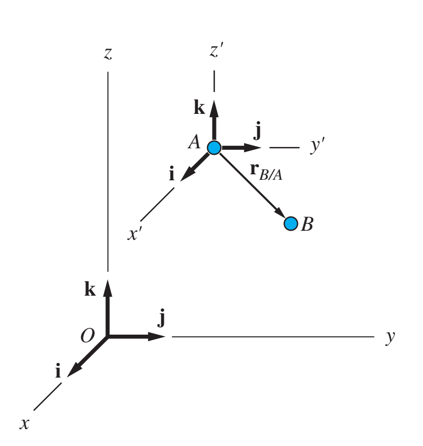


Fig. 15.2

En el marco de referencia en traslación, las coordenadas de la partícula *B* son x', y' y z'. Así el vector de posición relativa de *B*, en este sistema de coordenadas, es

$$\mathbf{r}_{B/A} = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k} \tag{15.7}$$

La velocidad y la aceleración relativas de *B* se obtienen al derivar la ecuación (15.7) respecto al tiempo (observe que, debido a que los vectores base son constantes, se tiene que $d\mathbf{i}/dt = d\mathbf{j}/dt = d\mathbf{k}/dt = \mathbf{0}$):

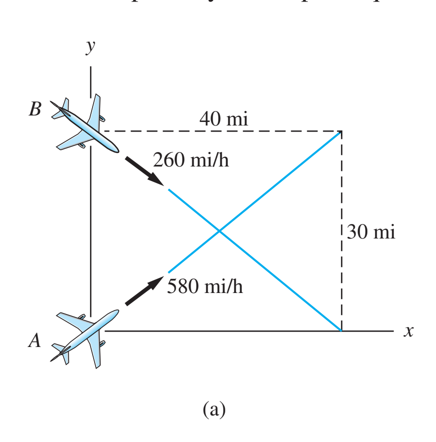
$$\mathbf{v}_{B/A} = \frac{dx'}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy'}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz'}{dt}\mathbf{k} \tag{15.8}$$

$$\mathbf{a}_{B/A} = \frac{d^2x'}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y'}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z'}{dt^2}\mathbf{k} \tag{15.9}$$

Las ecuaciones (15.8) y (15.9) muestran que $\mathbf{v}_{B/A}$ y $\mathbf{a}_{B/A}$ pueden interpretarse como la velocidad y la aceleración de la partícula *B* vistas por un *observador que no rota* y se mueve con la partícula *A*.

Problema de ejemplo 15.1

Dos aeroplanos A y B vuelan con velocidades constantes a la misma altitud. En la figura (a) se muestran las posiciones de los aeroplanos en el tiempo $t = 0$ (el marco de referencia xy está fijo en el espacio). Determine: 1. la velocidad del aeroplano A relativa a B; 2. el vector de posición de A relativa a B como una función del tiempo y 3. la distancia mínima entre los aeroplanos y el tiempo en que esto ocurre.



(a)

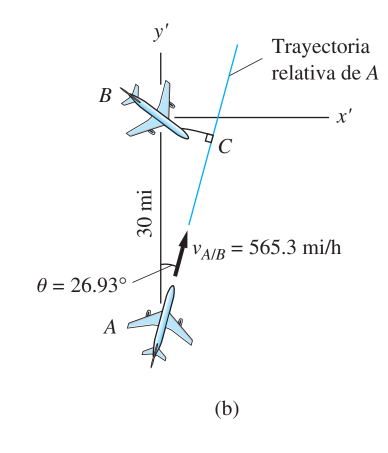
Solución

Parte 1

A partir de la geometría en la figura (a), las velocidades de los aeroplanos son

$$\mathbf{v}_A = 580\left(\frac{40\mathbf{i} + 30\mathbf{j}}{50}\right) = 464\mathbf{i} + 348\mathbf{j} \text{ mi/h}$$

$$\mathbf{v}_B = 260\left(\frac{40\mathbf{i} - 30\mathbf{j}}{50}\right) = 208\mathbf{i} - 156\mathbf{j} \text{ mi/h}$$



(b)

La velocidad de A relativa a B es

$$\mathbf{v}_{A/B} = \mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B = (464\mathbf{i} + 348\mathbf{j}) - (208\mathbf{i} - 156\mathbf{j})$$
$$= 256\mathbf{i} + 504\mathbf{j} \text{ mi/h}$$

Respuesta

La magnitud y la dirección del vector son

$$v_{A/B} = \sqrt{256^2 + 504^2} = 565.3 \text{ mi/h}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{256}{504} = 26.93°$$

En la figura (b) se muestra este vector de velocidad relativa. Observe que $\mathbf{v}_{A/B}$ es la velocidad del aeroplano A como la ve un observador (sin rotación) en el aeroplano B;

es decir, la velocidad de A en el sistema de coordenadas $x'y'$ (sin rotación) unido al aeroplano B. Puesto que $\mathbf{v}_{A/B}$ es constante, la trayectoria de A relativa al sistema de coordenadas móvil $x'y'$, es la línea recta que se indica en la figura (b).

Parte 2

El vector de posición de A relativo a B puede encontrarse al integrar la velocidad relativa

$$\mathbf{r}_{A/B} = \int \mathbf{v}_{A/B}\,dt = \int (256\mathbf{i} + 504\mathbf{j})\,dt = (256\mathbf{i} + 504\mathbf{j})\,t + \mathbf{r}_0$$

donde t está en horas y $\mathbf{r}_0$ es una constante de integración. De la condición inicial, $\mathbf{r}_{A/B} = -30\mathbf{j}$ mi en $t = 0$, resulta que $\mathbf{r}_0 = -30\mathbf{j}$ mi. Por tanto, el vector de posición relativa se convierte en

$$\mathbf{r}_{A/B} = 256t\mathbf{i} + (504t - 30)\mathbf{j}\ \text{mi} \qquad \textit{Respuesta}$$

Parte 3

Si la distancia entre los aeroplanos se denota con s, se tiene

$$s^2 = |\mathbf{r}_{A/B}|^2 = (256t)^2 + (504t - 30)^2\ \text{mi}^2 \qquad \text{(a)}$$

El valor mínimo de s ocurre cuando $d(s^2)/dt = 0$, o

$$2(256)^2 t + 2(504t - 30)(504) = 0$$

con lo que se obtiene

$$t = 0.047\,32\ \text{h} = 170.3\ \text{s} \qquad \textit{Respuesta}$$

Al sustituir este valor de t en la ecuación (a), se tiene la distancia mínima entre los aeroplanos

$$s_{\min} = \sqrt{[256(0.047\,32)]^2 + [504(0.047\,32) - 30]^2} = 13.59\ \text{mi} \qquad \textit{Respuesta}$$

Nota

De la figura (b) también podrían obtenerse los resultados de la parte 3. La distancia mínima entre los aeroplanos ocurre cuando el aeroplano A alcanza la posición C. Del triángulo ABC, se obtiene

$$s_{\min} = \overline{BC} = 30\,\text{sen}\,26.93° = 13.59\ \text{mi}$$

El tiempo que se requiere para alcanzar esa posición es

$$t = \frac{\overline{AC}}{v_{A/B}} = \frac{30\cos 26.93°}{565.3} = 0.0473\ \text{h} = 170.3\ \text{s}$$

Problemas

15.1 Dos aviones vuelan a la misma altitud con las velocidades que se muestran. Encuentre la velocidad del avión B como la ve un pasajero en el avión A.

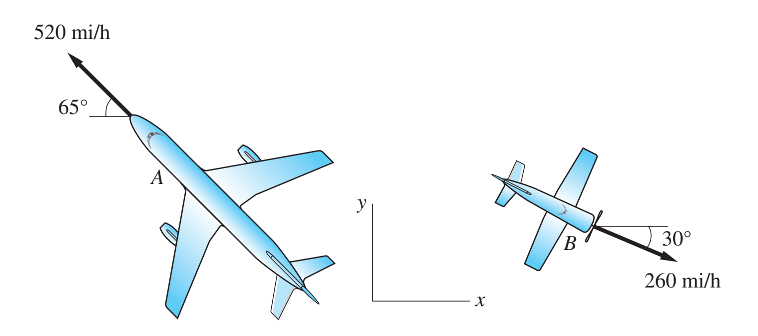


Fig. P15.1

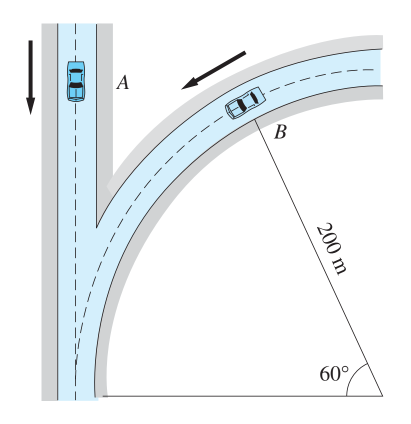
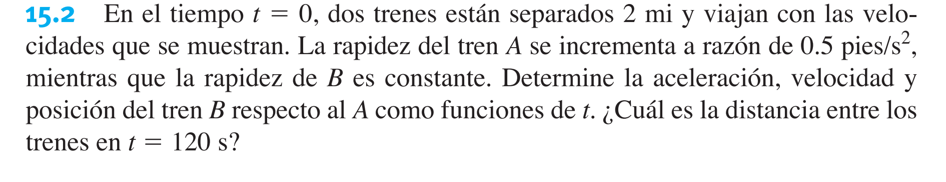


Fig. P15.3

15.2 En el tiempo $t = 0$, dos trenes están separados 2 mi y viajan con las velocidades que se muestran. La rapidez del tren A se incrementa a razón de 0.5 pies/s^2, mientras que la rapidez de B es constante. Determine la aceleración, velocidad y posición del tren B respecto al A como funciones de t. ¿Cuál es la distancia entre los trenes en $t = 120$ s?



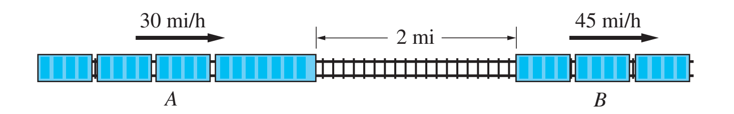


Fig. P15.2

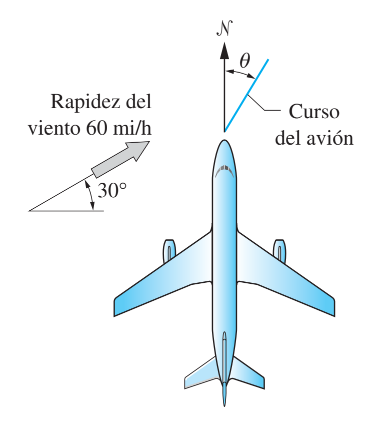


Fig. P15.4

15.3 En la posición que se muestra, la rapidez del automóvil B es 16 m/s y se incrementa. A un pasajero en el automóvil A le parece que la aceleración de B es cero. ¿Cuál es la aceleración de A en esta posición?

15.4 La rapidez del avión es 560 mi/h, hacia el norte. Si la rapidez del viento es 60 mi/h en la dirección que se muestra, determine la rapidez horizontal y el curso (ángulo θ) del avión.

15.5 El bote, con una rapidez de crucero (rapidez del bote relativa al agua) de 24 km/h, cruza un río que tiene una corriente de 10 km/h. (a) Encuentre el curso, determinado por el ángulo θ, que el bote debe seguir para hacer una línea recta de A a C. (b) Obtenga el tiempo que se requiere para que el bote termine el cruce.

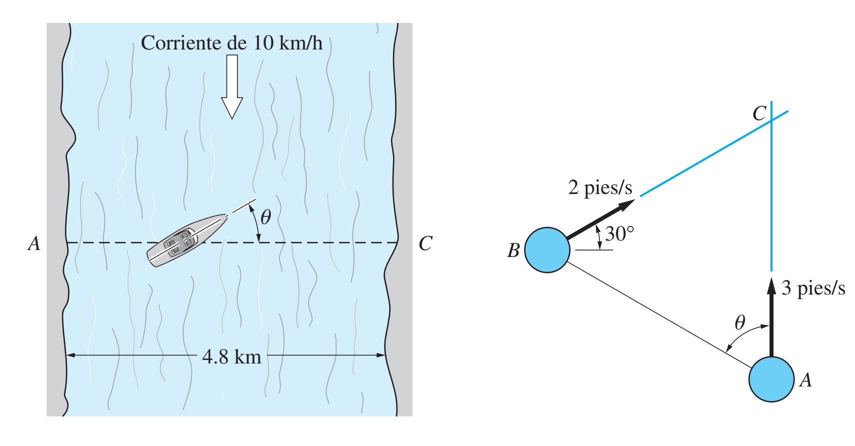


Fig. P15.5

Fig. P15.6

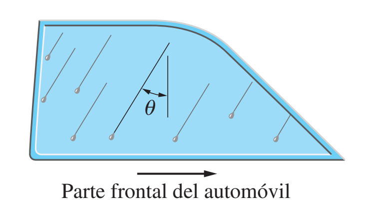


Fig. P15.7

15.6 Dos bolas de billar A y B, inicialmente en reposo, son golpeadas en el mismo instante y ruedan en las trayectorias AC y BC. Si sus velocidades son como se muestran en la figura, determine el ángulo θ si las bolas chocan. (*Sugerencia:* $v_{A/B}$ debe dirigirse desde A hacia B).

15.7 Cuando un automóvil estacionado apunta en sentido contrario al viento, las rayas hechas por la lluvia en las ventanillas laterales están inclinadas en un ángulo $\theta = 15^{\circ}$ con la vertical. Cuando el vehículo avanza a 30 mi/h contra el viento, el ángulo θ se incrementa a 75°. Encuentre la rapidez de las gotas de lluvia.

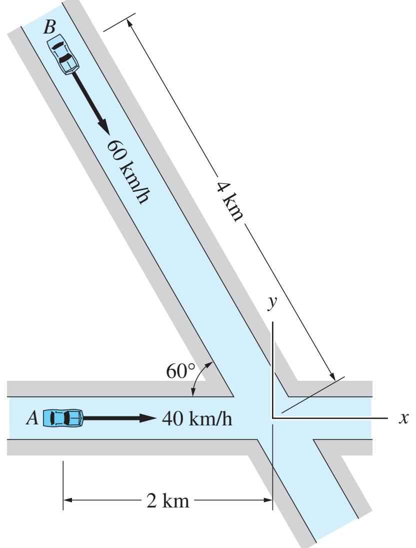


Fig. P15.8

15.8 Dos automóviles A y B que viajan con rapidez constante están en las posiciones que se muestran en el tiempo $t = 0$. Determine: (a) la velocidad de A relativa a B; (b) el vector de posición de A relativo a B como una función del tiempo y (c) la distancia mínima entre los vehículos y el tiempo en que esto ocurre.

15.9 La ballesta se apunta hacia el costal de arena que se encuentra suspendido de una cuerda. La ballesta se dispara en el instante en que dicha cuerda se corta. Demuestre que la flecha siempre se clavará en el costal, sin importar su rapidez inicial v_0. (*Sugerencia:* la velocidad de la flecha respecto al costal de arena es constante).

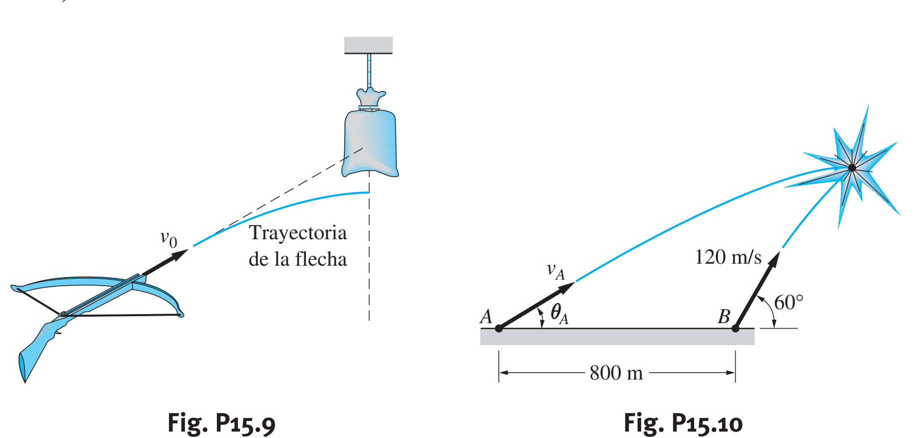


Fig. P15.9

Fig. P15.10

15.10 Dos proyectiles A y B se lanzan simultáneamente en el mismo plano vertical con las posiciones y velocidades iniciales que se muestran en la figura. Si los

proyectiles chocan 8 s después del lanzamiento, determine: (a) su velocidad relativa en la colisión, y (b) el vector velocidad inicial de A. (*Sugerencia:* $\mathbf{v}_{B/A}$ es constante).

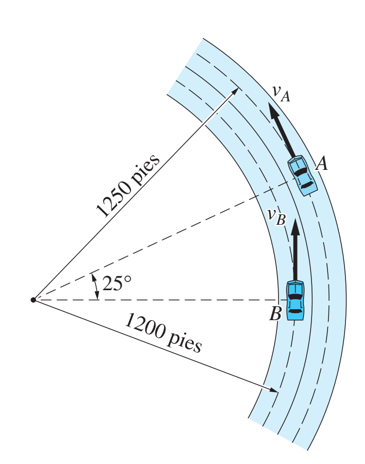


Fig. P15.11, P15.12

15.11 Dos automóviles viajan con las rapideces constantes de $v_A = 36$ pies/s y $v_B = 45$ pies/s alrededor de una pista circular. Cuando los vehículos están en las posiciones que se muestran, encuentre las magnitudes de $\mathbf{v}_{B/A}$ y $\mathbf{a}_{B/A}$.

15.12 Los automóviles A y B viajan sobre una pista circular. La rapidez de A es constante en $v_A = 60$ mi/h. En la posición que se indica, la rapidez de B es $v_B =$ 30 mi/h y se incrementa a razón de 2.5 pies/s^2. Obtenga la magnitud de la aceleración relativa entre los vehículos en esta posición.

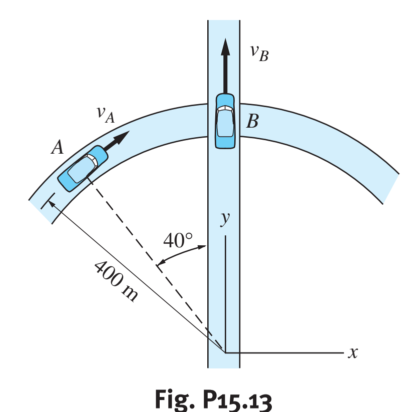


Fig. P15.13

15.13 El automóvil A viaja sobre un camino circular con una rapidez constante de $v_A = 70$ km/h. En el instante que se muestra, la rapidez de B sobre el superior es $v_B = 90$ km/h y decrece a razón de 1.8 m/s^2. Encuentre el vector de aceleración relativa $\mathbf{a}_{B/A}$ en este instante.

15.14 La figura (a) muestra un bote que navega en la dirección y a 5 mi/h, cuya veleta indica la dirección del viento relativa al barco. Después de que el bote cambia su curso hacia la dirección x, el ángulo de la veleta es como se indica en la figura (b). Determine el vector de velocidad del viento.

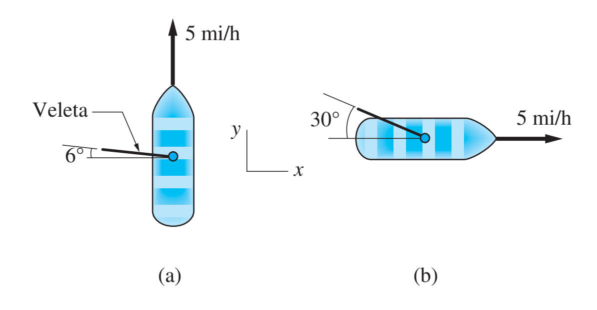


Fig. P15.14

15.3 Cinemática de movimiento restringido

La siguiente terminología se utiliza con frecuencia cuando se describe la cinemática de los sistemas de partículas:*

- *Restricciones cinemáticas*: restricciones geométricas impuestas sobre el movimiento de las partículas.
- *Ecuaciones de restricción*: expresiones matemáticas que describen las restricciones cinemáticas sobre las partículas en términos de sus coordenadas de posición.
- *Coordenadas cinemáticamente independientes*: coordenadas de posición de las partículas que no están sujetas a restricciones cinemáticas.
- *Número de grados de libertad*: el número de coordenadas cinemáticamente independientes que se necesitan para describir por completo la configuración de un sistema de partículas.

*Esos términos se presentaron en el análisis del trabajo virtual en el capítulo 10. Aquí se repiten las definiciones debido a su importancia en dinámica.

A modo de ilustración de esos conceptos, considere el sistema que se indica en la figura 15.3. El sistema consta de dos bloques, que se han marcado como A y B, unidos por una cuerda que pasa sobre la clavija fija C. Las coordenadas de posición de los bloques se denotan con x_A y y_B. La *restricción cinemática* sobre el movimiento del sistema se refiere a que la longitud total L de la cuerda es constante. La *ecuación de restricción* correspondiente se obtiene a partir de la geometría de la figura 15.3:

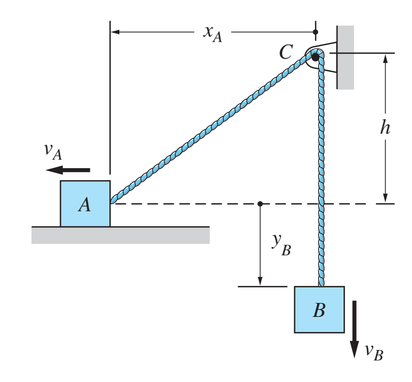


Fig. 15.3

$$L = \sqrt{x_A^2 + h^2} + y_B = \text{ constante} \tag{15.10}$$

Este sistema tiene un solo *grado de libertad*. Se puede elegir x_A o y_B como la *coordenada cinemáticamente independiente*. La coordenada de posición que no se ha elegido puede relacionarse con la coordenada independiente al usar la ecuación (15.10).

La restricción sobre las velocidades v_A y v_B de los bloques puede obtenerse al derivar la ecuación (15.10) respecto al tiempo. El resultado es:

$$\dot{L} = \frac{1}{2}\frac{2x_A\dot{x}_A}{\sqrt{x_A^2 + h^2}} + \dot{y}_B = 0$$

Al sustituir $\dot{x}_A = v_A$ y $\dot{y}_B = v_B$, se encuentra que las velocidades están relacionadas por

$$\frac{x_A}{\sqrt{x_A^2 + h^2}}v_A + v_B = 0 \tag{15.11}$$

Si se necesita, la relación entre las aceleraciones de los bloques puede obtenerse al derivar la ecuación (15.11) respecto al tiempo.

En la figura 15.4 se muestra el ejemplo de un sistema con dos grados de libertad. Es similar al de la figura 15.3, pero aquí la clavija está unida al bloque C que puede moverse en sentido vertical. Las tres coordenadas de posición (x_A, y_B y y_C) de los bloques están sujetas a la restricción cinemática

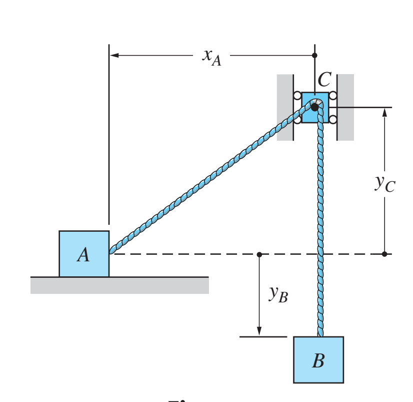


Fig. 15.4

$$L = \sqrt{x_A^2 + y_C^2} + y_B = \text{ constante}$$

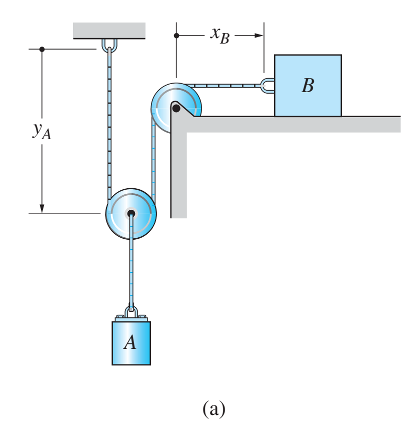
(L es la longitud de la cuerda) de manera que sólo dos de las coordenadas son cinemáticamente independientes.

Observe que en los ejemplos anteriores:

(número de coordenadas de posición) − (número de restricciones cinemáticas)
= (número de grados de libertad)

En general esto es cierto, excepto para una clase especial de sistemas mecánicos.*

*Los sistemas que violan esta regla se llaman *no holonómicos* (o *no holónomos*). Véase D.T. Greenwood, *Classical Dynamics*, Prentice Hall, 1977, p. 10.



(a)

Problema de ejemplo **15.2**

La figura (a) muestra un sistema que consta de dos bloques A y B conectados por un cable inextensible que pasa por dos poleas. Determine las relaciones cinemáticas entre las velocidades y las aceleraciones de los bloques.

Solución

El sistema que se muestra en la figura (a) tiene un grado de libertad porque una coordenada (por ejemplo, y_A o x_B), determina su configuración. Es conveniente numerar las poleas y marcar la distancia fija, h, como se muestra en la figura (b). Sea L la longitud del cable, entonces

$$L = y_A + \begin{pmatrix}\text{longitud del cable} \\ \text{alrededor de la polea 1}\end{pmatrix} + (y_A - h) + \begin{pmatrix}\text{longitud del cable} \\ \text{alrededor de la polea 2}\end{pmatrix} + x_B$$

Debido a que L, h y las longitudes del cable que están enrolladas en cada polea son constantes, la derivación respecto al tiempo resulta en

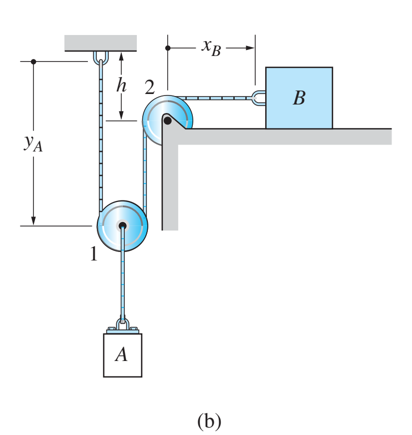
$$\frac{dL}{dt} = v_A + 0 + v_A + 0 + v_B = 0$$

con lo que se obtiene

$$v_B = -2v_A \qquad \textit{Respuesta}$$

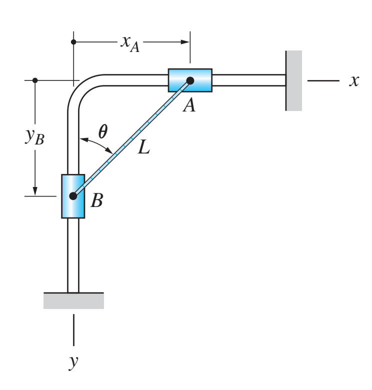
Al derivar esta ecuación respecto al tiempo se tiene

$$a_B = -2a_A \qquad \textit{Respuesta}$$



(b)

Problema de ejemplo 15.3



Los dos collares A y B están unidos por una cuerda de longitud L. El collar A se mueve hacia la derecha con una velocidad constante v_A. Determine la velocidad y la aceleración de B como funciones de v_A y el ángulo θ.

Solución

El sistema tiene un grado único de libertad porque sólo una coordenada (x_A, y_B o θ) determina su configuración. Por el momento se ignorará a θ y se trabajará con x_A y y_B. La ecuación de restricción que relaciona a esas dos coordenadas es

$$x_A^2 + y_B^2 = L^2 \tag{a}$$

Al derivar esta ecuación respecto al tiempo (observando que $\dot{x}_A = v_A$ y $\dot{y}_B = v_B$) se obtiene $2x_A v_A + 2y_B v_B = 0$, que se reduce a

$$x_A v_A + y_B v_B = 0 \tag{b}$$

Si se toma la derivada respecto al tiempo de la ecuación (b), resulta

$$(x_A a_A + v_A^2) + (y_B a_B + v_B^2) = 0 \tag{c}$$

donde se usó $\dot{v}_A = a_A$ y $\dot{v}_B = a_B$.

Al resolver la ecuación (b) para la velocidad de B se tiene

$$v_B = -v_A \frac{x_A}{y_B} = -v_A \frac{L \operatorname{sen}\theta}{L\cos\theta}$$

o

$$v_B = -v_A \tan\theta \qquad \textit{Respuesta} \quad \text{(d)}$$

Debido a que $a_A = 0$, la aceleración de B a partir de la ecuación (c) es

$$a_B = -\frac{v_A^2 + v_B^2}{y_B}$$

Al sustituir v_B a partir de la ecuación (d) y $y_B = L\cos\theta$, se obtiene

$$a_B = -\frac{v_A^2 + (-v_A\tan\theta)^2}{L\cos\theta} = -\frac{v_A^2(1+\tan^2\theta)}{L\cos\theta}$$

Si se utiliza la identidad $(1 + \tan^2\theta) = 1/\cos^2\theta$, esta ecuación se reduce a

$$a_B = -\frac{v_A^2}{L\cos^3\theta} \qquad \textit{Respuesta}$$

Problemas

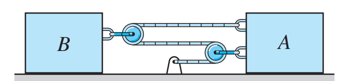


Fig. P15.15

15.15 El bloque *A* se mueve hacia la derecha con rapidez constante de 4 pulg/s. Determine la velocidad del bloque *B*.

15.16 Si el bloque *B* se mueve hacia abajo con rapidez constante de 0.4 m/s, encuentre la velocidad del bloque *A*.

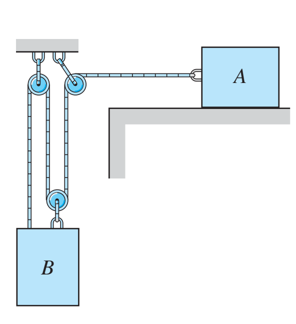


Fig. P15.16

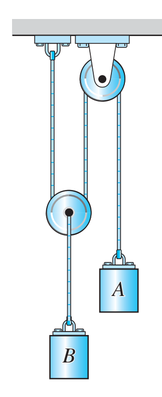


Fig. P15.17

15.17 En el instante que se muestra, la velocidad del bloque *A* relativa al *B* se dirige 240 mm/s hacia abajo. Obtenga la velocidad de cada bloque en este instante.

15.18 Determine la velocidad del bloque *B* en el instante en que la velocidad del bloque *A* se dirige 24 pulg/s hacia abajo.

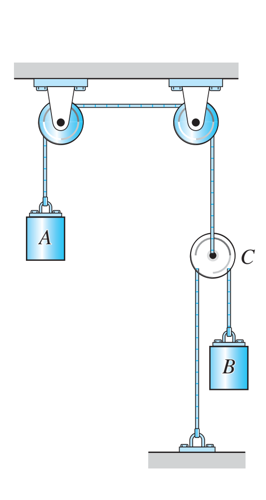


Fig. P15.18

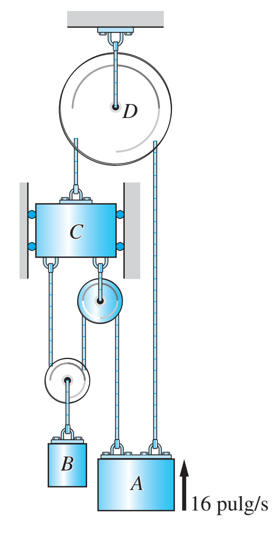


Fig. P15.19

15.19 Encuentre la velocidad del bloque *B* en el instante en que la velocidad del bloque *A* se dirige 16 pulg/s hacia arriba.

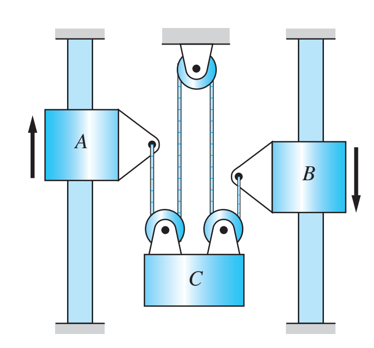


Fig. P15.20

15.20 El collar *A* se mueve hacia arriba a 3 pies/s mientras el collar *B* lo hace hacia abajo a 1.2 pies/s. Encuentre la velocidad del bloque *C*.

15.21 El collar A se mueve hacia abajo con una rapidez constante de 1.8 pies/s. Determine la velocidad del bloque B cuando $y_A = 3$ pies.

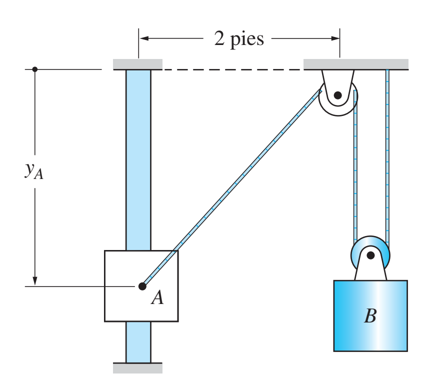


Fig. P15.21

15.22 El bloque A se mueve hacia arriba a 3.6 m/s. ¿Cuál es la velocidad del bloque B cuando $y_B = 2$ m?

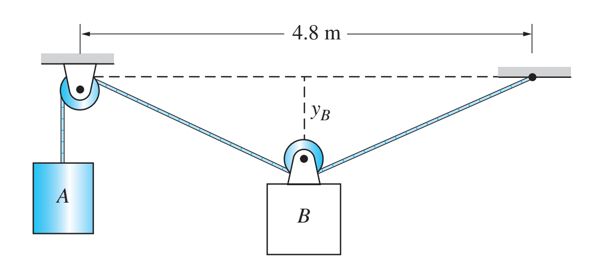


Fig. P15.22

15.23 El disco A rota en el sentido de las manecillas del reloj con la velocidad angular $\dot{\theta} = 2$ rad/s. Encuentre la velocidad del bloque B cuando $\theta = 60°$.

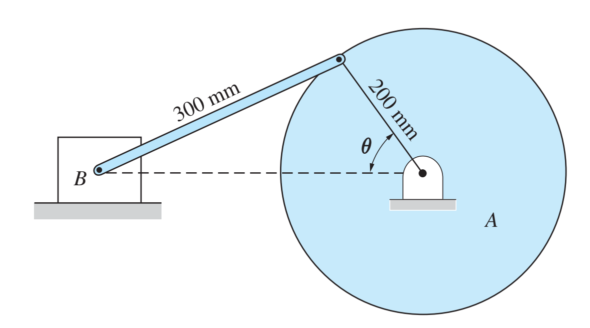


Fig. P15.23

15.24 Cuando el bloque C está en la posición $x_C = 1.7$ pies, su rapidez es de 3 pies/s hacia la derecha. Obtenga la velocidad del bloque A en este instante. Observe que la cuerda pasa por la polea B y por la clavija unida al bloque C.

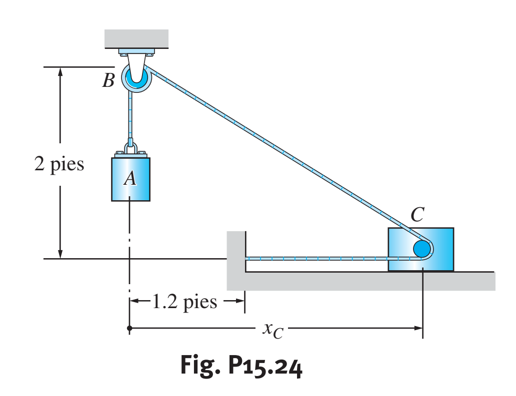


Fig. P15.24

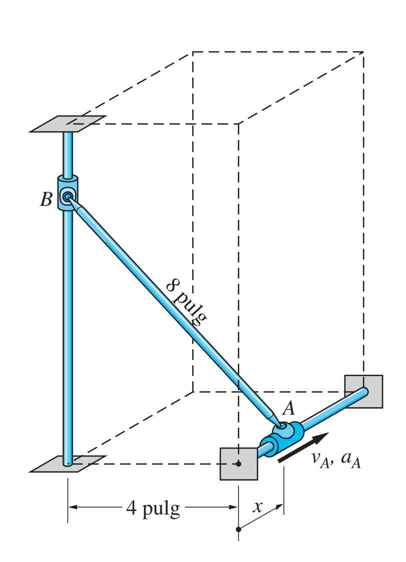


Fig. P15-25

15.25 Los collares A y B están unidos por una barra de 8 pulg. Dado que $v_A = 8$ pulg/s y $a_A = -16$ pulg/s^2 cuando $x = 3$ pulg, encuentre la velocidad y la aceleración de B en este instante.

15.26 En cierto instante, la velocidad del bloque *A* es de 0.2 m/s y la del bloque *B* relativa al bloque *C* es de 0.6 m/s, ambas dirigidas hacia abajo. Encuentre las velocidades de *B* y *C* en este instante.

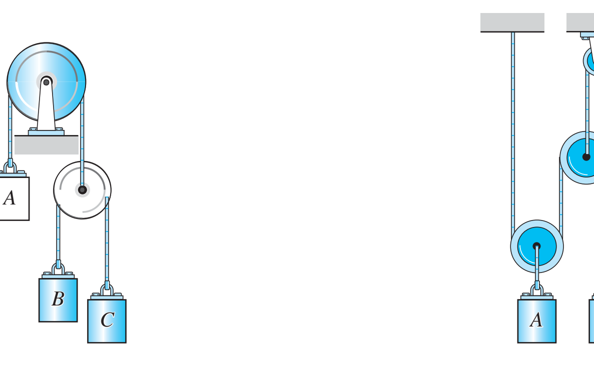


Fig. P15.26 **Fig. P15.27**

15.27 El bloque *C* se mueve hacia arriba con una rapidez constante de 6 pulg/s. Dado que las elevaciones de los bloques *A* y *B* siempre son iguales, determine la velocidad de *B*.

15.4 *Cinética: método de fuerza-masa-aceleración*

La segunda ley de Newton, $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, también puede utilizarse para estudiar el movimiento de un sistema de partículas. El enfoque más directo es usar el diagrama de cuerpo libre (DCL) y el diagrama de masa-aceleración (DMA) de cada partícula en el sistema para obtener las ecuaciones del movimiento de las partículas individuales. Así, un sistema de *n* partículas conduciría a las siguientes *n* ecuaciones vectoriales de movimiento: $(\Sigma\mathbf{F})_i = m\mathbf{a}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Si las partículas del sistema están sujetas a restricciones cinemáticas internas (debido a las conexiones sin masa, como cuerdas que unen a las partículas) entonces las fuerzas que imponen las restricciones (por ejemplo, las tensiones en las cuerdas) aparecen como incógnitas en esas ecuaciones de movimiento.

En algunos problemas es suficiente considerar el movimiento del centro de masa* del sistema, en lugar de los movimientos de las partículas individuales. La ecuación de movimiento del centro de masa se obtiene al sumar las ecuaciones de movimiento de todas las partículas en el sistema. Debido a que las fuerzas de restricción entre las partículas ocurren en pares iguales y opuestos (tercera ley de Newton), son eliminadas por el proceso de suma.

a. *Movimiento del centro de masa*

Antes de deducir la ecuación de movimiento del centro de masa, es necesario revisar el concepto de centro de masa y analizar cuáles son las fuerzas externas e internas del sistema.

*Con frecuencia los ingenieros utilizan los términos *centro de gravedad* y *centro de masa* de manera indistinta ya que esos dos puntos coinciden en la mayoría de las aplicaciones.

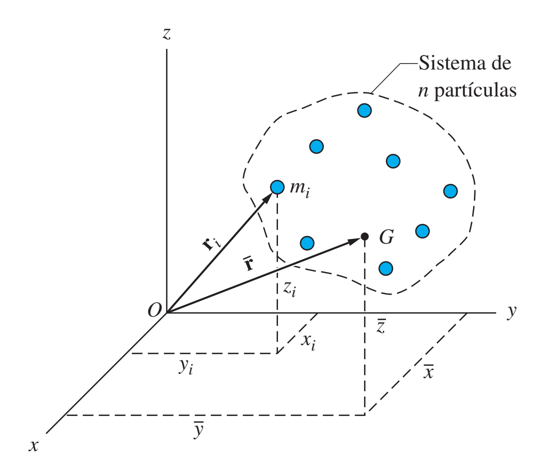


Fig. 15.5

1. *Centro de masa* La figura 15.5 muestra un sistema de n partículas. La masa de la i-ésima partícula se denota con m_i y su vector de posición es $\mathbf{r}_i = x_i\mathbf{i} + y_i\mathbf{j} + z_i\mathbf{k}$. El centro de masa G del sistema se define como el punto cuyo vector de posición es

$$\bar{\mathbf{r}} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i \tag{15.12a}$$

donde $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ es la masa total del sistema. Las componentes rectangulares de $\bar{\mathbf{r}}$ son*

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i \quad \bar{y} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i y_i \quad \bar{z} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i z_i \tag{15.12b}$$

Si el sistema de coordenadas xyz es un marco de referencia inercial, la velocidad $\bar{\mathbf{v}}$ y la aceleración $\bar{\mathbf{a}}$ del centro de masa se obtienen al derivar la ecuación (15.12a) respecto al tiempo:

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{d\bar{\mathbf{r}}}{dt} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{v_i} \quad \bar{\mathbf{a}} = \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} = \frac{d^2\bar{\mathbf{r}}}{dt^2} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{a_i} \tag{15.13}$$

donde $\mathbf{v_i}$ y $\mathbf{a_i}$ son la velocidad y la aceleración de la i-ésima partícula, respectivamente.

2. *Fuerzas externas e internas* La figura 15.6(a) muestra el diagrama de cuerpo libre de un sistema cerrado de n partículas marcadas 1, 2, . . . , n.† El vector $\mathbf{F}_i$, i = 1, 2, . . . , n, representa la fuerza *externa* resultante que actúa sobre la i-ésima partícula. Las fuerzas externas son causadas por la interacción de las partículas con el

*Esas ecuaciones son similares a la definición del centro de masa de un cuerpo rígido del capítulo 8. La única diferencia es que las integrales del capítulo 8 se reemplazan por sumatorias para un sistema de partículas.

†Un sistema es "cerrado" si ninguna partícula entra o sale de él. Más adelante la razón de esta restricción se aclarará. Conforme las partículas se mueven, la frontera del sistema puede imaginarse como una "bolsa" flexible que siempre encierra las mismas partículas.

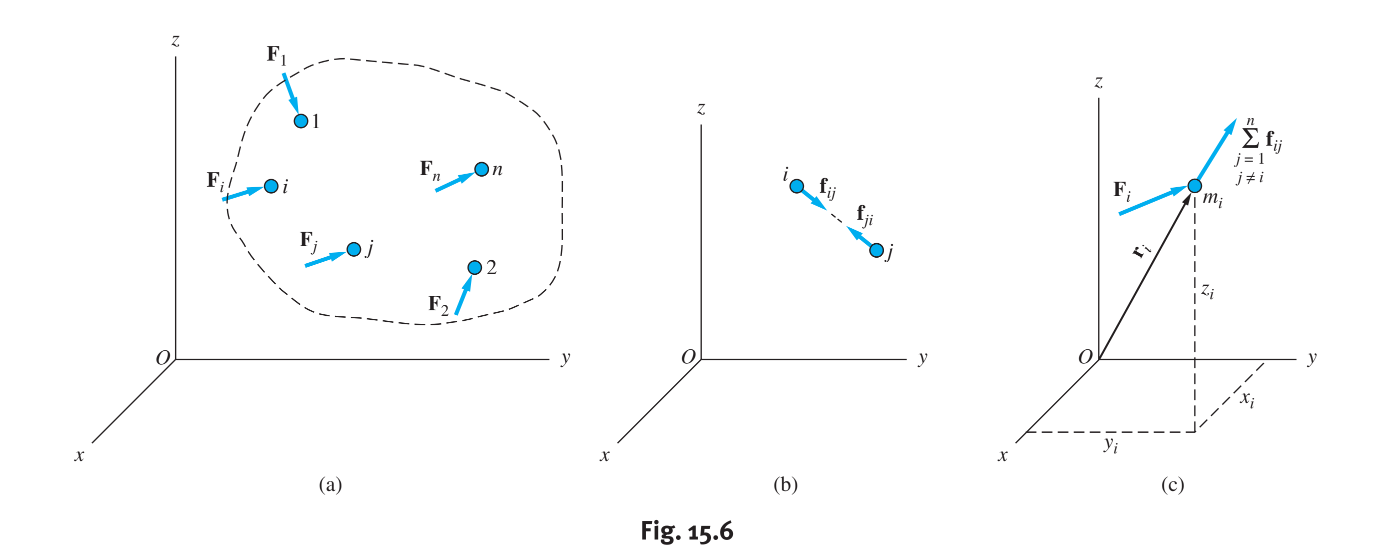


Fig. 15.6

mundo externo (es decir, sus fuentes son externas al sistema). Ejemplos de fuerzas externas que pueden actuar sobre una partícula son su peso, sus interacciones con otras partículas que no estén incluidas en el sistema y las reacciones en soportes.

Además de las fuerzas externas, las partículas del sistema pueden estar sujetas a fuerzas que son *internas* al mismo. Por ejemplo, dos partículas podrían estar conectadas por un resorte, chocar entre sí o portar cargas eléctricas que causarían repulsión o atracción mutuas. En la figura 15.6(a) no es necesario mostrar las fuerzas internas en el DCL del sistema, ya que las interacciones entre las partículas siempre ocurren en pares de fuerzas que son iguales en magnitud, opuestas en dirección y cuyas líneas de acción son colineales (tercera ley de Newton). Por tanto, las fuerzas internas se eliminan.

La figura 15.6(b) muestra el par de fuerzas internas que actúa entre la i-ésima y la j-ésima partículas. $\mathbf{f}_{ij}$ representa la fuerza interna que actúa sobre la i-ésima partícula que es causada por la j-ésima. De modo similar, $\mathbf{f}_{ji}$ es la fuerza interna que actúa sobre la j-ésima partícula causada por la i-ésima. [Cada partícula puede tener una interacción con cada una de las otras partículas en el sistema, pero en la figura 15.6(b) sólo se muestra una de estas interacciones.] De acuerdo con la tercera ley de Newton,

$$\mathbf{f}_{ij} = -\mathbf{f}_{ji} \qquad (i \neq j) \tag{15.14}$$

y ambas fuerzas son colineales.*

En la figura 15.6(c), se muestra un diagrama de cuerpo libre de una típica i-ésima partícula del sistema. Como ya se mencionó, $\mathbf{F}_i$ representa la fuerza externa resultante que actúa sobre la partícula (incluyendo su peso). El vector

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \mathbf{f}_{ij}$$

*Observe que $i = j$ se excluye en la ecuación (15.14) porque $\mathbf{f}_{ii}$, la fuerza ejercida sobre la i-ésima partícula, no tiene sentido.

es la fuerza interna resultante que actúa sobre la partícula (la suma de las fuerzas aplicadas a la i-ésima partícula por todas las otras en el sistema).

3. *Ecuación de movimiento del centro de masa* Del diagrama de cuerpo libre de la figura 15.6(c), se obtiene la siguiente ecuación de movimiento para la i-ésima partícula:

$$\mathbf{F}_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \mathbf{f}_{ij} = m_i \mathbf{a}_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{15.15}$$

Ya que hay n partículas en el sistema, la ecuación (15.15) representa n ecuaciones vectoriales (una para cada partícula). Al sumar las n ecuaciones, se tiene

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \mathbf{f}_{ij} = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{a}_i \tag{15.16}$$

Esta ecuación puede simplificarse si se considera lo siguiente:

1. $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i = \sum \mathbf{F}$ es la fuerza externa resultante que actúa sobre el sistema (incluyendo los pesos de las partículas).
2. Como se indica en la ecuación (15.14), las fuerzas internas ocurren en pares iguales y opuestos. Por tanto, su suma es cero; es decir,

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \mathbf{f}_{ij} = \mathbf{0} \tag{15.17}$$

3. Al utilizar la ecuación (15.13), el lado derecho de la ecuación (15.16) puede remplazarse por

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{a}_i = m\bar{\mathbf{a}} \tag{15.18}$$

Si se usan los resultados anteriores, la ecuación (15.16) puede escribirse en la forma

$$\sum \mathbf{F} = m\bar{\mathbf{a}} \tag{15.19}$$

Si se compara la ecuación (15.19) con la segunda ley de Newton $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ para una partícula, se observa que el centro de masa del sistema se mueve como si fuera una partícula de masa igual a la masa total del sistema, bajo la acción de la resultante de las fuerzas externas que actúan sobre este último.

b. Resolución de las ecuaciones de movimiento de las partículas individuales

La ecuación de movimiento del centro de masa tiene una aplicación limitada, puesto que no dice nada sobre el movimiento de las partículas individuales o de los valores de las fuerzas internas. La resolución de las ecuaciones de movimiento de las partículas individuales no tiene ninguna de estas desventajas.

A manera de ilustración, considere el sistema de la figura 15.7(a) que consta de los bloques A y B de masas m_A y m_B, respectivamente. Los bloques están unidos por

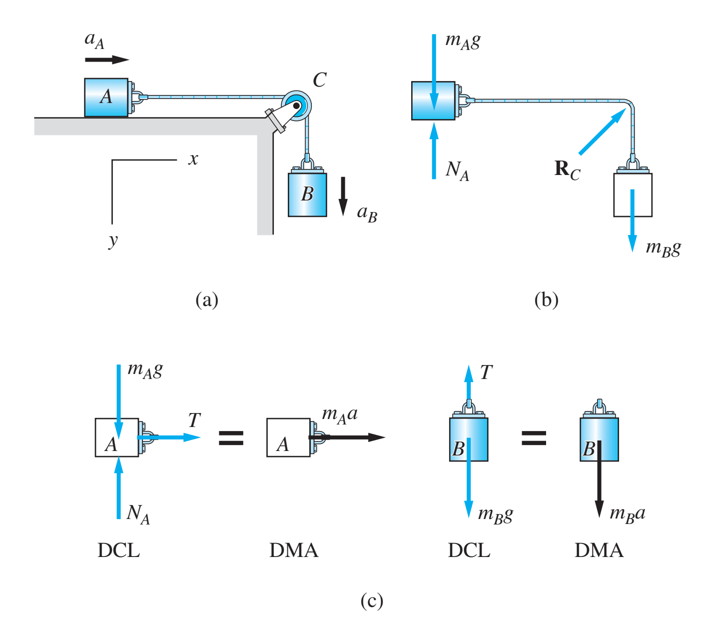


Fig. 15.7

un cable que pasa por la polea C. El problema es determinar la fuerza en el cable y la aceleración de cada bloque, suponiendo que la fricción es despreciable.

El sistema contiene tres restricciones cinemáticas. Hay dos restricciones externas, impuestas por la superficie horizontal bajo el bloque A y la polea C. En la figura 15.7(b), las fuerzas de restricción correspondientes (reacciones) se denotan con N_A y $\mathbf{R}_C$ en el DCL del sistema. La tercera restricción es que la longitud del cable es constante. La fuerza de restricción correspondiente (la tensión del cable), al ser interna al sistema, no se presenta en este diagrama.

En este problema no resultaría de utilidad la investigación del movimiento del centro de masa del sistema. Por tanto, la atención se enfoca en el análisis de los bloques individuales, al usar los diagramas de cuerpo libre y de masa-aceleración de la figura 15.7(c). Observe que la fuerza T del cable es constante a lo largo de éste si la masa del mismo es despreciable y se ignora la fricción en la polea C. La restricción interna impuesta por el cable requiere que las aceleraciones de ambos bloques sean iguales; es decir, $a_A = a_B = a$. De los diagramas se obtienen las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$\text{Bloque } A: \quad \sum F_x = ma \quad \xrightarrow{+} \quad T = m_A a$$

$$\text{Bloque } B: \quad \sum F_y = ma \quad +\!\downarrow \quad m_B g - T = m_B a$$

lo que resulta en

$$a = \frac{m_B g}{m_A + m_B} \qquad T = \frac{m_A m_B g}{m_A + m_B}$$

Problema de ejemplo **15.4**

El hombre que se muestra en la figura (a) camina del extremo izquierdo al derecho de la tabla uniforme, misma que al principio está en reposo sobre una capa de hielo. Determine la distancia que el hombre se movió cuando llegó al extremo derecho. Los pesos del hombre y de la tabla son 160 lb y 40 lb, respectivamente, y la fricción entre la tabla y el hielo es despreciable.

y

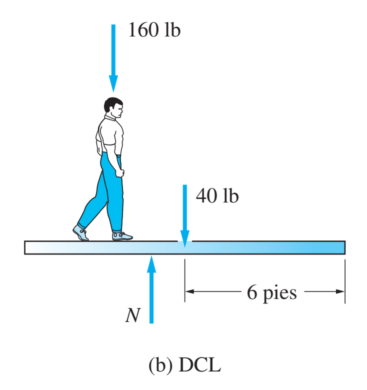
12 pies

x

(a)

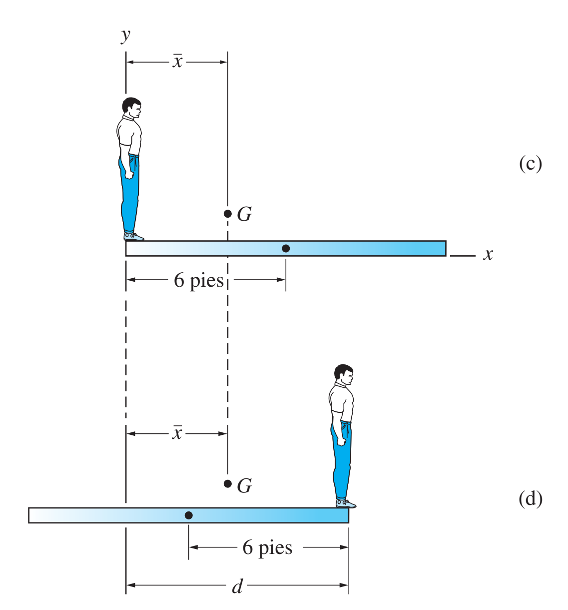
Solución

En la figura (b) se muestra el diagrama de cuerpo libre del sistema constituido por el hombre y la tabla. Las únicas fuerzas que aparecen en este DCL son los pesos del hombre y la tabla, y la reacción normal *N*. Las fuerzas normal y de fricción que actúan entre el hombre y la tabla no aparecen en el DCL ya que son internas al sistema.



(b) DCL

En el DCL de la figura (b) se ve que no existen fuerzas que actúan sobre el sistema en la dirección *x*. Por tanto, de acuerdo con $\sum \mathbf{F} = m\bar{\mathbf{a}}$, el centro de masa *G* del sistema permanece estacionario, como se indica en las figuras (c) y (d).



(c)

(d)

Ahora se calcula $\bar{x}$, la coordenada *x* de *G*, cuando el hombre está en el extremo izquierdo de la tabla. Respecto a la figura (c), se tiene

$$m\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i \quad \text{o} \quad W\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} W_i x_i$$

$$(160 + 40)\bar{x} = 160(0) + 40(6)$$

que da $\bar{x} = 1.2$ pies. Si se repite el procedimiento cuando el hombre está en el extremo derecho de la tabla, como se indica en la figura (d), se obtiene

$$(160 + 40)\bar{x} = 160d + 40(d - 6)$$

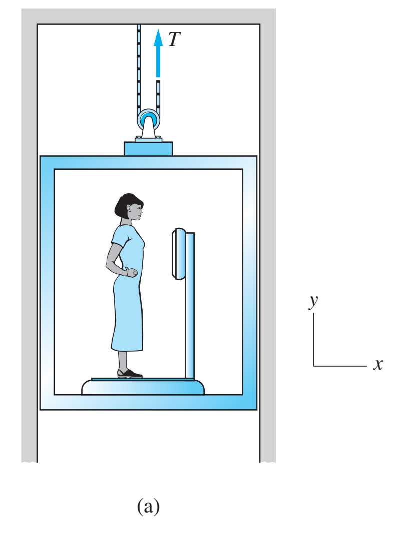
de donde, $d = \bar{x} + 1.2$. Así, al sustituir $\bar{x} = 1.2$ pies (recuerde que $\bar{x}$ no cambia cuando el hombre camina sobre la tabla), resulta

$$d = 2.4 \text{ pies} \qquad \textit{Respuesta}$$

Observe que cada paso del hombre hace que éste se mueva hacia la derecha y la tabla hacia la izquierda. Las magnitudes de esos movimientos son tales que aseguran que el centro de masa del sistema no se mueva en sentido horizontal.

También es posible resolver el problema si se observa que la distancia entre el hombre y el centro de masa G debe ser la misma en las figuras (c) y (d), debido a las simetrías de las dos configuraciones. En otras palabras, $\bar{x} = d - \bar{x}$, o $d = 2\bar{x}$.

Problema de ejemplo **15.5**



(a)

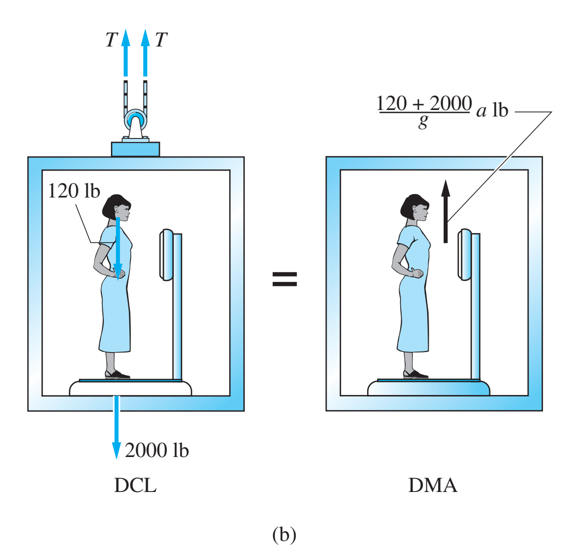
La figura (a) muestra a una mujer de 120 lb de pie sobre una balanza dentro de un elevador que pesa 2000 lb. Determine la lectura de la balanza y la aceleración correspondiente del elevador si la tensión en el cable es: 1. $T = 1100$ lb y 2. $T = 900$ lb. Desprecie los pesos de la balanza y del soporte de la polea.

Solución

Cálculos preliminares

La figura (b) muestra el diagrama de cuerpo libre (DCL) del sistema que forman la mujer y el elevador. Las únicas fuerzas externas son los pesos y las tensiones en el cable. La fuerza que actúa entre la mujer y la balanza no aparece porque es interna. En la figura (b) también se muestra el diagrama de masa-aceleración (DMA) para el sistema. Si la mujer y el elevador tienen la misma aceleración a (que se supone va hacia arriba), entonces el vector de inercia es igual a la masa total del sistema multiplicada por a. La segunda ley de Newton da

$$\Sigma F_y = ma_y \quad +\!\uparrow \quad 2T - 120 - 2000 = \frac{120 + 2000}{g}a$$



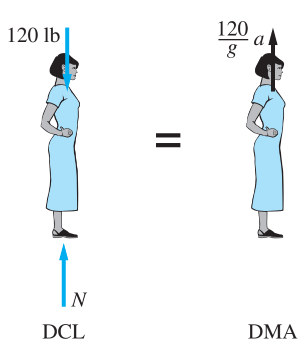
(b)

Por tanto, la aceleración es

$$a = \frac{(2T - 2120)g}{2120} \text{ pies/s}^2 \qquad \text{(a)}$$

donde T se mide en libras y $g = 32.2$ pies/s^2.

Para determinar la fuerza que actúa entre la mujer y la balanza, se debe aislar a aquélla de esta última. En la figura (c) se muestra el DCL de la mujer, donde N es la fuerza que la balanza ejerce sobre ella. De hecho, esta fuerza es igual y opuesta a la ejercida por la mujer sobre la balanza. En la figura (c) también se muestra el DMA de la mujer, donde a otra vez se dirige hacia arriba, lo que es consistente con la suposición previa. De la segunda ley de Newton, se tiene



(c)

$$\Sigma F_y = ma_y \quad +\!\uparrow \quad N - 120 = \frac{120}{g}a$$

de donde la relación entre N y a (pies/s^2) es

$$N = \frac{120a}{g} + 120 \text{ lb} \qquad \text{(b)}$$

Al sustituir la ecuación (a) en la (b) y simplificar, se encuentra que la relación entre N y T es

$$N = 0.113\,21T \qquad \text{(c)}$$

Parte 1

Si $T = 1100$ lb, la lectura de la balanza, a partir de la ecuación (c), es

$$N = 0.113\,21T = 0.113\,21(1100) = 124.5 \text{ lb} \qquad \textit{Respuesta}$$

y la aceleración correspondiente de la ecuación (a) es

$$a = \frac{(2T - 2120)g}{2120} = \frac{[2(1100) - 2120](32.2)}{2120} = 1.215 \text{ pies/s}^2 \qquad \textit{Respuesta}$$

Debido a que a es positiva, está en la dirección que se ha supuesto, es decir, hacia arriba.

Parte 2

Cuando se utiliza $T = 900$ lb en las ecuaciones (a) y (c), se tiene

$$N = 0.113\,21T = 0.113\,21(900) = 101.9 \text{ lb} \qquad \textit{Respuesta}$$

y

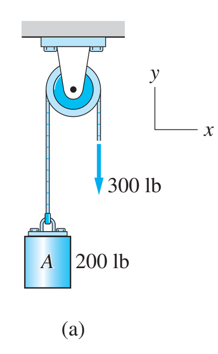
$$a = \frac{(2T - 2120)g}{2120} = \frac{[2(900) - 2120](32.2)}{2120} = -4.86 \text{ pies/s}^2 \qquad \textit{Respuesta}$$

Ya que a es negativa, se dirige hacia abajo.

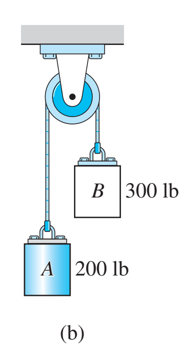
Observe que la mujer ejerce una fuerza que es mayor que su peso cuando la aceleración va hacia arriba y menor que su peso cuando esta última se dirige hacia abajo.

Problema de ejemplo 15.6

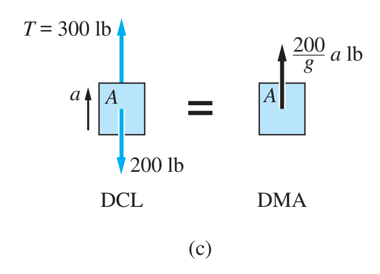
En la figura (a), la fuerza de 300 lb se aplica al cable que está unido al bloque A de 200 lb. En la figura (b), esta fuerza se reemplaza por un bloque B de 300 lb. Despreciando la masa de la polea, determine para ambos casos la aceleración de A y la tensión en el cable.



(a)



(b)



(c)

Solución

Sistema en la figura (a)

La figura (c) muestra el diagrama de cuerpo libre (DCL) del bloque A. Debido a que la masa de la polea se desprecia, la tensión es la misma a lo largo del cable, lo que da

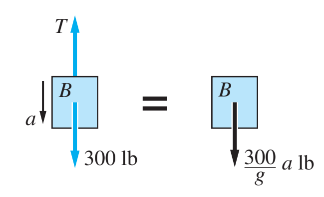
$$T = 300 \text{ lb}$$ *Respuesta*

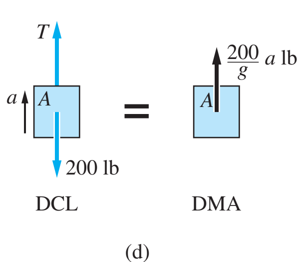
La figura (c) también muestra el diagrama de masa-aceleración (DMA) para el bloque A, donde se supone que su aceleración a va hacia arriba. Si se utiliza la segunda ley de Newton se obtiene

$$\Sigma F_y = ma \quad +\!\!\uparrow \quad 300 - 200 = \frac{200}{g} a$$

por lo que la aceleración es

$$a = \frac{g}{2} = 16.1 \text{ pies/s}^2$$ *Respuesta*





(d)

Sistema en la figura (b)

En la figura (d) se muestran los DCL y DMA de los bloques. Debido a que el cable es inextensible, la aceleración de A es igual en magnitud a la de B, pero en dirección opuesta. Se supuso que la aceleración de A va hacia arriba. Por tanto, la ecuación de movimiento del bloque A es

$$\Sigma F_y = ma \quad +\!\!\uparrow \quad T - 200 = \frac{200}{g} a$$

Para el bloque B, se tiene

$$\Sigma F_y = ma \quad +\!\!\uparrow \quad T - 300 = -\frac{300}{g} a$$

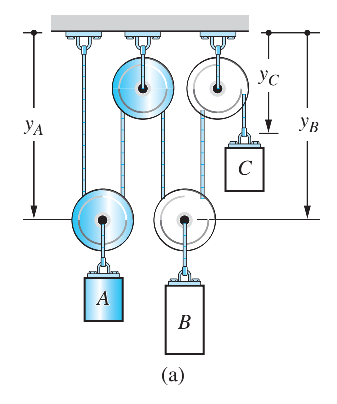
Al resolver esas dos ecuaciones de manera simultánea, se obtiene

$$T = 240 \text{ lb} \quad \text{y} \quad a = \frac{g}{5} = 6.44 \text{ pies/s}^2 \qquad \textit{Respuesta}$$

Observe que la aplicación de una fuerza de 300 lb en el extremo del cable no es equivalente a sujetarle un peso de 300 lb.

Problema de ejemplo 15.7

La figura (a) muestra un sistema que consta de tres bloques conectados por un cable inextensible que pasa por cuatro poleas. Las masas de los bloques A, B y C son 60, 80 y 20 kg, respectivamente. Empleando las coordenadas que se muestran y despreciando las masas de las poleas, encuentre la aceleración de cada bloque y la tensión T en el cable.



(a)

Solución

Se utilizará el método de fuerza-masa-aceleración para deducir la ecuación de movimiento para cada bloque.

Análisis cinemático

En la figura (a), sea L la longitud del cable que pasa por las poleas, entonces

$$L = 2y_A + 2y_B + y_C + C_1$$

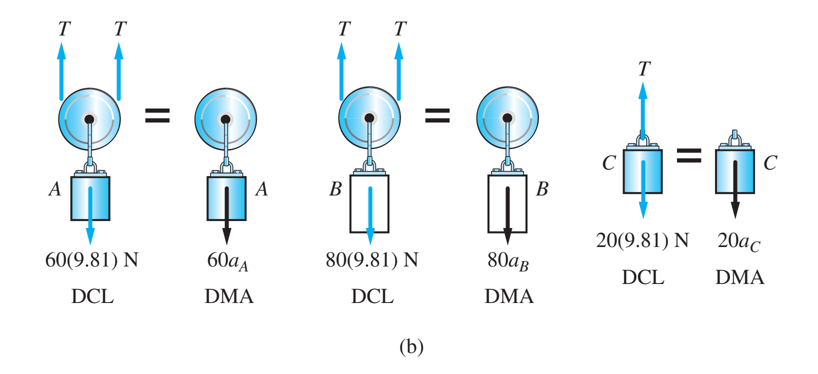
donde C_1 es una constante que toma en cuenta la longitud del cable enrollado en las poleas y los pequeños tramos que soportan las dos poleas de arriba. Debido a que L es constante, si se deriva respecto al tiempo esto conduce a

$$\frac{dL}{dt} = 2v_A + 2v_B + v_C = 0$$

donde las v son las velocidades de los bloques. Al derivar de nuevo respecto al tiempo se obtiene la relación entre las aceleraciones de los bloques:

$$2a_A + 2a_B + a_C = 0 \qquad \text{(a)}$$

Análisis cinético



(b)

La figura (b) muestra los diagramas de cuerpo libre de los bloques A y B (junto con las poleas sin masas a las que están unidos) y el bloque C. Observe que la tensión T es constante a lo largo del cable. También se muestran los diagramas de masa-aceleración correspondientes. Al aplicar la ley de Newton $\Sigma F_y = ma$ a cada bloque, las ecuaciones de movimiento son

$$+\downarrow \quad 60(9.81) - 2T = 60a_A$$

$$+\downarrow \quad 80(9.81) - 2T = 80a_B \qquad \text{(b)}$$

$$+\downarrow \quad 20(9.81) - T = 20a_C$$

Resolviendo las ecuaciones (a) y (b), se obtienen la tensión en el cable y la aceleración de cada bloque:

$$T = 294.3 \text{ N}$$

$$a_A = 0$$

$$a_B = 2.45 \text{ m/s}^2 \qquad \textit{Respuesta}$$

$$a_C = -4.91 \text{ m/s}^2$$

Los signos indican que la aceleración de B se dirige hacia abajo, mientras que la de C se dirige hacia arriba.

Problemas

15.28 Las tres partículas de un sistema se mueven en el plano xy. En cierto instante, se muestran en la figura las posiciones y aceleraciones de las partículas. Para este instante, determine: (a) las coordenadas del centro de masa del sistema y (b) la aceleración de dicho centro de masa.

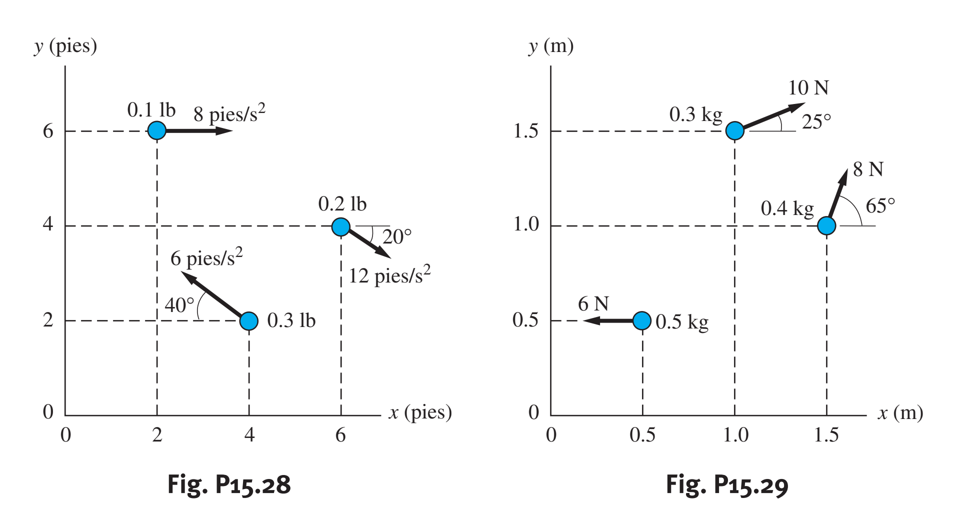


Fig. P15.28 **Fig. P15.29**

15.29 Las tres partículas de un sistema se mueven en el plano xy. En el instante que se muestra, las partículas sufren la acción de las fuerzas que se presentan. Para este instante establezca: (a) las coordenadas del centro de masa del sistema y (b) la aceleración de dicho centro de masa.

15.30 Dos hombres de 90 kg están sentados en el bote A de 400 kg. Empleando una cuerda de 30 m, el hombre en popa jala lentamente al otro bote B de 400 kg. Encuentre la distancia que se movió el bote A cuando ambos botes casi se tocan. Desprecie la resistencia del agua.

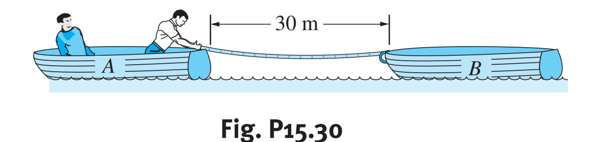


Fig. P15.30

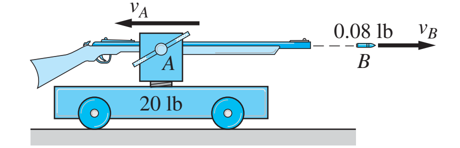


Fig. P15.31

15.31 Un rifle que se ha fijado a un carrito dispara una bala de 0.08 lb. El peso combinado del rifle y el carrito es de 20 lb. Después del disparo, se sabe que la velocidad del carrito es $v_A = 4.8$ pies/s hacia la izquierda. Calcule: (a) v_B, la velocidad de la bala después del disparo y (b) la velocidad en la boca del rifle (la velocidad de la bala relativa al cañón del rifle).

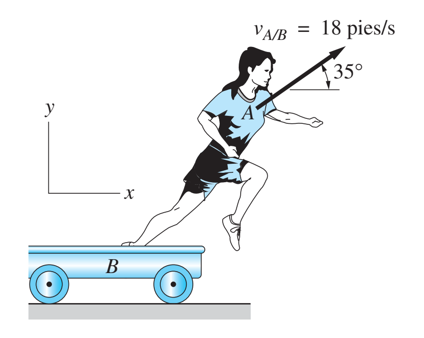


Fig. P15.32

15.32 Una mujer A de 140 lb salta de un carrito inmóvil B de 50 lb. Inmediatamente después del salto, la velocidad de la mujer relativa al carrito es como se muestra en la figura. Determine los vectores velocidad de la mujer y el carrito.

15.33 En el instante que se muestra, la velocidad del proyectil A de 10 lb es de 40$\mathbf{j}$ pies/s cuando se rompe en dos partes B y C que pesan 6 y 4 lb, respectivamente. La parte B golpea el piso (el plano xy) en el punto (80 pies, 50 pies, 0). Obtenga las

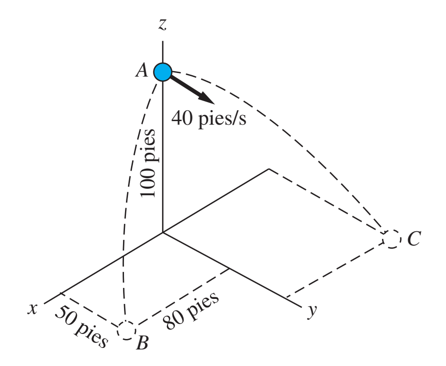


Fig. P15.33

coordenadas del punto donde C toca el suelo. (*Sugerencia:* considere el movimiento del centro de masa).

15.34 Se lanza un proyectil de 60 kg desde el punto O en $t = 0$ con la velocidad que se muestra. Durante el vuelo, el proyectil se rompe en dos partes, A y B, de masas 20 y 40 kg, respectivamente. Las partes permanecen en el plano xy. Si la posición de A en $t = 35$ s es como se muestra, encuentre la posición de B en ese tiempo. (*Sugerencia:* considere el movimiento del centro de masa.)

15.35 El remolque B está enganchado a la camioneta A que tiene un eje impulsor para cuatro llantas. El coeficiente de fricción estática entre estas últimas y el piso es 0.9. Determine: (a) la máxima aceleración posible y (b) la fuerza tensora correspondiente en el gancho del tráiler. Desprecie la resistencia por rodamiento de éste.

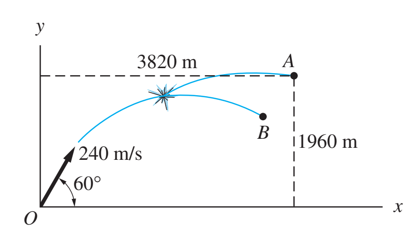


Fig. P15.34

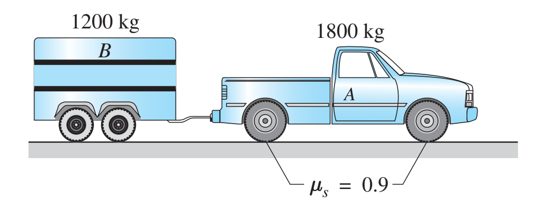


Fig. P15.35

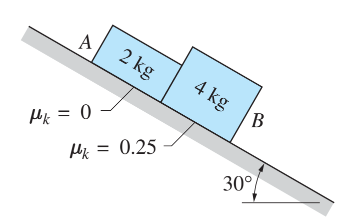


Fig. P15.36

15.36 Los paquetes A y B se deslizan hacia abajo del plano inclinado manteniendo contacto entre sí. Calcule la aceleración de los paquetes y la fuerza normal entre ellos.

15.37 El coeficiente estático de fricción entre el cajón de 100 lb y la carreta de 300 lb es 0.2. Encuentre la fuerza máxima P que puede aplicarse al cajón sin causar que resbale sobre la carreta.

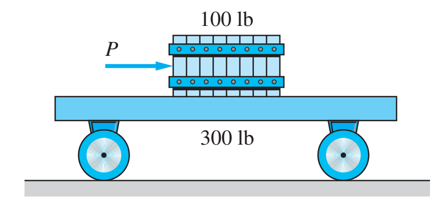


Fig. P15.37

15.38 Determine la tensión en el cable que conecta los bloques A y B, después de que se aplica la fuerza constante de 40 lb.

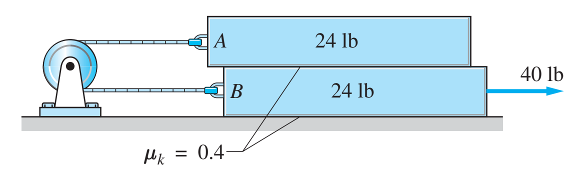


Fig. P15.38

15.39 El sistema que consiste en los bloques A y B, y la polea C sin masa, se levanta por la fuerza constante de 2.35 kN. Obtenga la fuerza en el cable que une a A y B.

Fig. P15.39

15.40 Si la masa del bloque A es dos veces la masa del bloque B, encuentre la aceleración de A en términos de la aceleración gravitacional g. Desprecie las masas de las poleas.

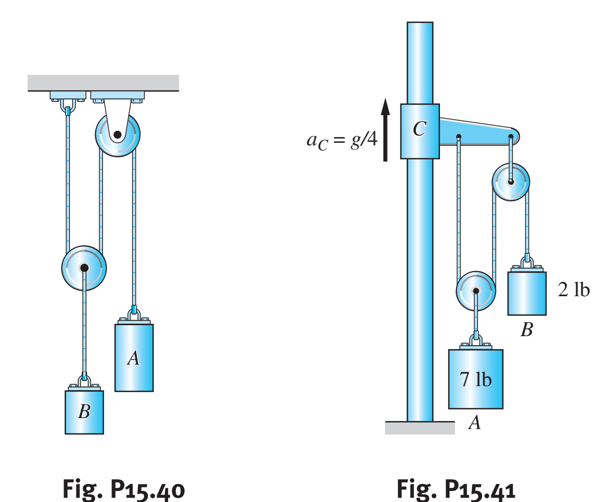


Fig. P15.40 **Fig. P15.41**

15.41 La aceleración del collar deslizante C es $g/4$, y se dirige hacia arriba. Determine las aceleraciones de los bloques A y B. Desprecie las masas de las poleas.

15.42 La caja A de 8 lb descansa en el extremo izquierdo de la tabla uniforme B de 6 lb cuando se aplica una fuerza constante de 10 lb a A. Establezca la distancia x_A que recorre la caja cuando ésta llega al extremo derecho de la tabla. Utilice los coeficientes cinéticos de fricción que se muestran en la figura.

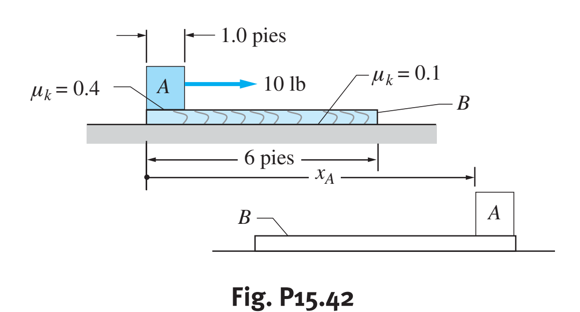


Fig. P15.42

15.43 Los bloques A y B se deslizan sobre el plano inclinado con fricción despreciable. Están unidos por una cuerda que pasa por la polea C de masa despreciable. Determine la aceleración del bloque A y la tensión en la cuerda.

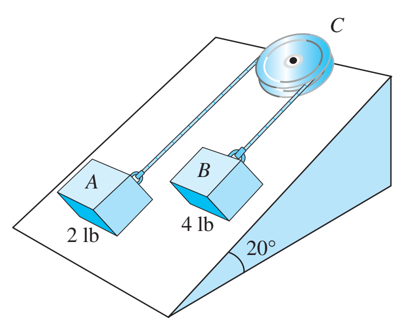


Fig. P15.43

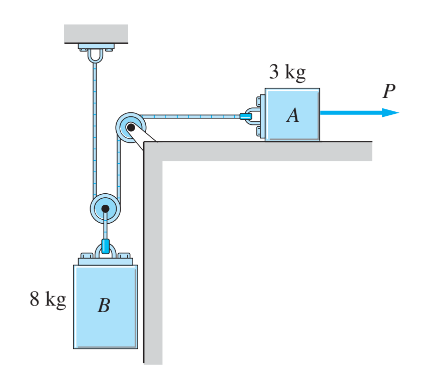


Fig. P15.44

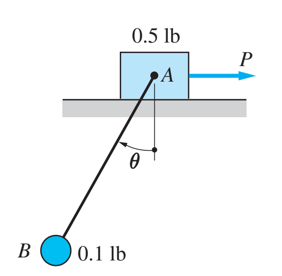


Fig. P15.45

15.44 Encuentre la magnitud de la fuerza P que hará que el bloque A acelere hacia la derecha a 4 m/s^2. Desprecie la fricción y la masa de la polea.

15.45 Se jala el bloque A sobre la superficie horizontal por la fuerza P constante. Si la cuerda que une a la masa B con el bloque mantiene el ángulo constante $\theta = 35°$ con la vertical, establezca la magnitud de P.

15.46 Una cuerda une a los bloques A y B cuando caen resbalando sobre la superficie cilíndrica. En la posición que se muestra, la velocidad de cada bloque es 1.2 m/s. Despreciando la fricción, calcule la tensión en la cuerda para esta posición.

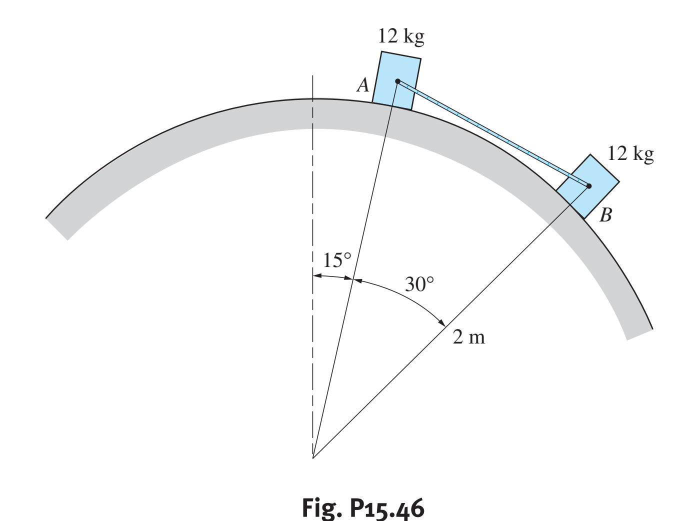


Fig. P15.46

15.47 Los bloques A y B están unidos por una cuerda cuando se deslizan hacia abajo sobre la superficie inclinada. El coeficiente de fricción cinética entre cada bloque y la superficie se muestra en la figura. Determine la fuerza en la cuerda.

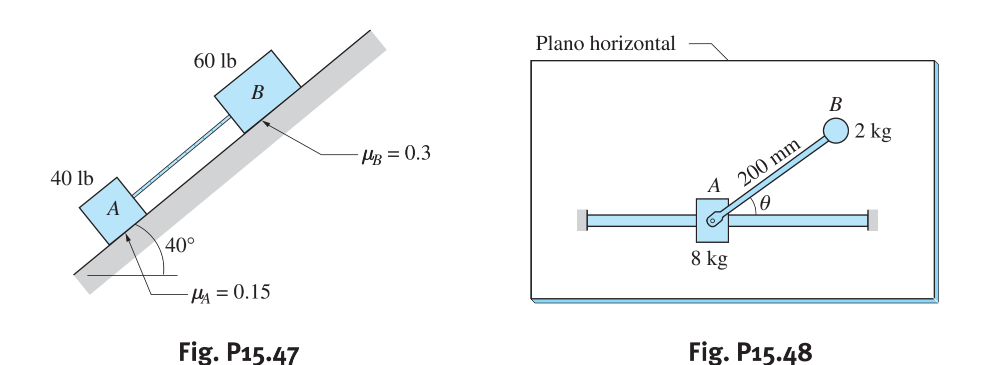


Fig. P15.47

Fig. P15.48

15.48 La masa B está unida al brazo que gira en el plano horizontal respecto a un perno en el collar A. Un motor en A mantiene constante la rapidez angular del brazo en $\dot{\theta} = 2.4$ rad/s. Obtenga la velocidad y la aceleración de A como funciones del ángulo θ. Suponga que $v_A = 0$ cuando $\theta = 0$. Se pueden despreciar la fricción y la masa del brazo que gira.

15.49 Determine las fuerzas en los cables 1 y 2 del sistema de poleas que se muestra. Desprecie la fricción y las masas de las poleas.

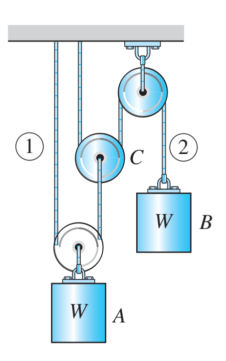


Fig. P15.49

***15.50** La camioneta A remolca al tráiler B desde una posición estacionaria. La camioneta tiene un eje impulsor para cuatro ruedas y el coeficiente estático de fricción entre éstas y la carretera es 0.8. La resistencia por rodamiento del tráiler es despreciable. Encuentre la máxima aceleración inicial posible de la camioneta si $x = 10$ m.

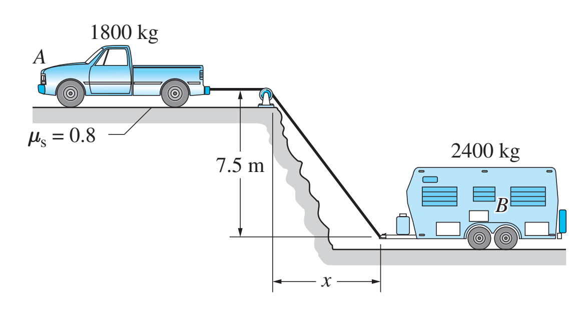


Fig. P15.50

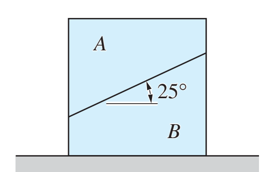


Fig. P15.51

***15.51** Se liberan dos bloques idénticos A y B a partir del reposo en la posición que se muestra. Calcule a_B y $a_{A/B}$ en términos de la aceleración gravitacional g. Desprecie la fricción.

15.52 La rigidez del resorte que une a los dos bloques de 5 lb es 2 lb/pulg. El sistema está inicialmente en reposo sobre la superficie sin fricción cuando se aplica la fuerza constante de 1.2 lb en $t = 0$. (a) Deduzca la ecuación diferencial de movimiento para cada bloque y establezca las condiciones iniciales. (b) Determine la rapidez de cada bloque y la fuerza P en el resorte cuando $t = 0.1$ s. (Nota: la solución analítica es $v_1 = 7.23$ pulg/s, $v_2 = 2.05$ pulg/s, $P = 0.712$ lb).

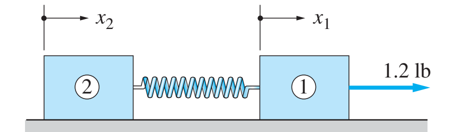


Fig. P15.52

15.53 La figura muestra una vista desde arriba de las partículas A y B que se deslizan sin fricción sobre una mesa horizontal. Las partículas llevan cargas eléctricas idénticas, que originan la fuerza repulsiva $F = c/d^2$, donde $c = 0.005$ N·m^2 y d es la distancia entre las partículas en metros. En el tiempo $t = 0$, se sabe que $d = 0.5$ m, A está en reposo y B se mueve hacia A con rapidez de 2 m/s. (a) Deduzca las ecuaciones diferenciales de movimiento y establezca las condiciones iniciales. (b) Calcule el valor mínimo de d y la rapidez de cada partícula en ese instante. (*Nota:* la solución analítica es $d_{min} = 0.227$ m, $v_A = v_B = 800$ mm/s.)

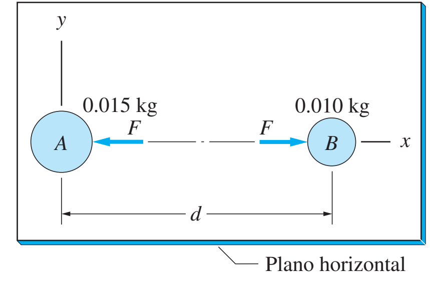


Fig. P15.53

15.54 La bala B de 0.025 kg que viaja a 600 m/s golpea y se incrusta en el bloque A de 15 kg, que inicialmente está en reposo sobre la superficie sin fricción. La fuerza entre A y B durante la fase de incrustación es $F = 50v_{B/A}$, donde F está en newtons y la velocidad relativa en metros por segundo. (a) Determine las ecuaciones diferenciales de movimiento para A y B durante la fase de incrustación de la bala y establezca las condiciones iniciales. (b) Calcule la velocidad de B y la distancia recorrida por A durante 1.0 ms después del contacto inicial. (*Nota:* la solución analítica es $v_B = 81.8$ m/s y $x_A = 0.567$ mm.)

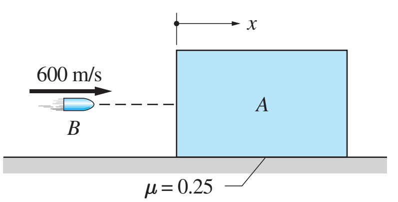


Fig. P15.54

15.55 Dos vagones de ferrocarril se mueven con las velocidades que se muestran cuando chocan. Sus parachoques son resortes ideales, siendo 20 000 lb/pie la rigidez

combinada de ambas defensas. (a) Obtenga la ecuación diferencial de movimiento para cada uno de los dos vagones. (b) Suponga que el contacto inicia en $t = 0$ y resuelva las ecuaciones de movimiento para la duración del impacto, que es aproximadamente 0.4 s. (c) A partir de la solución que se encontró en (b), determine el máximo valor de la fuerza y el tiempo de contacto.

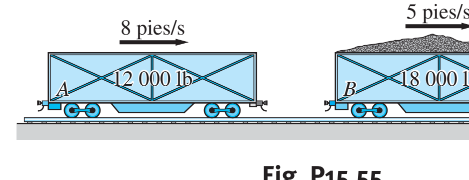


Fig. P15.55

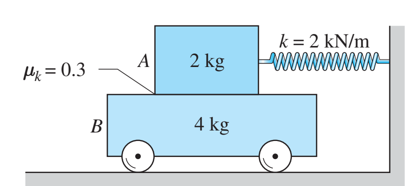


Fig. P15.56

15.56 Dos bloques se sueltan a partir del reposo en $t = 0$ con el resorte estirado 20 mm. (a) Deduzca las ecuaciones diferenciales de movimiento para cada bloque suponiendo que A resbala relativo a B. (b) Resuelva las ecuaciones de movimiento para el intervalo de tiempo de $t = 0$ a $t = 0.2$ s y trace la gráfica de la velocidad de cada bloque contra el tiempo.

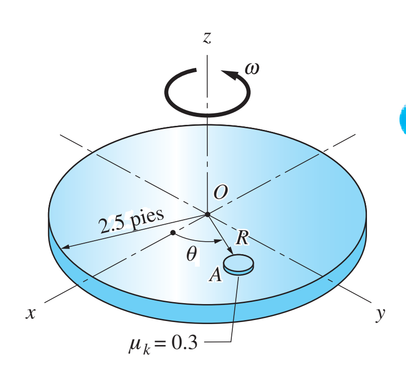


Fig. P15.57

15.57 El disco horizontal rugoso de radio 2.5 pies rota con rapidez angular constante $\omega = 45$ rev/min. La partícula A se coloca sobre el disco sin velocidad inicial en $t = 0$, $R = 1.0$ pies y $\theta = 0$. (a) Demuestre que las ecuaciones diferenciales de movimiento para el disco son

$$\ddot{R} = R\dot{\theta}^2 - \frac{\mu_k g \dot{R}}{v} \qquad \ddot{\theta} = -\frac{2\dot{R}\dot{\theta}}{R} - \frac{\mu_k g(\dot{\theta} - \omega)}{v}$$

donde

$$v = \left[\dot{R}^2 + R^2\left(\dot{\theta} - \omega\right)^2\right]^{1/2}$$

y establezca las condiciones iniciales. (b) Resuelva numéricamente las ecuaciones para el periodo en que la partícula está sobre el disco. Utilice la solución numérica para encontrar la rapidez de la partícula cuando ésta abandona el disco.

15.5 *Principios de trabajo-energía*

Este apartado amplía los métodos de trabajo-energía para una sola partícula, que se presentaron en los apartados 14.2-14.4, a un sistema de partículas.

a. *Trabajo realizado sobre un sistema de partículas*

La figura 15.8 muestra una i-ésima partícula típica que pertenece a un sistema cerrado de n partículas. Si se utiliza la notación que se presentó en el apartado 15.4, las fuerzas resultantes externa e interna que actúan sobre la i-ésima partícula se denotan con $\mathbf{F}_i$ y $\sum_{j=1}^{n} \mathbf{f}_{ij} (j \neq i)$,respectivamente. Si la partícula se mueve sobre la trayectoria $\mathscr{L}_i$ de la posición 1 a la 2, el trabajo realizado sobre la partícula es, de acuerdo con la ecuación (14.2),

$$(U_{1-2})_i = \int_{\mathscr{L}_i} \left(\mathbf{F}_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \mathbf{f}_{ij} \right) \cdot d\mathbf{r}_i \tag{15.20}$$

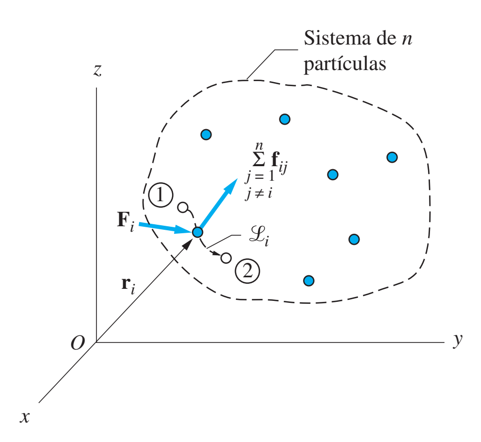


Fig. 15.8

donde $\mathbf{r}_i$ es el vector de posición de la partícula. El trabajo total realizado sobre el sistema de n partículas (es decir, la suma del trabajo realizado sobre cada una de ellas) puede expresarse como

$$U_{1-2} = \sum_{i=1}^{n} (U_{1-2})_i = \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathscr{L}_i} \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \int_{\mathscr{L}_i} \mathbf{f}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_i \qquad (15.21)$$

El primer término del lado derecho de esta ecuación es igual a $(U_{1-2})_{\text{ext}}$, el trabajo efectuado por todas las fuerzas externas que actúan sobre el sistema. El segundo término representa $(U_{1-2})_{\text{int}}$, el trabajo total realizado por las fuerzas internas. Por tanto, el trabajo total realizado sobre el sistema de partículas será

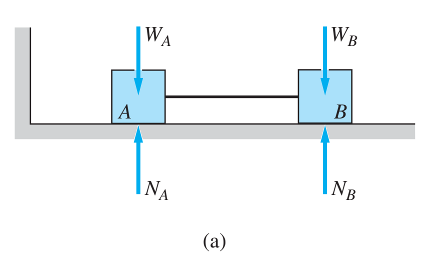
$$U_{1-2} = (U_{1-2})_{\text{ext}} + (U_{1-2})_{\text{int}} \qquad (15.22)$$

El trabajo de las fuerzas externas, $(U_{1-2})_{\text{ext}}$, puede calcularse con los métodos que se han explicado en el apartado 14.2.

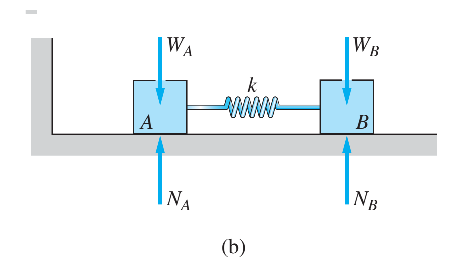
b. *Trabajo de las fuerzas internas*

Con frecuencia, el cálculo del trabajo efectuado por las fuerzas internas, $(U_{1-2})_{\text{int}}$, puede simplificarse como resultado de la naturaleza especial de las mismas. Como ya se vio en la ecuación (15.14), las fuerzas internas ocurren en pares colineales que son iguales pero opuestos; en otras palabras, $\mathbf{f}_{ij} = -\mathbf{f}_{ji}$. El trabajo total realizado por un par de estas fuerzas será cero si $d\mathbf{r}_i = d\mathbf{r}_j$, porque entonces el trabajo realizado por $\mathbf{f}_{ij}$ cancelará al efectuado por $\mathbf{f}_{ji}$. En este caso, se dice que las fuerzas internas están *sin trabajo*.

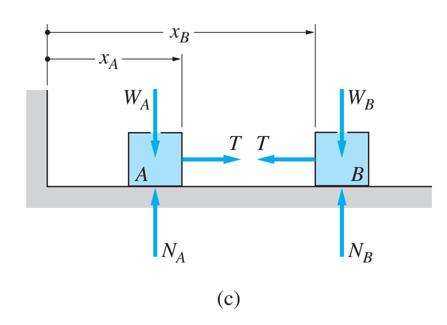
Para ilustrar la diferencia entre las fuerzas internas sin trabajo y las fuerzas internas que realizan trabajo, se consideran los sistemas que se muestran en las figuras 15.9(a) y (b), que consisten en dos bloques A y B que se deslizan sin fricción sobre un plano horizontal. La figura 15.9(a) muestra el DCL del sistema cuando los bloques están unidos por una cuerda inextensible; la figura 15.9(b) muestra el DCL del sistema cuando están conectados con un resorte ideal con rigidez k. Esos dos DCL son idénticos porque ambos sistemas están sujetos a las mismas fuerzas externas: W_A, W_B, N_A y N_B. Observe que en cada caso $U_{\text{ext}} = 0$, porque las fuerzas externas son perpendiculares a la dirección del movimiento.



(a)



(b)



(c)

Fig. 15.9

Para calcular el trabajo realizado por las fuerzas internas, es necesario analizar por separado las fuerzas que actúan sobre cada bloque, como se muestra en el DCL de la figura 15.9(c). La fuerza T representa la tensión ya sea en la cuerda para el sistema de la figura 15.9(a) o en la cuerda para el de la figura 15.9(b). Durante un movimiento diferencial del sistema, el trabajo hecho por T sobre los bloques A y B es $T\,dx_A$ y $-T\,dx_B$, respectivamente. Por tanto, el trabajo total realizado por T sobre el sistema es $T(dx_A - dx_B)$. Si la conexión entre los bloques es una cuerda inextensible, entonces $dx_A = dx_B$ y así el trabajo total hecho por la cuerda sobre el sistema es cero. Sin embargo, si la conexión es un resorte lineal, en general, dx_A no será igual a dx_B porque el resorte puede deformarse. Se concluye que la fuerza del resorte es capaz de hacer trabajo sobre el sistema a pesar de ser una fuerza interna.

En resumen, las conexiones internas *rígidas*, como las cuerdas inextensibles y las juntas ancladas, efectúan trabajo igual y opuesto sobre los cuerpos que unen, lo que resulta en un trabajo neto cero realizado sobre el sistema. Por otro lado, las conexiones internas *deformables* (que incluyen resortes) y fricción en superficies en deslizamiento, son capaces de efectuar trabajo sobre un sistema.

c. Principio de trabajo y energía cinética

Aplicando el principio de trabajo-energía, ecuación (14.15), a la arbitraria i-ésima partícula del sistema, se tiene

$$(U_{1-2})_i = (\Delta T)_i \tag{15.23}$$

donde $(U_{1-2})_i$ es el trabajo realizado sobre la partícula y $(\Delta T)_i$ es el cambio en su energía cinética. Si el sistema contiene n partículas, existirán n ecuaciones escalares similares a la ecuación (15.23). Al sumar todas esas ecuaciones y emplear la ecuación (15.22), se encuentra que

$$(U_{1-2})_{\text{ext}} + (U_{1-2})_{\text{int}} = \Delta T \tag{15.24}$$

donde T, la energía cinética del sistema, está definida como la suma de las energías cinéticas de las partículas; es decir,

$$T = \sum_{i=1}^{n} T_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2 \tag{15.25}$$

d. Conservación de la energía mecánica

Si todas las fuerzas, tanto externas como internas, son conservativas (véase el apartado 14.4), entonces la energía mecánica del sistema se conserva; es decir,

$$V_1 + T_1 = V_2 + T_2 \tag{15.26}$$

donde V_1 y V_2 son las energías potenciales inicial y final del sistema (la suma de las energías potenciales de todas las fuerzas, tanto externas como internas, que son capaces de hacer trabajo sobre el sistema), y T_1 y T_2 son las energías cinéticas inicial y final del sistema (la suma de las energías cinéticas de todas las partículas).

15.6 *Principio de impulso y cantidad de movimiento*

En este apartado se amplían los principios de impulso-cantidad de movimiento para una partícula, que se analizaron en el apartado 14.6, a los sistemas de partículas.

a. *Cantidad de movimiento lineal*

Considere el sistema de n partículas de la figura 15.10. Como se muestra en la figura, la cantidad de movimiento lineal de una típica i-ésima partícula es $\mathbf{p}_i = m_i\mathbf{v}_i$, donde m_i es la masa de la partícula y $\mathbf{v}_i$ es su velocidad. La cantidad de movimiento lineal (o, simplemente, cantidad de movimiento) $\mathbf{p}$ del sistema se define como la suma vectorial de las cantidades de movimiento lineales de todas las partículas en el sistema; es decir,

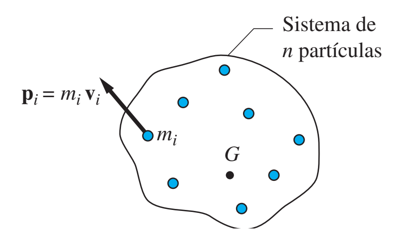


Fig. 15.10

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{p}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i\mathbf{v}_i \tag{15.27}$$

Al sustituir de la ecuación (15.13) $\sum_{i=1}^{n} m_i\mathbf{v}_i = m\bar{\mathbf{v}}$, donde m es la masa total del sistema y $\bar{\mathbf{v}}$ representa la velocidad de G, el centro de masa del sistema, se obtiene

$$\mathbf{p} = m\bar{\mathbf{v}} \tag{15.28}$$

Así la cantidad de movimiento de un sistema de partículas de masa total m es igual a la cantidad de movimiento de una sola partícula de masa m que se mueve con la velocidad $\bar{\mathbf{v}}$ del centro de masa del sistema.

b. *Relación fuerza-cantidad de movimiento*

La ecuación (15.19) estableció que el movimiento de un sistema de partículas cerrado está gobernado por $\Sigma\mathbf{F} = m\bar{\mathbf{a}}$, donde $\Sigma\mathbf{F}$ es la fuerza *externa* resultante que actúa sobre el sistema, m es la masa total del mismo y $\bar{\mathbf{a}}$ es la aceleración del centro de masa. Debido a que la masa dentro de un sistema cerrado es constante, esta ecuación puede escribirse en la forma

$$\Sigma\mathbf{F} = m\bar{\mathbf{a}} = m\frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\bar{\mathbf{v}})$$

Si se utiliza la ecuación (15.28), la expresión anterior de la relación fuerza-cantidad de movimiento para un sistema de partículas cerrado queda

$$\Sigma\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \tag{15.29}$$

Esta ecuación es idéntica a la (14.37), la ecuación fuerza-cantidad de movimiento para una sola partícula.

c. *Principio de impulso-cantidad de movimiento*

Al multiplicar ambos lados de la ecuación (15.29) por dt e integrar entre los tiempos t_1 y t_2, se encuentra que

$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma\mathbf{F}\,dt = \int_{t_1}^{t_2} d\mathbf{p} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 \tag{15.30}$$

donde $\mathbf{p}_1$ y $\mathbf{p}_2$ denotan las cantidades de movimiento del sistema en $t = t_1$ y t_2, respectivamente. Ya que el lado izquierdo de la ecuación (15.30) es el impulso de las fuerzas *externas*, que se denota con $\mathbf{L}_{1-2}$, es posible escribir

$$\mathbf{L}_{1-2} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = \Delta\mathbf{p} \tag{15.31}$$

que es el *principio de impulso-cantidad de movimiento* para un sistema de partículas. Observe que este principio y la ecuación (14.39), el principio de impulso-cantidad de movimiento para una sola partícula, tienen la misma forma. La ecuación (15.31) es, por supuesto, una ecuación vectorial que es equivalente a tres ecuaciones escalares.

d. Conservación de la cantidad de movimiento

A partir de la ecuación (15.31) se deduce que si el impulso de las fuerzas externas es cero, entonces la cantidad de movimiento del sistema se conserva. En otras palabras, si $\mathbf{L}_{1-2} = \mathbf{0}$, se obtiene

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 \quad \text{o} \quad \Delta\mathbf{p} = \mathbf{0} \tag{15.32}$$

que es el *principio de conservación de la cantidad de movimiento* para un sistema de partículas. La ecuación (15.32) es idéntica al principio de conservación de la cantidad de movimiento para una partícula, ecuación (14.41).

Cabe hacer notar que si la cantidad de movimiento de cada partícula de un sistema se conserva, entonces la cantidad de movimiento del sistema completo también lo hace. Sin embargo, el caso inverso de esta declaración no necesariamente es cierto: si la cantidad de movimiento de un sistema se conserva, esto no implica que la cantidad de movimiento de cada partícula también lo haga.

Ya que la ecuación (15.32) es una relación vectorial, entonces es posible que una componente de la cantidad de movimiento de un sistema se conserve, sin que el vector de la cantidad de movimiento lo haga.

15.7 Principio de impulso y cantidad de movimiento angular

El principio de impulso-cantidad de movimiento angular se analizó en el apartado 14.7. Aquí se extiende el principio a un sistema de partículas.

a. Cantidad de movimiento angular

Otra vez considere un sistema cerrado de n partículas. Sean m_i la masa y $\mathbf{v}_i$ la velocidad *absoluta* de una i-ésima partícula típica del sistema. Si se recuerda que la cantidad de movimiento angular de una partícula es el momento de su cantidad de movimiento lineal, entonces la cantidad de movimiento angular de la i-ésima partícula respecto a un punto arbitrario A es $(\mathbf{h}_A)_i = \mathbf{r}_i \times (m_i\mathbf{v}_i)$, donde $\mathbf{r}_i$ es el vector de posición de la partícula *relativa* a A, como se muestra en la figura 15.11. La cantidad de movimiento angular del sistema respecto de A se obtiene al sumar las cantidades de movimiento angular de todas las partículas en el sistema respecto de A:

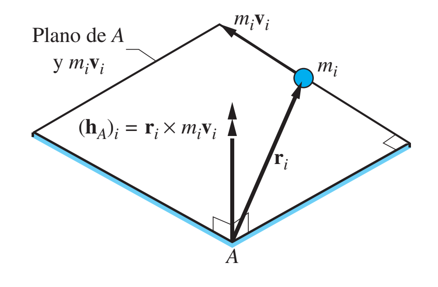


Fig. 15.11

$$\mathbf{h}_A = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{h}_A)_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times (m_i\mathbf{v}_i) \tag{15.33}$$

b. Relación momento-cantidad de movimiento angular

Al derivar la expresión para $\mathbf{h}_A$ en la ecuación (15.33) respecto al tiempo, resulta

$$\dot{\mathbf{h}}_A = \frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times (m_i \mathbf{v}_i)\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times \frac{d(m_i \mathbf{v}_i)}{dt} + \sum_{i=1}^{n} \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \times (m_i \mathbf{v}_i) \qquad \text{(a)}$$

De acuerdo con la relación fuerza-cantidad de movimiento de la ecuación (14.37), $d(m_i\mathbf{v}_i)/dt$ es la fuerza resultante que actúa sobre la i-ésima partícula. Por tanto, la primera suma en el lado derecho de la ecuación (a) representa el momento respecto a A, de todas las fuerzas que actúan sobre las partículas en el sistema. Ya que las fuerzas internas ocurren en pares iguales opuestos y colineales, éstas no contribuyen al momento resultante. Así

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times \frac{d(m_i \mathbf{v}_i)}{dt} = \Sigma \mathbf{M}_A \qquad \text{(b)}$$

donde $\Sigma\mathbf{M}_A$ es el momento resultante respecto de A de las fuerzas que son *externas* al sistema.

La segunda suma en el lado derecho de la ecuación (a) puede simplificarse si se recuerda que $\mathbf{r}_i$ es el vector de posición de la i-ésima partícula relativa al punto A. A esto le sigue que $d\mathbf{r}_i/dt$ es la velocidad de la partícula relativa a A; es decir, $d\mathbf{r}_i/dt = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_A$. Por tanto,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \times (m_i \mathbf{v}_i) = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_A) \times (m_i \mathbf{v}_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{v}_i \times (m_i \mathbf{v}_i) - \mathbf{v}_A \times \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{v}_i \qquad \text{(c)}$$

Observe que $\mathbf{v}_i \times (m_i\mathbf{v}_i) = \mathbf{0}$ (el producto cruz de dos vectores paralelos desaparece). Aún más, de la ecuación (15.13) se tiene que $\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{v}_i = m\bar{\mathbf{v}}$, donde m es la masa total del sistema y $\bar{\mathbf{v}}$ es la velocidad de su centro de masa. Como resultado, la ecuación (c) se convierte en

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \times (m_i \mathbf{v}_i) = -\mathbf{v}_A \times (m\bar{\mathbf{v}}) \qquad \text{(d)}$$

Al sustituir las ecuaciones (b) y (d) en la ecuación (a) y resolver para $\Sigma\mathbf{M}_A$, se obtiene la relación momento-cantidad de movimiento angular

$$\Sigma \mathbf{M}_A = \dot{\mathbf{h}}_A + \mathbf{v}_A \times (m\bar{\mathbf{v}}) \qquad (15.34)$$

Si A está fija en un marco de referencia inercial ($\mathbf{v}_A = \mathbf{0}$) o si A es el centro de masa del sistema ($\mathbf{v}_A = \overline{\mathbf{v}}$), la ecuación (15.34) se simplifica a

$$\Sigma \mathbf{M}_A = \dot{\mathbf{h}}_A \qquad (A\text{: punto fijo o centro de masa}) \tag{15.35}$$

c. *Principio de impulso-cantidad de movimiento angular*

Si se multiplica cada lado de la ecuación (15.35) por dt y se integra de t_1 a t_2, se obtiene

$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma \mathbf{M}_A \, dt = \int_{t_1}^{t_2} d\mathbf{h}_A = (\mathbf{h}_A)_2 - (\mathbf{h}_A)_1$$

donde $(\mathbf{h}_A)_1$ y $(\mathbf{h}_A)_2$ son las cantidades de movimiento angulares respecto de A en los tiempos t_1 y t_2, respectivamente. Reconociendo que el lado izquierdo de esta ecuación es, por definición, el impulso angular de las fuerzas *externas* respecto de A, la ecuación puede escribirse como

$$(\mathbf{A}_A)_{1-2} = (\mathbf{h}_A)_2 - (\mathbf{h}_A)_1 \qquad (A\text{: punto fijo o centro de masa}) \tag{15.36}$$

La ecuación (15.36) se conoce como el *principio de impulso-cantidad de movimiento angular*. Observe que este principio sólo es válido si A es un punto fijo o el centro de masa de un sistema de partículas cerrado.

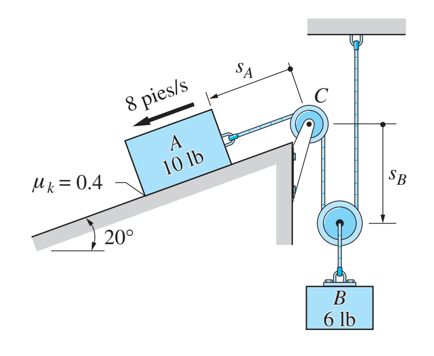
d. *Conservación de la cantidad de movimiento angular*

Si el impulso angular de las fuerzas externas respecto de A es cero, de la ecuación (15.36) resulta que la cantidad de movimiento angular del sistema de partículas respecto de A se conserva. En otras palabras,

$$\text{Si } (\mathbf{A}_A)_{1-2} = \mathbf{0}, \text{ entonces } (\mathbf{h}_A)_1 = (\mathbf{h}_A)_2 \qquad (A\text{: punto fijo o centro de masa}) \tag{15.37}$$

que se conoce como *principio de conservación de la cantidad de movimiento angular*. Observe que la cantidad de movimiento angular respecto a un punto fijo, o respecto al centro de masa, se conserva durante un intervalo de tiempo dado si y sólo si el impulso angular respecto a ese punto es cero en dicho intervalo. Ya que la ecuación (15.37) es vectorial, entonces es posible que la cantidad de movimiento angular se conserve respecto a un eje que pasa por A, aun cuando no se mantenga la cantidad de movimiento angular total respecto al punto A.

Problema de ejemplo 15.8

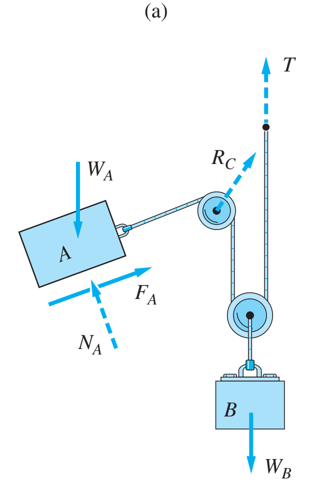


(a)

Los bloques A y B están conectados por un cable que pasa por dos poleas de masa despreciable, como se muestra en la figura (a). El coeficiente cinético de fricción entre el plano inclinado y el bloque A es 0.4. Si la velocidad inicial de A es 8 pies/s hacia abajo del plano, determine el desplazamiento Δs_A del bloque A (medido desde su posición inicial) cuando el sistema llega al reposo.

Solución

Para analizar este problema se utilizará el método de trabajo-energía, porque está adaptado de manera ideal para determinar un desplazamiento que ocurre durante un cambio de rapidez dado. Si se considera el diagrama de cuerpo libre de todo el sistema de la figura (b), se observa que las únicas fuerzas que realizan trabajo son los pesos W_A y W_B de los bloques y la fuerza de fricción F_A bajo el bloque A. Las fuerzas que se han representado con las flechas discontinuas no efectúan trabajo.



(b)

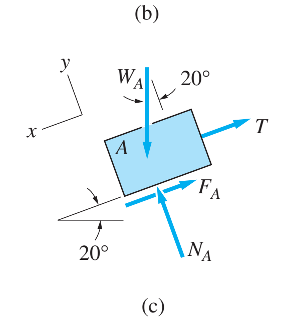


1. Cálculo de la fuerza de fricción

La fuerza de fricción F_A puede establecerse empleando el diagrama de cuerpo libre del bloque A en la figura (c):

$$\Sigma F_y = 0 \quad \nwarrow\!+ \quad N_A - W_A \cos 20^\circ = 0$$

$$F_A = \mu_k N_A = \mu_k W_A \cos 20^\circ = 0.4(10 \cos 20^\circ) = 3.759 \text{ lb} \tag{a}$$



(c)

2. Cinemática

En la figura (a) se observa que la restricción cinemática impuesta por la longitud constante del cable sobre las posiciones de los bloques es

$$s_A + 2s_B = \text{constante}$$

Por tanto, los desplazamientos (Δs_A y Δs_B) y las velocidades de los dos bloques se relacionan con las expresiones

$$\Delta s_A + 2\Delta s_B = 0 \qquad v_A + 2v_B = 0 \tag{b}$$

3. Principio de trabajo-energía

Las posiciones inicial y final (reposo) del sistema se denotarán con 1 y 2, respectivamente. Aplicando el principio de trabajo-energía, ecuación (15.24), al sistema, se obtiene

$$(U_{1-2})_{\text{ext}} + (U_{1-2})_{\text{int}} = T_2 - T_1$$

$$[(W_A \operatorname{sen} 20^\circ)\Delta s_A - F_A \Delta s_A + W_B \Delta s_B] + 0 = 0 - \frac{1}{2}\left[\frac{W_A}{g}(v_A)_1^2 + \frac{W_B}{g}(v_B)_1^2\right] \tag{c}$$

Al sustituir los valores conocidos y utilizar las ecuaciones (b), la ecuación de trabajo-energía queda

$$(10 \operatorname{sen} 20^\circ)\Delta s_A - 3.759\Delta s_A + 6\left(-\frac{\Delta s_A}{2}\right) = -\frac{1}{2}\frac{10}{32.2}(8)^2 - \frac{1}{2}\frac{6}{32.2}\left(-\frac{8}{2}\right)^2$$

La solución para el desplazamiento del bloque A es

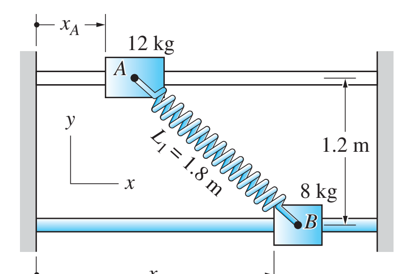
$$\Delta s_A = 3.42 \text{ pies} \qquad \textit{Respuesta}$$

Nota

Este problema podría haberse resuelto utilizando dos ecuaciones de trabajo-energía, una para cada bloque. En ese caso, en cada ecuación aparecería el trabajo realizado por la tensión en el cable. Sin embargo, cuando ambas ecuaciones se sumaran entre sí, se eliminaría el trabajo de la tensión en el cable y se obtendría la ecuación (c).

Problema de ejemplo **15.9**

Los dos collares A y B que se muestran en la figura (a) se deslizan sin fricción sobre las barras que están en el mismo plano vertical y separadas 1.2 m. La rigidez del resorte es $k = 100$ N/m y su longitud libre es $L_0 = 1.2$ m. Si el sistema se libera a partir del reposo en la posición que se muestra en la figura (a), donde el resorte se ha estirado a la longitud $L_1 = 1.8$ m, calcule la rapidez máxima que alcanza cada collar.



(a)

(b)

Solución

Cuando el sistema se libera a partir del reposo en la posición que se muestra en la figura (a), que se llamará posición 1, la tensión en el resorte jala para juntar ambos collares. Debido a que la longitud libre del resorte es idéntica a la distancia entre los rieles, el resorte no se estirará cuando A esté directamente encima de B. En esta posición, que será la 2, ocurre la máxima rapidez de cada collar. Después de pasar por la posición 2, la tensión en el resorte reduce la rapidez de los collares y éstos al final llegan a un alto temporal. Entonces el movimiento se invierte por sí mismo, y el sistema retorna a la posición 1, puesto que el sistema es conservativo.

1. Principio de trabajo-energía

Se analizará el sistema que consiste en los dos collares y el resorte. La figura (b) muestra el diagrama de cuerpo libre de este sistema para una posición arbitraria. Las únicas fuerzas que actúan sobre este sistema son los pesos de los collares, W_A y W_B, y las fuerzas normales, N_A y N_B, que son aportadas por los rieles. La fuerza en el resorte no aparece en el DCL porque es interna.

Del DCL de la figura (b) se observa que $(U_{1-2})_{\text{ext}} = 0$ porque cada fuerza externa es perpendicular a la trayectoria del collar. Por tanto, con el principio de trabajo-energía,* ecuación (15.24), se obtiene

$$(U_{1-2})_{\text{ext}} + (U_{1-2})_{\text{int}} = T_2 - T_1$$
$$0 + (U_{1-2})_{\text{int}} = T_2 - 0$$

donde se ha sustituido $T_1 = 0$ para la energía cinética inicial. Si se usa la ecuación (14.10) para calcular $(U_{1-2})_{\text{int}}$, el trabajo realizado por la fuerza del resorte, y reco-

*Debido a que el sistema es conservativo, también podría haberse empleado el principio de conservación de la energía mecánica, ecuación (15.26).

nocer que la energía cinética del sistema es la suma de la energía cinética de cada collar, esta ecuación toma la forma

$$-\frac{1}{2}k\left(\delta_2^2 - \delta_1^2\right) = \frac{1}{2}m_A\,(v_A)_2^2 + \frac{1}{2}m_B\,(v_B)_2^2$$

Al sustituir los valores numéricos y notar que las deformaciones del resorte son $\delta_1 = L_1 - L_0 = 1.8 - 1.2 = 0.6$ m y $\delta_2 = 0$, se tiene

$$-\frac{1}{2}(100)[0 - (0.6)^2] = \frac{1}{2}(12)(v_A)_2^2 + \frac{1}{2}(8)(v_B)_2^2$$

que se puede simplificar a

$$6(v_A)_2^2 + 4(v_B)_2^2 = 18 \tag{a}$$

2. Principio de impulso-cantidad de movimiento

Si el principio de impulso-cantidad de movimiento se aplica al sistema, entonces se obtiene una segunda ecuación que relaciona las velocidades finales de *A* y *B*. A partir del DCL de la figura (b) se observa que no existen fuerzas externas que actúen sobre el sistema en la dirección *x*. Por tanto, la cantidad de movimiento del sistema se conserva en la dirección *x* (también es cero el cambio de la cantidad de movimiento del sistema en la dirección vertical, que no es de interés aquí). Ya que la cantidad de movimiento en la dirección *x* en la posición 1 es cero, también en la posición 2 debe ser cero. Al calcular la cantidad de movimiento del sistema con la suma de las cantidades de movimiento de ambos collares, se obtiene

$$\xrightarrow{+} \quad (p_x)_2 = m_A(v_A)_2 + m_B(v_B)_2 = 0$$

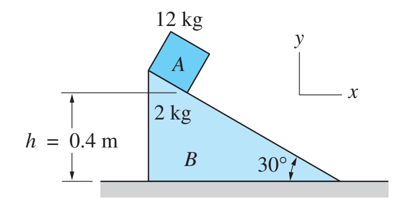
donde se ha supuesto que ambas velocidades apuntan hacia la derecha. Si se sustituyen los valores para las masas, esta ecuación queda

$$12(v_A)_2 + 8(v_B)_2 = 0 \tag{b}$$

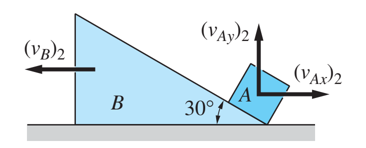
Si se resuelven las ecuaciones (a) y (b) de manera simultánea, se encuentra que las rapideces máximas para los collares son

$$(v_A)_2 = \pm 1.095 \text{ m/s} \quad \text{y} \quad (v_B)_2 = \mp 1.643 \text{ m/s} \qquad \textit{Respuesta}$$

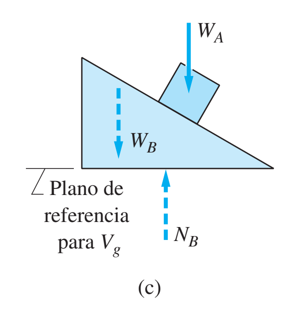
La dualidad de los signos en esas respuestas indica que si el collar *A* se mueve hacia la derecha cuando pasa por la posición 2, entonces el collar *B* se moverá hacia la izquierda, y viceversa.



(a) Posición ①



(b) Posición ②



(c)

Problema de ejemplo **15.10**

En la figura (a) se libera el bloque *A* de 12 kg a partir del reposo en la cima de la cuña *B* de 2 kg (posición 1). Determine las velocidades de *A* y *B* cuando el bloque ha llegado al extremo inferior de la cara inclinada de *B* como se muestra en la figura (b) (posición 2). Desprecie la fricción.

Solución

La solución consiste en los siguientes pasos aplicados al sistema que consta del bloque *A* y la cuña *B*:

Paso 1: Aplicar el principio de conservación de la energía mecánica.
Paso 2: Aplicar el principio de conservación de la cantidad de movimiento lineal en la dirección *x*.
Paso 3: Utilizar la cinemática para relacionar las velocidades de *A* y *B*.
Paso 4: Resolver las ecuaciones que resultan de los pasos 1 al 3.

El orden en que se realicen los pasos del 1 al 3 no es importante. En la figura (b) se muestran las direcciones supuestas para las velocidades de *A* y *B* en la posición 2. En la figura (c) se presenta el diagrama de cuerpo libre del sistema en una posición arbitraria.

Paso 1: Conservación de la energía mecánica

Debido a que la fricción se desprecia, entonces el peso de *A* es la única fuerza que hace trabajo sobre el sistema entre las posiciones 1 y 2. Esto significa que el sistema es conservativo. Al elegir el plano horizontal como referencia para V_g, como se indica en la figura (c), el principio de conservación de la energía mecánica,* ecuación (15.26), da

$$V_1 + T_1 = V_2 + T_2$$

$$m_A g h + 0 = 0 + \frac{1}{2} m_A (v_A)_2^2 + \frac{1}{2} m_B (v_B)_2^2$$

Observe que $T_1 = 0$ y $V_2 = 0$. Al sustituir los valores numéricos, esta ecuación queda

$$12(9.81)(0.4) = \frac{1}{2}(12)(v_A)_2^2 + \frac{1}{2}(2)(v_B)_2^2$$

misma que, después de simplificar, puede escribirse como

$$6(v_A)_2^2 + (v_B)_2^2 = 47.09 \qquad \text{(a)}$$

Paso 2: Conservación de la cantidad de movimiento lineal en la dirección *x*

A partir del diagrama de cuerpo libre de la figura (c) se observa que no existen fuerzas que actúen sobre el sistema en la dirección *x*. Por tanto, se conserva la componente *x* de la cantidad de movimiento del sistema. (La fuerza normal que actúa

*También podría utilizarse el principio de trabajo-energía, ecuación (15.24).

entre A y B tiene una componente x, pero esta fuerza es interna al sistema.) Debido a que la componente x de la cantidad de movimiento del sistema en la posición 1 es cero, la componente x de la cantidad de movimiento del sistema en la posición 2 también es cero. Usando las velocidades que se muestran en la figura (b), se obtiene

$$\xrightarrow{+} \quad (p_x)_2 = m_A(v_{Ax})_2 - m_B(v_B)_2 = 0$$

Al sustituir los valores para m_A y m_B, se encuentra que

$$12(v_{Ax})_2 - 2(v_B)_2 = 0 \qquad \text{(b)}$$

Paso 3: Relación de las velocidades de *A* y *B* utilizando la cinemática

Las velocidades de A y B deben satisfacer la ecuación de velocidad relativa $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_{A/B} + \mathbf{v}_B$. La restricción cinemática es que $\mathbf{v}_{A/B}$ está dirigida a lo largo de la cara inclinada de B. Suponiendo que $\mathbf{v}_{A/B}$ se dirige hacia abajo de la cara inclinada, se tiene

$$\mathbf{v}_{A/B} = {}^{30°}\!\searrow v_{A/B}$$

Cuando se utilizan las velocidades que se muestran en la figura (b), la ecuación de velocidad relativa para la posición 2 queda

$$(\mathbf{v}_A)_2 = (\mathbf{v}_{A/B})_2 + (\mathbf{v}_B)_2$$

$$(v_{Ax})_2\mathbf{i} + (v_{Ay})_2\mathbf{j} = (v_{A/B})_2 \cos 30°\mathbf{i} - (v_{A/B})_2 \operatorname{sen} 30°\mathbf{j} - (v_B)_2\mathbf{i}$$

Al igualar las componentes vectoriales se obtienen dos ecuaciones escalares:

$$(v_{Ax})_2 = (v_{A/B})_2 \cos 30° - (v_B)_2 \qquad \text{(c)}$$

$$(v_{Ay})_2 = -(v_{A/B})_2 \operatorname{sen} 30° \qquad \text{(d)}$$

Paso 4: Solución de las ecuaciones que resultan de los pasos 1, 2 y 3

Una inspección revela que las ecuaciones de la (a) a la (d) representan cuatro ecuaciones que contienen las cuatro incógnitas: $(v_{Ax})_2$, $(v_{Ay})_2$, $(v_B)_2$ y $(v_{A/B})_2$. Al omitir los detalles algebraicos, la solución es

$$(v_{Ax})_2 = 0.580 \text{ m/s} \qquad (v_{Ay})_2 = -2.34 \text{ m/s}$$

$$(v_B)_2 = 3.48 \text{ m/s} \qquad (v_{A/B})_2 = 4.69 \text{ m/s}$$

Respuesta

Debido a que el signo de $(v_{Ay})_2$ es negativo, su dirección es opuesta a la que se muestra en la figura (b).

Por tanto, la rapidez de A en la posición 2 es

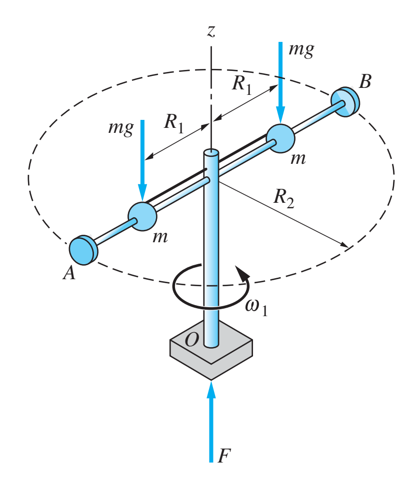
$$(v_A)_2 = \sqrt{(v_{Ax})_2^2 + (v_{Ay})_2^2} = \sqrt{(0.580)^2 + (2.34)^2}$$

$$= 2.41 \text{ m/s}$$

Respuesta

Problema de ejemplo 15.11

El montaje que se muestra en la figura (a) consiste en dos pequeñas pelotas, cada una de masa m, que resbalan sin fricción sobre un marco rígido *AOB* de masa despreciable. El soporte en O permite que el marco rote libremente alrededor del eje z. Al principio el marco rota con velocidad angular ω_1 mientras las cuerdas mantienen las pelotas a una distancia radial R_1. Entonces las cuerdas se cortan de manera simultánea, permitiendo que las pelotas resbalen hacia los topes en A y B, que se localizan a la distancia radial R_2. Determine ω_2, la velocidad angular final del montaje, suponiendo que las pelotas no rebotan después de golpear los topes.



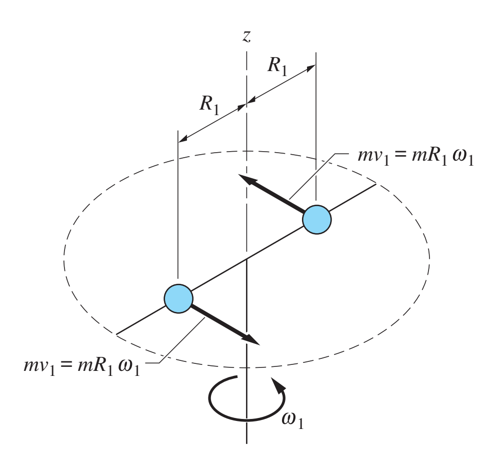
(a) Diagrama de cuerpo libre

Solución

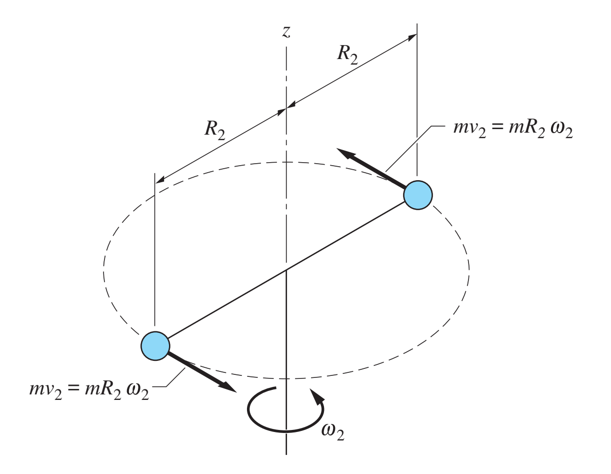
En la figura (a) se muestra el diagrama de cuerpo libre (DCL) del montaje antes de cortar las cuerdas. Las únicas fuerzas externas que actúan sobre el montaje son los pesos mg de las pelotas y la fuerza de soporte vertical F en O. (La simetría excluye otras fuerzas o momentos ejercidos por el soporte en O.) Las que actúan entre las pelotas, la varilla y las fuerzas en las cuerdas, son internas, así que no aparecen en el DCL del sistema.

De la figura (a) se observa que el momento de las fuerzas externas respecto al eje z es cero porque dichas fuerzas son paralelas al eje. Después de que se cortan las cuerdas, este DCL cambiará con el tiempo porque las pelotas se mueven alejándose del eje z. Sin embargo, los pesos siempre son paralelos al eje z, lo que significa que el impulso angular respecto al eje z continúa siendo igual a cero conforme las pelotas se mueven sobre la varilla. Cuando las pelotas golpean los topes, las fuerzas de impacto resultantes son internas al DCL del montaje. En consecuencia, nunca existirá un impulso angular que actúe sobre el montaje respecto al eje z, lo que significa que la cantidad de movimiento angular respecto a ese eje siempre se conserva.

Los diagramas de cantidad de movimiento del montaje en los tiempos t_1 y t_2 se muestran en las figuras (b) y (c), respectivamente, donde t_1 es un tiempo anterior al corte de las cuerdas, y t_2 es uno posterior al momento en que las pelotas quedan en reposo relativo a la varilla. Sólo se indica la cantidad de movimiento lineal de cada pelota ya que la masa del marco es despreciable. Las velocidades de las pelotas están relacionadas con las velocidades angulares por $v_1 = R_1\omega_1$ y $v_2 = R_2\omega_2$.




(b) Diagrama de la cantidad de movimiento en $t = t_1$



(c) Diagrama de la cantidad de movimiento en $t = t_2$

Ya que la cantidad de movimiento angular es igual al momento de la cantidad de movimiento lineal, con la conservación de la cantidad de movimiento angular respecto al eje z se obtiene

$$(h_z)_1 = (h_z)_2$$

$$+ \qquad 2(mR_1\omega_1)R_1 = 2(mR_2\omega_2)R_2$$

de donde se encuentra

$$\omega_2 = (R_1/R_2)^2\omega_1 \qquad \textit{Respuesta}$$

Nota

Acercar o alejar las masas de un eje de rotación es una manera eficaz de controlar la rapidez angular (observe el *cuadrado* de la razón R_1/R_2 en la última respuesta). Los patinadores, por ejemplo, utilizan la posición de sus brazos para modificar su rapidez de giro.

Problemas

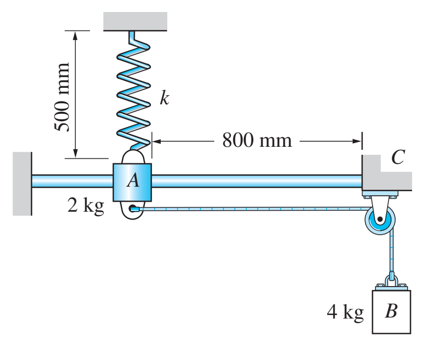


Fig. P15.58

15.58 El collar A deslizante y la masa B están conectados por una cuerda inextensible. El resorte unido a A tiene una rigidez $k = 400$ N/m y su longitud libre es $L_0 = 200$ mm. En la posición que se muestra, la velocidad de A es v_A hacia la derecha. Si A debe llegar al tope C con velocidad cero, determine v_A. Desprecie la fricción.

15.59 En la posición que se indica, el bloque A se mueve hacia la izquierda a 18 pies/s y el resorte no está deformado. Obtenga la rigidez k del resorte que llevaría al sistema al reposo después de que A se ha movido 4 pies. El coeficiente de fricción cinética entre A y la superficie horizontal es 0.3 y se desprecian los pesos de las poleas.

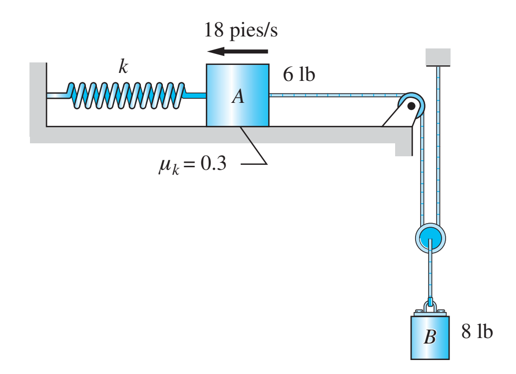


Fig. P15.59

15.60 Los bloques A y B están conectados por una cuerda de longitud de 6.5 m y que pasa por una pequeña polea C. Si el sistema se libera del reposo cuando x_A = 4 m, determine la rapidez de A cuando B llega a la posición que se muestra por las líneas a trazos. Desprecie la fricción.

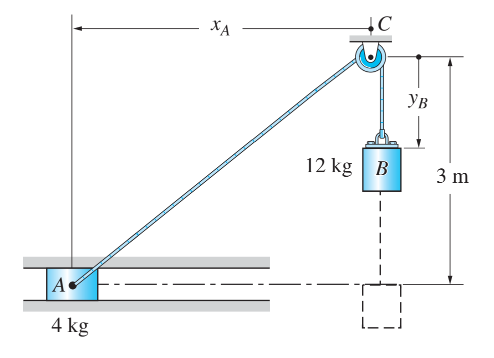


Fig. P15.60

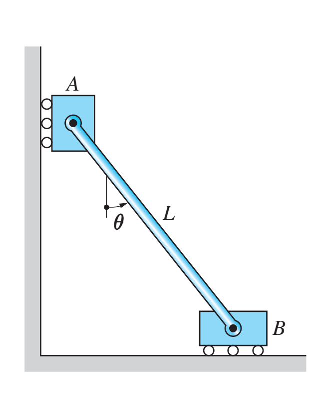


Fig. P15.61

15.61 Las masas idénticas A y B están unidas por una varilla rígida de masa despreciable y longitud L. Utilice el principio de conservación de la energía mecánica para demostrar que la ecuación diferencial que gobierna el movimiento es $\ddot{\theta} = (g/L)$ sen θ.

15.62 Un niño de 40 kg salta del bote de 60 kg hacia el muelle con la velocidad que se muestra. Si el bote estaba en reposo antes de que el niño saltara, ¿con qué velocidad el bote dejará el muelle?

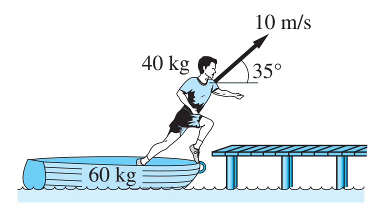


Fig. P15.62

15.63 La partícula A de masa m_A se libera a partir del reposo en la posición que se muestra y resbala con fricción despreciable hacia abajo sobre el canal circular de un cuadrante, de radio R. El cuerpo B de masa m_B que contiene el canal puede deslizarse libremente sobre la superficie horizontal. Obtenga la rapidez de A y B cuando A llega al fondo de la trayectoria.

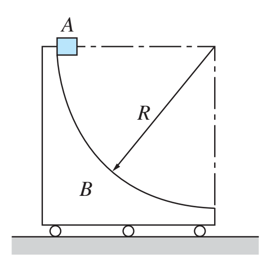


Fig. P15.63

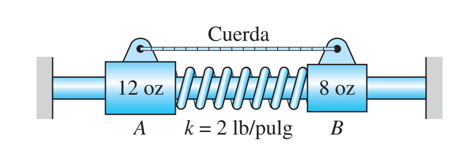


Fig. P15.64

15.64 La fuerza de compresión en el resorte es igual a 1.8 lb cuando el sistema está en reposo en la posición indicada. Si se corta la cuerda, encuentre las velocidades de las masas A y B cuando la fuerza del resorte es cero. Desprecie la fricción.

15.65 El paquete A aterriza sobre la carreta estacionaria B con la velocidad horizontal $v_0 = 2.5$ m/s. El coeficiente de fricción cinética entre A y B es 0.25 y es posible despreciar la resistencia por rodamiento de B. (a) Determine la velocidad de B después de que el deslizamiento de A relativo a B se ha detenido. (b) Encuentre la distancia total que se desliza A relativa a B.

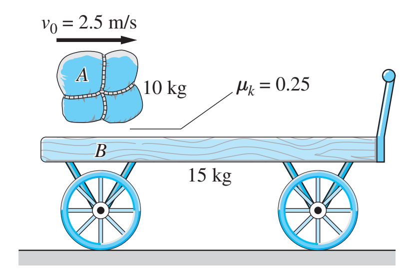


Fig. P15.65

15.66 Los bloques A y B están conectados por un cable que pasa por dos poleas de peso despreciable. Obtenga el tiempo que se requiere para que A alcance una rapidez de 5 pies/s después de que el sistema se ha liberado a partir del reposo. Desprecie la fricción.

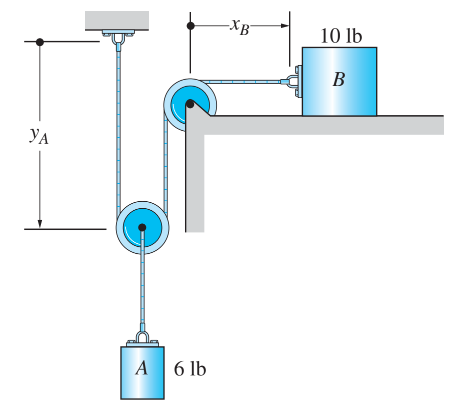


Fig. P15.66

15.67 El sistema parte del reposo con el resorte estirado 100 mm. Encuentre la velocidad del bloque relativa a la carreta en el instante en que el resorte ha retornado a su longitud no estirada.

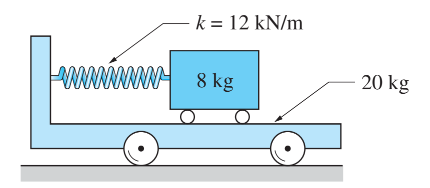


Fig. P15.67

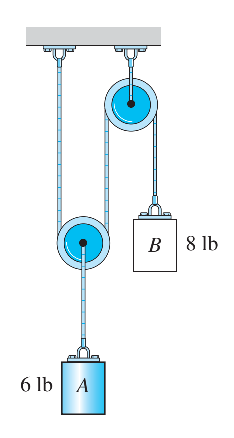


Fig. P15.68

15.68 El sistema consta de los bloques A y B que están unidos por un cable inextensible que pasa por dos poleas. Si el sistema inicia a partir del reposo en $t = 0$, obtenga la velocidad de A en $t = 5$ s. Desprecie los pesos de las poleas.

15.69 El sistema parte del reposo en la posición que se muestra. Despreciando la fricción, encuentre la masa de B que causará que A llegue al extremo izquierdo del soporte de tubería C con velocidad cero. Observe que la rigidez del resorte en el soporte de tubería es 200 N/m.

15.70 El bloque A y la carreta B se encuentran inmóviles cuando se aplica la fuerza P constante = 1.5 lb. Encuentre la rapidez de la carreta cuando el bloque se ha movido 1.8 pies relativo a la carreta. Desprecie la resistencia por rodamiento de la carreta y observe que la superficie entre el bloque y la carreta es rugosa.

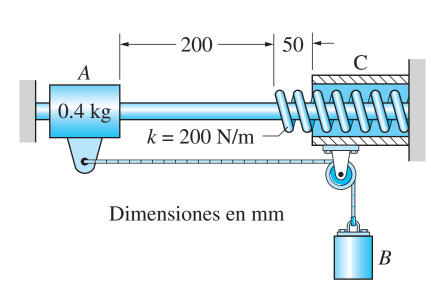


Fig. P15.69

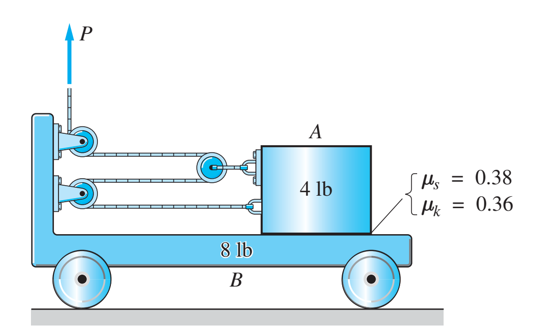


Fig. P15.70

15.71 El sistema se libera a partir del reposo cuando $\theta = 0$. Determine la razón m_A/m_B de las dos masas para la cual el sistema llegará otra vez al reposo cuando $\theta = 60°$. Desprecie la fricción.

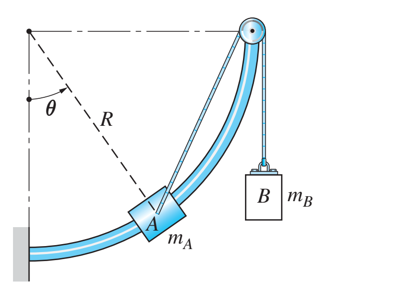


Fig. P15.71

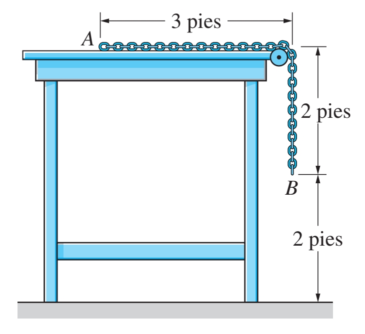


Fig. P15.72

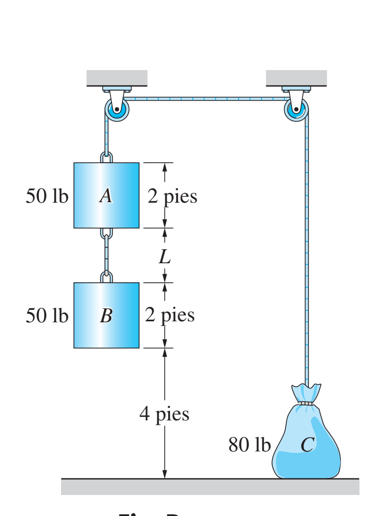


Fig. P15.73

15.72 La cadena AB de 5 pies pesa 15 lb. Si la cadena parte del reposo en la posición que se muestra, calcule la rapidez con la que el extremo B golpea el piso. Desprecie la fricción.

15.73 El sistema se libera a partir del reposo en la posición que se muestra. Determine la distancia L para la cual A llega al reposo justo antes de golpear a B. (*Sugerencia:* primero debe calcularse la rapidez del sistema cuando B golpea el piso. ¿Por qué?)

15.74 Para los dos vagones descritos en el problema 15.55, determine la máxima fuerza de contacto entre las defensas durante el choque. Desprecie la resistencia por rodamiento. (*Sugerencia:* la máxima fuerza ocurre cuando los vagones tienen la misma velocidad.)

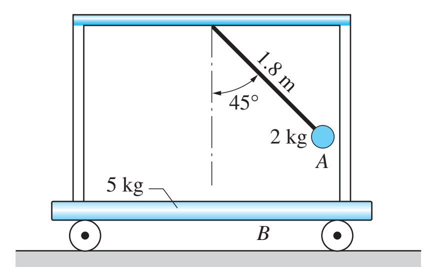


Fig. P15.75

15.75 El sistema está en reposo cuando el péndulo simple inicia su movimiento desde la posición que se muestra. Cuando el péndulo llega por primera vez a la posición vertical, calcule la rapidez absoluta de: (a) la masa A del péndulo y (b) el transporte B. Desprecie la resistencia por rodamiento de este último.

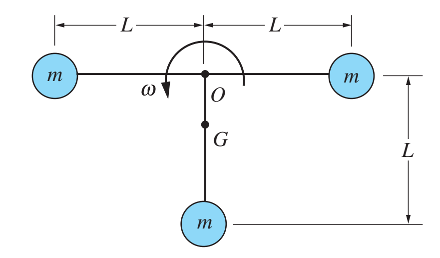


Fig. P15.76

15.76 Las tres masas idénticas están conectadas por medio de varillas rígidas de masa despreciable. El montaje rota respecto al punto O en sentido contrario a las manecillas del reloj con rapidez angular ω. Calcule la cantidad de movimiento angular del montaje respecto a su centro de masa G.

15.77 El sistema consta de tres partículas de 5 kg. En cierto instante, las posiciones y velocidades de las partículas están como se muestra en la figura. Para este instante, calcule la cantidad de movimiento angular del sistema respecto a: (a) el punto O; y (b) el punto A.

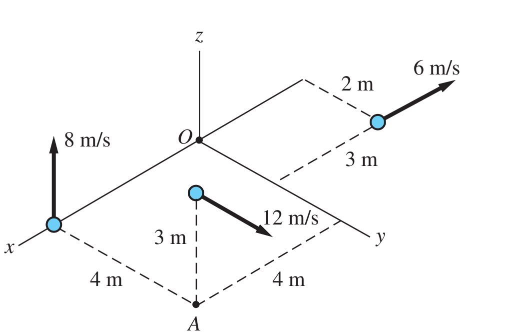


Fig. P15.77

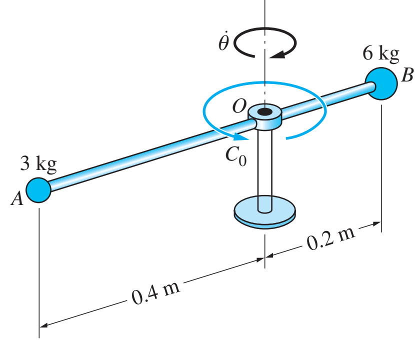


Fig. P15.78

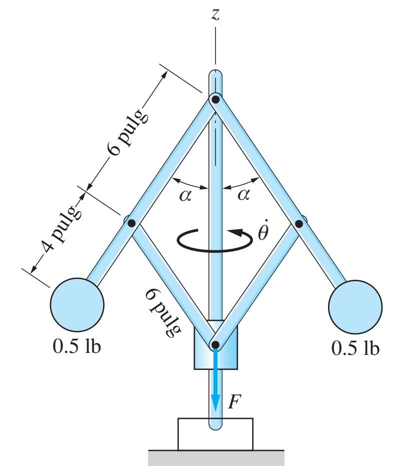


Fig. P15.79

15.78 El montaje rígido, que consiste en las dos masas unidas a una varilla sin masa, rota respecto al eje vertical en O. Al principio, el montaje rota libremente con rapidez angular $\dot{\theta}_0 = 130$ rad/s, cuando se aplica el par constante $C_0 = 6$ N · m que se opone al movimiento. Encuentre: (a) el tiempo requerido para detener el montaje y (b) el número de revoluciones que éste realiza antes de quedar en reposo.

15.79 Un volantín consta de los dos pesos de 0.5 lb y una conexión de apoyo de peso despreciable. La posición de los pesos puede cambiarse al ajustar la magnitud de la fuerza F que actúa sobre el collar deslizante. El montaje completo al principio rota alrededor del eje z a 500 rev/min con los brazos del soporte inclinados en un ángulo $\alpha = 60°$. (a) Calcule la cantidad de movimiento angular inicial del sistema respecto al eje z. (b) Encuentre la rapidez angular del montaje cuando el ángulo α se cambia a 30°. Desprecie la fricción.

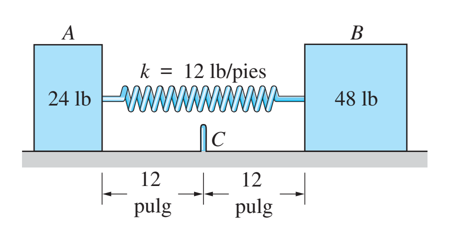


Fig. P15.80

15.80 Los dos bloques se liberan a partir del reposo de manera simultánea en las posiciones que se muestran. La longitud libre del resorte que conecta los bloques es de 6 pulg. Determine cuál bloque es el primero en golpear el tope C y encuentre la rapidez de ese bloque justo antes del impacto. Desprecie la fricción.

15.81 Las partículas *A* y *B*, conectadas por una varilla rígida de masa despreciable, se deslizan sobre el plano horizontal. Cuando el montaje está en la posición que se muestra en la figura (a), la velocidad de cada partícula es v_0 en la dirección que se indica en la figura. Obtenga las velocidades de las partículas después de que el montaje ha rotado 90º hasta la posición que se muestra en la figura (b). Desprecie la fricción.

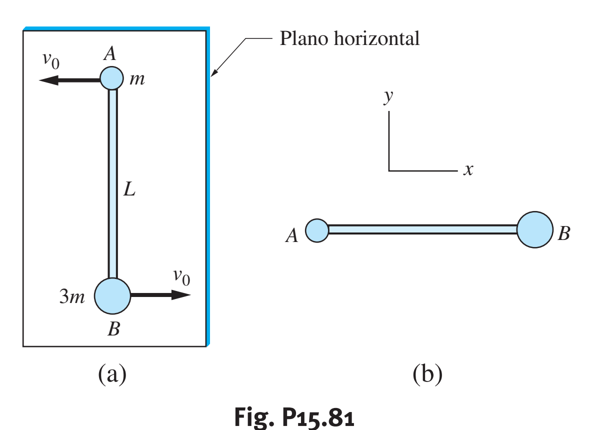


Fig. P15.81

15.82 Si el sistema se libera a partir del reposo en la posición $y_B = 0$, determine la velocidad del peso *B* cuando $y_B = 250$ mm. Desprecie la fricción y las masas de las poleas.

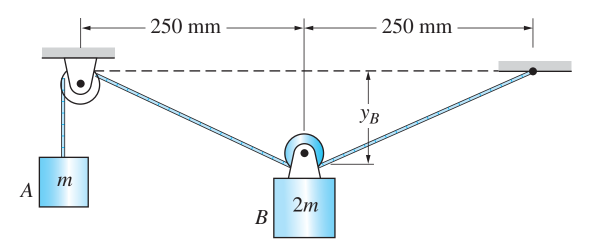


Fig. P15.82

15.83 El sistema consiste en el montacargas eléctrico *A*, el cajón *B* y el contrapeso *C*, todos suspendidos de la polea *D*. El sistema está inmóvil cuando se enciende el

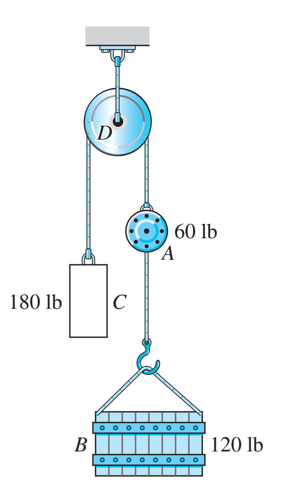


Fig. P15.83

montacargas A, haciendo que se enrolle la cuerda que conecta A y B a razón de 2 pies/s. Determine las velocidades resultantes de A, B y C.

***15.84** El montaje consiste en tres partículas A, B y C (cada una de masa m) que están conectadas a un ligero marco rígido. Inicialmente el montaje rota en sentido contrario a las manecillas del reloj respecto a su centro de masa D con la velocidad angular ω_0. Si de repente se rompe la varilla DC cuando el montaje está en la posición que se muestra en (a), obtenga la velocidad de las masas A y B cuando llegan a la posición que se muestra en (b).

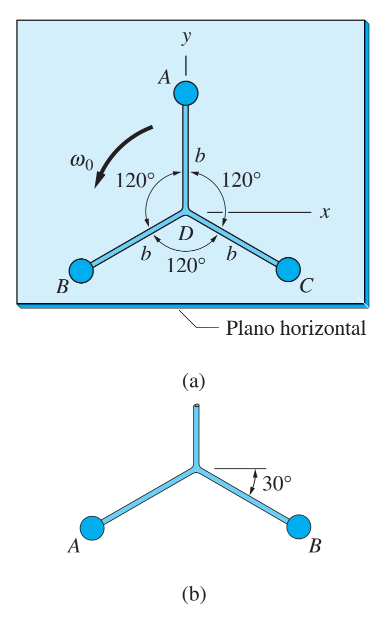


Fig. P15.84

15.85 El montaje que consta de dos masas idénticas y un marco de soporte con masa despreciable, rota libremente alrededor del eje z. La masa A está unida al marco, pero la masa B es libre para deslizarse sobre la barra horizontal. Un resorte ideal de rigidez k y longitud libre R_0 está conectado entre A y B. Determine todas las posibles combinaciones de R y $\dot{\theta}$ para las que B permanece en reposo relativo al marco.

15.86 La masa B del montaje descrito en el problema 15.85 se libera de la posición $R = R_0$ cuando $\dot{\theta} = \dot{\theta}_0$. (a) Encuentre la rapidez de B, relativa al marco, cuando pasa por O. (b) Determine el rango de $\dot{\theta}_0$ para el que B no llegará a O.

15.87 La masa B del montaje descrito en el problema 15.85 se libera en $t = 0$ cuando $R = R_0$ y $\dot{\theta} = \dot{\theta}_0$. (a) Demuestre que las ecuaciones diferenciales de movimiento son

$$\ddot{R} = R\left(\dot{\theta}^2 - \frac{k}{m}\right) \qquad \ddot{\theta} = -\frac{2R\dot{R}\dot{\theta}}{R_0^2 + R^2}$$

y establezca las condiciones iniciales. (b) Resuelva las ecuaciones numéricamente de $t = 0$ a $t = 0.2$ s, usando los siguientes datos: $m = 0.25$ kg, $k = 300$ N/m, $R_0 = 0.4$ m y $\dot{\theta}_0 = 30$ rad/s; trace la gráfica de $\dot{\theta}$ contra R. (c) Utilice la solución numérica para obtener el rango de R y $\dot{\theta}$.

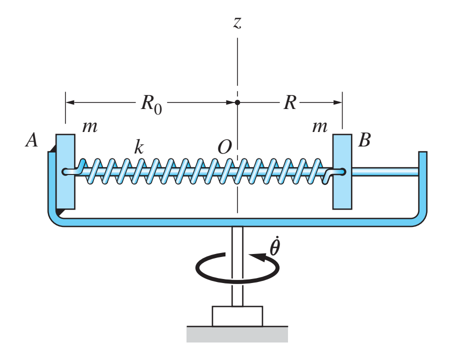
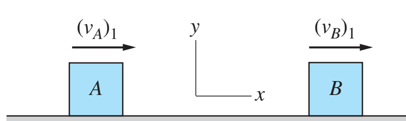
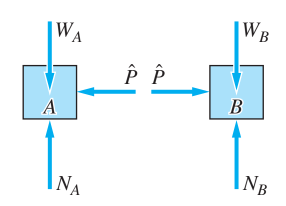


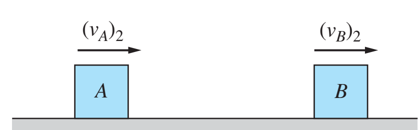
Fig. P15.85-P15.87



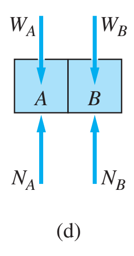
(a) Velocidades antes del impacto: $(v_A)_1 > (v_B)_1$



(b) DCL durante el impacto



(c) Velocidades después del impacto



(d)

Fig. 15.12

15.8 Impacto plástico

Uno de los problemas más complicados en dinámica es el impacto, o colisión, entre los objetos. Debido a que durante un impacto se desconocen las magnitudes de las fuerzas de contacto, no es posible emplear el método de fuerza-masa-aceleración. Aún más, en general durante el impacto se pierde energía mecánica (que puede convertirse en sonido o calor), así el enfoque de trabajo-energía no puede utilizarse directamente. Esto deja al método de impulso-cantidad de movimiento como la única técnica aplicable para el análisis de los problemas de impacto.

Para explicar la naturaleza del impacto es conveniente iniciar con la situación que se expone en la figura 15.12(a), en la que dos bloques A y B se deslizan hacia la derecha sobre un plano horizontal. Antes de que los bloques choquen, sus velocidades son $(v_A)_1$ y $(v_B)_1$, donde $(v_A)_1 > (v_B)_1$. Durante el tiempo que los bloques están en contacto, entre ellos actúan fuerzas dependientes del tiempo, iguales y opuestas. Esas *fuerzas de impacto* o de contacto, causadas por el choque, son iguales a cero antes y después del impacto. Uno de los objetivos del análisis del impacto es determinar las velocidades $(v_A)_2$ y $(v_B)_2$ de los bloques después del mismo, dadas las velocidades iniciales $(v_A)_1$ y $(v_B)_1$.

En la figura 15.12(b) se muestra el diagrama de cuerpo libre de cada bloque durante el impacto. Además de los pesos W_A y W_B y las fuerzas normales N_A y N_B (se desprecia la fricción), los bloques se someten a fuerzas de impacto $\hat{P}$, iguales y opuestas. (Se usará el símbolo ˆ sobre una letra para indicar una fuerza de impacto.) Dibujar los DCL durante el impacto e identificar las fuerzas de impacto son pasos muy importantes en el análisis de estos problemas.

Al sumar las fuerzas en la dirección y para cualquier bloque se obtiene $N_A = W_A$ y $N_B = W_B$ durante el movimiento. Cuando se aplica el principio de impulso-cantidad de movimiento, $(L_{1-2})_x = \Delta p_x$, al bloque A y se emplean las velocidades que se muestran en la figura 15.12(a) y (c), se tiene

$$\xrightarrow{+} \quad -\int_{t_1}^{t_2} \hat{P}\, dt = m_A(v_A)_2 - m_A(v_A)_1 \tag{15.38}$$

donde $t = t_1$ a t_2 es la duración del impacto. De manera similar, para el bloque B resulta

$$\xrightarrow{+} \quad \int_{t_1}^{t_2} \hat{P}\, dt = m_B(v_B)_2 - m_B(v_B)_1 \tag{15.39}$$

Observe que las integrales en las ecuaciones (15.38) y (15.39) representan los impulsos de la fuerza de impacto $\hat{P}$.

De modo alternativo podría analizarse el sistema que contiene ambos bloques, cuyo DCL se muestra en la figura 15.12(d). Debido a que el impulso externo que actúa sobre el sistema durante el impacto es cero (la fuerza de impacto $\hat{P}$ es interna al sistema y los impulsos de las fuerzas normales cancelan los impulsos de los pesos), el vector cantidad de movimiento del sistema se conserva. El balance de la cantidad de movimiento en la dirección x para el sistema conduce a $(p_1)_x = (p_2)_x$; es decir,

$$\xrightarrow{+} \quad m_A(v_A)_1 + m_B(v_B)_1 = m_A(v_A)_2 + m_B(v_B)_2 \tag{15.40}$$

Observe que la ecuación (15.40) también puede obtenerse sumando las ecuaciones (15.38) y (15.39).

Suponiendo que las velocidades iniciales se conocen, se ve que la ecuación (15.40) contiene dos velocidades desconocidas: $(v_A)_2$ y $(v_B)_2$. Para completar el aná-

lisis, se necesita otra ecuación que tome en cuenta las características de la deformación de los cuerpos que se impactan* (de manera obvia, la colisión de los bloques de acero difiere del impacto de los de caucho). Por el momento, sólo se considerará el caso especial del *impacto plástico*, donde las velocidades de los dos bloques son iguales justo después del impacto.

Así, para el impacto plástico se tiene la ecuación adicional

$$(v_A)_2 = (v_B)_2 \tag{15.41}$$

que, combinada con la ecuación (15.40), proporciona la solución para $(v_A)_2$ y $(v_B)_2$. Una vez que se han determinado las velocidades finales, es posible emplear la ecuación (15.38) o la (15.39) para calcular el impulso de la fuerza de impacto $\hat{P}$ que actúa entre los bloques.

Para ilustrar el análisis del impacto plástico, considere las gráficas de $\hat{P}$, v_A y v_B, que se muestran en la figura 15.13. La magnitud de la fuerza de impacto $\hat{P}$ es cero excepto para el intervalo de impacto $\Delta t = t_2 - t_1$. Se supone que las velocidades iniciales $(v_A)_1$ y $(v_B)_1$ ya se han dado y se sabe que $(v_A)_2 = (v_B)_2$. Las gráficas de $\hat{P}$ y las velocidades durante el periodo de contacto se muestran con las líneas discontinuas de la figura 15.13 para enfatizar que esas funciones son desconocidas. Sin embargo, se puede calcular el área bajo el diagrama $\hat{P}$ contra t, ya que ésta representa el impulso entre los bloques.

Observe que el análisis que se presenta aquí sólo se ocupa de las velocidades inmediatamente antes y después del impacto y, el impulso de las fuerzas de impacto. No se trata con las variaciones de las velocidades y las fuerzas de impacto que ocurren durante éste.

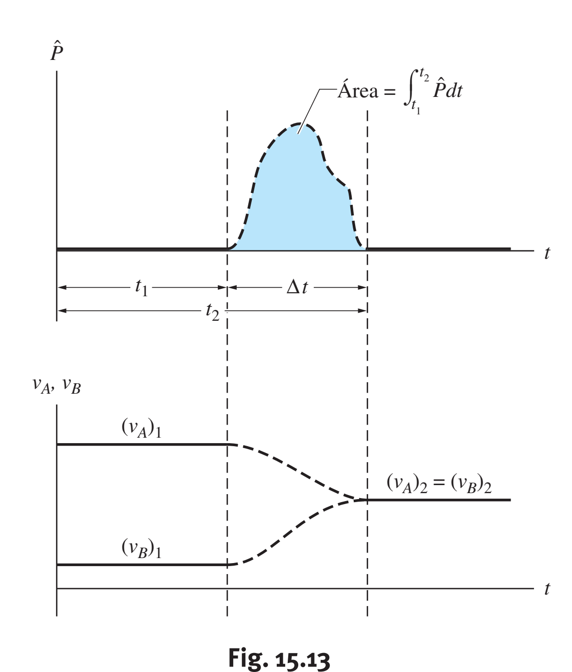


Fig. 15.13

*Observe que ésta es una de las pocas situaciones que se han encontrado para las que se debe abandonar el modelo de cuerpo rígido. No existe un análisis que sea válido para el impacto de dos objetos "rígidos".

También observe que la duración del impacto, Δt en la figura 15.13, no tiene que ser conocida ya que no entra en el análisis. Sin embargo, existe una clase de problemas de impacto que requiere la suposición de que la duración del impacto sea muy pequeña. En el siguiente apartado se analizan esos problemas.

15.9 *Movimiento impulsivo*

El análisis que se presentó en el apartado anterior es independiente de la duración del impacto Δt. Sin embargo, existen muchos problemas de este tipo que pueden resolverse sólo si Δt es tan pequeña que sea posible despreciar los desplazamientos de los cuerpos durante el periodo de impacto. Cualquier movimiento que satisface esta condición es un *movimiento impulsivo*. Por supuesto, los resultados obtenidos cuando se supone que el movimiento es impulsivo sólo son aproximaciones. El análisis sólo es exacto en el caso idealizado en que $\Delta t \to 0$.

Reconsidere el impacto plástico de los dos bloques que se indican en la figura 15.12 con la idealización $\Delta t \to 0$. La figura 15.13, que muestra una duración finita de impacto, se reemplaza por la 15.14. Observe que el intervalo de impacto Δt en la figura 15.13 se ha convertido en el periodo infinitesimal dt en la figura 15.14.

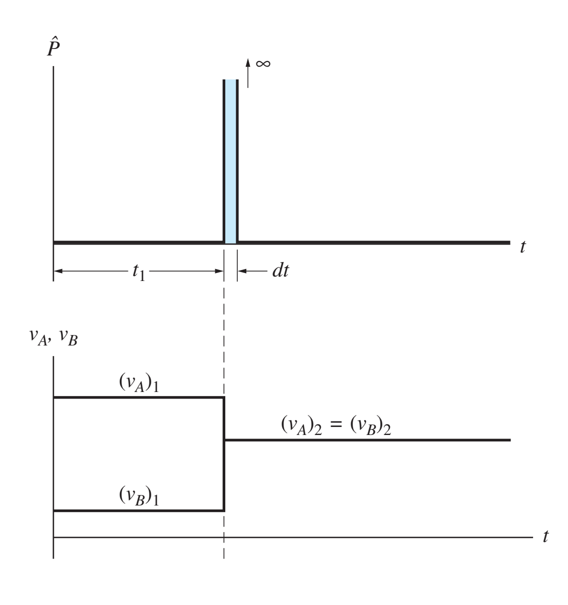


Fig. 15.14

Un análisis de la figura 15.14 permite concluir lo siguiente:

1. **Las magnitudes de las fuerzas de impacto son infinitas.** El impulso de la fuerza de impacto $\hat{P}$ es finito, porque se calcula con las ecuaciones de impulso-cantidad de movimiento, (15.38) y (15.39). Pero como $\hat{P}$ actúa sobre el intervalo de tiempo infinitesimal dt, entonces la magnitud de $\hat{P}$ debe hacerse infinita para que su impulso permanezca finito. Una fuerza de magnitud infinita que actúa so-

bre un intervalo de tiempo infinitesimal y ejerce un impulso finito (el área bajo la curva fuerza contra tiempo), se conoce como una *fuerza impulsiva*.*

2. **Los impulsos de fuerzas finitas son despreciables.** Si la magnitud de una fuerza es finita, su impulso durante el periodo de impacto es despreciable. Por ejemplo, el peso W de una partícula es un caso de una fuerza finita o no impulsiva. Durante el intervalo de tiempo Δt, el impulso de W, es decir, $W\Delta t$, se aproxima a cero cuando $\Delta t \to 0$.
3. **Las aceleraciones de los bloques son infinitas durante el impacto.** Se supone que los cambios en las velocidades ocurren en un periodo infinitesimal, entonces los diagramas v contra t muestran discontinuidades (saltos) en el tiempo de impacto, como se muestra en la figura 15.14. Como $a = dv/dt$, resulta que los "saltos" corresponden a las aceleraciones infinitas.
4. **Los bloques están en la misma ubicación antes y después del impacto.** Ya que $\Delta t \to 0$, entonces las distancias recorridas por los bloques durante el impacto son infinitesimales (las velocidades son finitas).

A continuación se enlistan los cuatro pasos en el análisis de los problemas de impacto. Éstos se aplican al movimiento tanto impulsivo como no impulsivo.

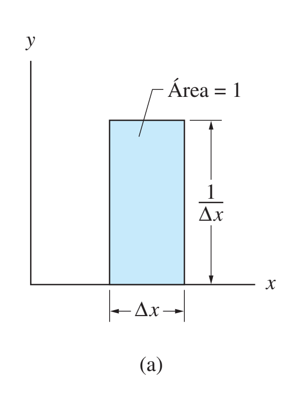
Paso 1: Dibujar los DCL de las partículas que se impactan. Debe prestarse atención a la identificación de las fuerzas de impacto; utilice un símbolo especial, como un signo de intercalación, para etiquetar cada una de las fuerzas de impacto.

Paso 2: Trazar los diagramas de cantidad de movimiento para las partículas en el instante inmediatamente anterior al impacto. (Recuerde que el diagrama de cantidad de movimiento de una partícula es un esquema de ésta que muestra su vector cantidad de movimiento.)

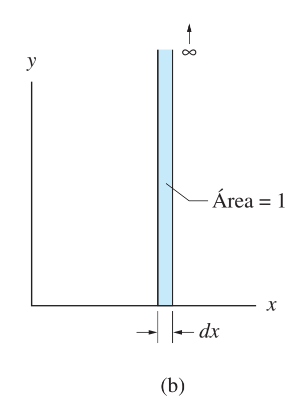
Paso 3: Trazar los diagramas de la cantidad de movimiento para las partículas en el instante inmediatamente posterior al impacto.

Paso 4: Utilizar los diagramas de los pasos del 1 al 3 para deducir y resolver las ecuaciones de impulso-cantidad de movimiento apropiadas.

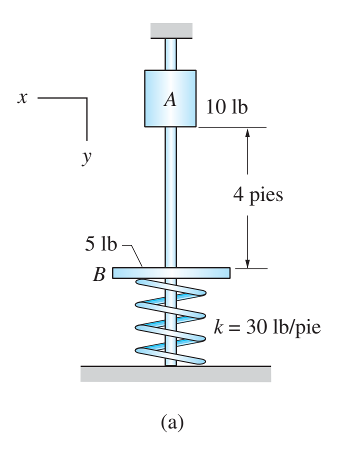
*Una fuerza impulsiva es un ejemplo de una función delta de Dirac o un *pico*. A manera de ilustración, considere el rectángulo de ancho Δx y altura $1/\Delta x$, que se muestra en (a). El área de este rectángulo es 1, independiente del valor de Δx. Si el ancho Δx se convierte en dx infinitesimal, la altura se aproxima a infinito, pero el área continúa siendo igual a 1. El resultado de este procedimiento limitante es la función delta que se muestra en (b).



(a)



(b)



(a)

Problema de ejemplo **15.12**

El deslizador A y la placa B de la figura (a) se deslizan con fricción despreciable sobre la varilla guía vertical. La placa descansa sobre un resorte con rigidez k = 30 lb/pie cuando el deslizador se libera en la posición que se muestra. El impacto resultante entre A y B es plástico y la duración del impacto es despreciable. Determine: 1. las velocidades de A y B inmediatamente después del impacto; 2. el porcentaje de energía mecánica perdida durante el impacto; 3. el impulso de la fuerza de contacto durante el impacto y 4. la máxima desviación de B después del impacto.

Solución

Existen cuatro posiciones del sistema que son relevantes en el análisis:

Posición 1 La posición inicial.
Posición 2 La posición inmediatamente anterior al impacto.
Posición 3 La posición inmediatamente posterior al impacto.
Posición 4 La posición de máxima desviación de la placa B.

La duración del impacto es infinitesimal, entonces el deslizador A y la placa B están esencialmente en las mismas ubicaciones en las posiciones 2 y 3.

Parte 1

Movimiento de 1 a 2 La rapidez del deslizador A, justo antes del impacto, puede determinarse al aplicar el principio de trabajo y energía cinética al deslizador A entre las posiciones 1 y 2:

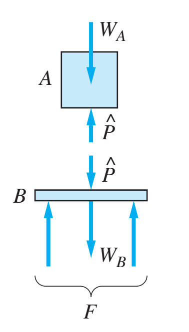
$$U_{1-2} = T_2 - T_1$$

$$W_A \Delta y_A = \frac{1}{2} m_A (v_A)_2^2 - 0$$

$$10(4) = \frac{1}{2}\frac{10}{32.2}(v_A)_2^2$$

de donde $(v_A)_2 = 16.050$ pies/s.

Movimiento de 2 a 3 Las velocidades de A y B, justo después del impacto, pueden encontrarse a partir del principio de impulso-cantidad de movimiento entre las posiciones 2 y 3. Debido a que la duración del impacto es despreciable, el movimiento durante el impacto puede clasificarse como *impulsivo*. En los diagramas de cuerpo libre de la figura (b) se muestran las fuerzas que actúan sobre A y B durante el impacto. Los pesos W_A y W_B son fuerzas que tienen magnitudes finitas y también la fuerza F del resorte (ya que $F = k\delta$, F es finita si la deformación δ del resorte permanece finita). La fuerza de contacto $\hat{P}$ entre A y B es impulsiva; es decir, su magnitud es (teóricamente) infinita.

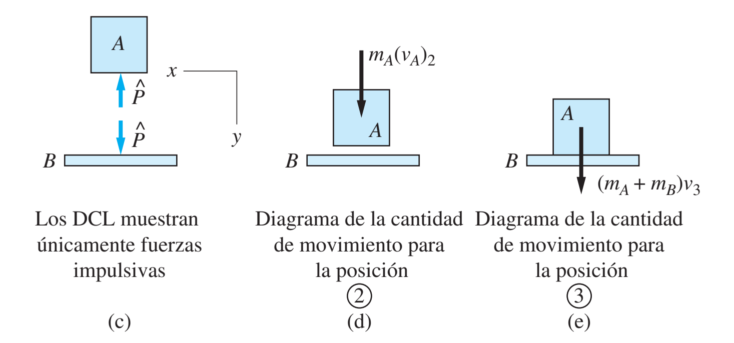


DCL durante el impacto

(b)

Debido a que el análisis de movimiento impulsivo desprecia las contribuciones de fuerzas finitas, entonces es conveniente reestructurar los diagramas de cuerpo libre mostrando sólo las fuerzas impulsivas, como en la figura (c). Los diagramas de la cantidad de movimiento para las posiciones 2 y 3 se muestran en las figuras (d) y (e), respectivamente. Observe que después del impacto *plástico* las dos masas tienen la misma velocidad; en otras palabras $(v_A)_3 = (v_B)_3 = v_3$.

En la figura (c) se observa que el impulso neto que actúa sobre el *sistema* que consiste en A y B es cero porque los impulsos de $\hat{P}$ sobre A y B se cancelan entre sí.



Los DCL muestran únicamente fuerzas impulsivas

(c)

Diagrama de la cantidad de movimiento para la posición ②

(d)

Diagrama de la cantidad de movimiento para la posición ③

(e)

Así se conserva la cantidad de movimiento del sistema en la dirección y:

$$(p_y)_2 = (p_y)_3$$

$$+\downarrow \quad m_A(v_A)_2 = (m_A + m_B)v_3$$

$$\frac{10}{32.2}(16.050) = \frac{10+5}{32.2}v_3$$

entonces la velocidad inmediatamente después del impacto es

$$v_3 = 10.700 \text{ pies/s}$$ *Respuesta*

Parte 2

El cambio en la energía cinética durante el impacto es

$$\Delta T = T_3 - T_2$$

$$= \frac{1}{2}(m_A + m_B)v_3^2 - \frac{1}{2}m_A(v_A)_2^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{10+5}{32.2}\right)(10.700)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{10}{32.2}\right)(16.050)^2$$

$$= 26.67 - 40.00 = -13.33 \text{ lb} \cdot \text{pie}$$

El porcentaje de energía perdida durante el impacto es

$$\% \text{ pérdida} = -\frac{\Delta T}{T_2} \times 100\% = \frac{13.33}{40.00} \times 100\% = 33.3\%$$ *Respuesta*

Parte 3

El impulso de $\hat{P}$ se encuentra al aplicar la ecuación de impulso-cantidad de movimiento a A o B. Si se elige A, de las figuras de (c) a (e) se obtiene

$$(L_{2-3})_y = (p_y)_3 - (p_y)_2$$

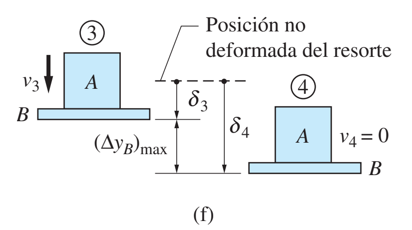
$$+\downarrow \quad -\int_{t_2}^{t_3} \hat{P}\,dt = m_A[v_3 - (v_A)_2]$$

$$= \frac{10}{32.2}(10.700 - 16.050)$$

lo que conduce a

$$\int_{t_2}^{t_3} \hat{P}\, dt = 1.661 \text{ lb} \cdot \text{s} \qquad \textit{Respuesta}$$

La aplicación de la ecuación de impulso-cantidad de movimiento a B daría, por supuesto, el mismo resultado. Observe que sólo se ha determinado el *impulso* de $\hat{P}$ durante el impacto; $\hat{P}$ por sí misma queda indeterminada.



(f)

Parte 4

Movimiento de 3 a 4 Como hemos visto en la figura (f), el máximo desplazamiento de la placa B es $(\Delta y_B)_{max} = \delta_4 - \delta_3$, donde δ_3 y δ_4 son las deformaciones del resorte en las posiciones 3 y 4, respectivamente. Observe que δ_3 es la deformación inicial del resorte causada por el peso de B, así $\delta_3 = W_B/k = 5/30 = 1/6$ pies. Respecto a la figura (f), el principio de trabajo-energía entre las posiciones 3 y 4 da

$$U_{3-4} = T_4 - T_3$$

$$(W_A + W_B)(\delta_4 - \delta_3) - \frac{1}{2}k\left(\delta_4^2 - \delta_3^2\right) = 0 - \frac{1}{2}(m_A + m_B)v_3^2$$

$$(10 + 5)\left(\delta_4 - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{2}(30)\left[\delta_4^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^2\right] = -\frac{1}{2}\left(\frac{10+5}{32.2}\right)(10.700)^2$$

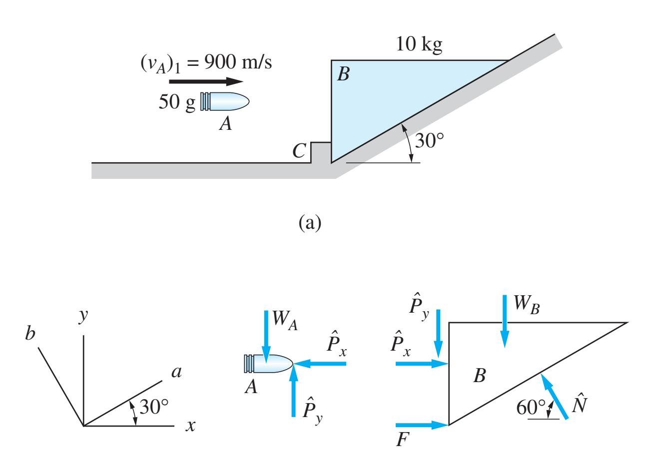
La raíz positiva de esta ecuación es $\delta_4 = 1.874$ pies. Por tanto, la máxima deflexión de la placa B es

$$(\Delta y_B)_{max} = \delta_4 - \delta_3 = 1.874 - \frac{1}{6} = 1.707 \text{ pies} \qquad \textit{Respuesta}$$

Precaución Un error común consiste en aplicar la ecuación de trabajo-energía entre las posiciones 1 y 4: $U_{1-4} = T_4 - T_1$. El principio de trabajo-energía (o el principio de conservación de la energía mecánica) no toma en cuenta la pérdida de energía cinética durante un impacto, así que sólo puede emplearse entre las posiciones que no impliquen impactos.

Problema de ejemplo **15.13**

La cuña B de 10 kg que se muestra en la figura (a) se mantiene en reposo por medio del tope en C cuando la bala A de 50 g, que viaja horizontalmente con la rapidez $(v_A)_1 = 900$ m/s, la golpea. La duración del impacto es despreciable. Suponiendo que todos los impactos son plásticos y despreciando la fricción, calcule: 1. la velocidad con la que la cuña empieza a subir por el plano inclinado; y 2. el impulso de cada fuerza impulsiva.



(a)

(b) Diagramas de cuerpo libre durante el impacto

Solución

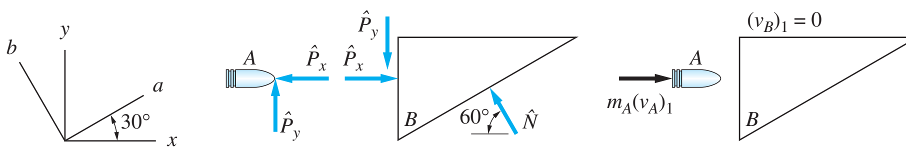
Análisis preliminar

Las dos posiciones de interés son:

Posición 1 La posición inmediatamente anterior al impacto.
Posición 2 La posición inmediatamente posterior al impacto.

Como la duración del impacto es despreciable, el movimiento es *impulsivo*, con la bala y la cuña ocupando la misma posición antes y después del impacto. Observe que en realidad existen dos impactos en este problema: entre A y B, y entre B y el plano inclinado. La suposición de los impactos plásticos es equivalente a establecer que: (a) la bala queda incrustada en el bloque y (b) la cuña permanece en contacto con el plano inclinado.

La figura (b) muestra los diagramas de cuerpo libre de A y B durante el impacto. También muestra los ejes xy y ab que se utilizarán en el análisis. Las fuerzas que aparecen en esos DCL son W_A y W_B, los pesos de A y B; F, la fuerza en C que impide a B deslizarse hacia abajo sobre el plano inclinado; $\hat{P}_x$ y $\hat{P}_y$, las componentes de la fuerza de impacto $\hat{\mathbf{P}}$ que actúan entre A y B (por la tercera ley de Newton, esas componentes ocurren en pares iguales y opuestos); y $\hat{N}$, la fuerza de impacto normal que el plano inclinado ejerce sobre B. Las fuerzas de impacto $\hat{\mathbf{P}}$ y $\hat{N}$ son las únicas impulsivas.



(c) DCL
(sólo fuerzas impulsivas)

(d) Diagrama de la cantidad de movimiento antes del impacto

(e) Diagrama de la cantidad de movimiento después del impacto

En la figura (c) se muestran los DCL que indican sólo las fuerzas impulsivas. En las figuras (d) y (e) se presentan los diagramas de la cantidad de movimiento que muestran las cantidades de movimiento de A y B inmediatamente antes y después del impacto. En la figura (e) se observa que la dirección de v_2, la velocidad común de A y B después del impacto está dirigida hacia arriba sobre el plano inclinado.

Al examinar las figuras de la (c) a la (e) se nota que hay un total de cuatro incógnitas: el impulso de $\hat{P}_x$, el impulso de $\hat{P}_y$, el impulso de $\hat{N}$ y la velocidad final v_2. La igualación de los vectores impulso con el cambio en los vectores cantidad de movimiento para A y B de manera individual conducirá a cuatro ecuaciones escalares que pueden resolverse para las cuatro incógnitas. Sin embargo, se obtiene una solución más eficiente si al principio se considera que el sistema consiste en A y B.

Parte 1

De los DCL de la figura (c) se nota que $\hat{N}$ es la única fuerza impulsiva que ejerce un impulso externo sobre el sistema que consta de A y B ($\hat{\mathbf{P}}$ es una fuerza interna). Como $\hat{N}$ actúa en la dirección b, entonces se conserva la cantidad de movimiento del sistema en la dirección a. Respecto a las figuras (d) y (e), se tiene

$$(p_a)_1 = (p_a)_2$$

$$+\nearrow \quad m_A(v_A)_1 \cos 30° = (m_A + m_B)v_2$$

$$0.050(900) \cos 30° = (0.050 + 10)v_2$$

de donde es posible conocer la velocidad común de A y B inmediatamente después del impacto:

$$v_2 = 3.88 \text{ m/s}$$ *Respuesta*

Parte 2

El impulso de $\hat{N}$ puede encontrarse al considerar el cambio en la componente b de la cantidad de movimiento del sistema. La cantidad de movimiento del sistema en la dirección b antes del impacto sólo se debe a la componente b de $m_A(\mathbf{v}_A)_1$; después del impacto, el sistema no tiene cantidad de movimiento en la dirección b. Por tanto, la componente b de la ecuación vectorial $\mathbf{L}_{1-2} = \Delta\mathbf{p}$ es

$$+\nwarrow \quad \int_{t_1}^{t_2} \hat{N}\, dt = (p_b)_2 - (p_b)_1$$

$$= 0 - [-m_A(v_A)_1 \operatorname{sen} 30°] = 0.050(900) \operatorname{sen} 30°$$

$$= 22.5 \text{ N} \cdot \text{s}$$ *Respuesta*

Los impulsos de $\hat{P}_x$ y $\hat{P}_y$ pueden calcularse al resolver las dos ecuaciones escalares de impulso-cantidad de movimiento para la bala A únicamente. Respecto a las figuras de la (c) a la (e), la componente x de la ecuación de impulso-cantidad de movimiento para A es

$$(L_{1-2})_x = (p_x)_2 - (p_x)_1$$

$$\xrightarrow{+} \qquad -\int_{t_1}^{t_2} \hat{P}_x \, dt = m_A v_2 \cos 30° - m_A (v_A)_1$$

$$= 0.050(3.88) \cos 30° - 0.050(900)$$

a partir de la cual

$$\int_{t_1}^{t_2} \hat{P}_x \, dt = 44.8 \text{ N} \cdot \text{s}$$ *Respuesta*

De manera similar, la componente y de la ecuación de impulso-cantidad de movimiento para la bala A da

$$(L_{1-2})_y = (p_y)_2 - (p_y)_1$$

$$+\uparrow \qquad \int_{t_1}^{t_2} \hat{P}_y \, dt = m_A v_2 \operatorname{sen} 30° - 0$$

$$= 0.050(3.88) \operatorname{sen} 30°$$

$$= 0.0970 \text{ N} \cdot \text{s}$$ *Respuesta*

Es posible verificar las soluciones al considerar la ecuación de impulso-cantidad de movimiento para la cuña B únicamente. Por ejemplo, en las figuras (d) y (e) se observa que la componente b de la cantidad de movimiento de B es cero, antes y después del impacto. Por tanto, al usar la figura (c) para obtener la componente b del impulso que actúa sobre B, resulta

$$(L_{1-2})_b = (p_b)_2 - (p_b)_1 = 0 - 0$$

$$\overset{+}{\nwarrow} \qquad \int_{t_1}^{t_2} \hat{N} \, dt - \int_{t_1}^{t_2} \hat{P}_x \, dt \operatorname{sen} 30° - \int_{t_1}^{t_2} \hat{P}_y \, dt \cos 30° = 0$$

El hecho de que las respuestas de los impulsos satisfagan esta ecuación comprueba la solución.

Problemas

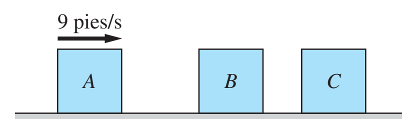


Fig. P15.88

15.88 Los tres bloques idénticos de 2.5 lb se deslizan sobre una superficie horizontal con fricción despreciable. Al principio *A* se mueve hacia la derecha a 9 pies/s mientras que *B* y *C* están en reposo. Suponiendo que todas las colisiones son plásticas, determine las velocidades de los bloques después de: (a) la primera colisión y (b) la segunda.

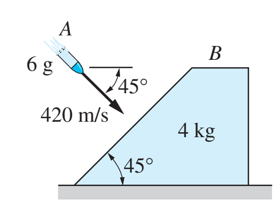


Fig. P15.89

15.89 La bala *A* de 6 g que viaja a 420 m/s golpea la cara inclinada del bloque *B* inmóvil. Si se supone que todos los impactos son plásticos y se desprecia la fricción, ¿cuál será la rapidez de *B* inmediatamente después de que la bala lo golpea?

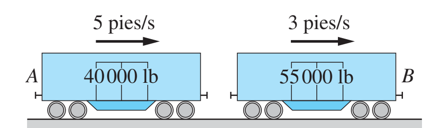


Fig. P15.90

15.90 Los vagones *A* y *B* se desplazan con la rapidez que se muestra. Después de que *A* colisiona con *B*, ambos quedan acoplados. Obtenga la rapidez final de los vagones y el porcentaje de energía cinética perdida durante el proceso de acoplamiento.

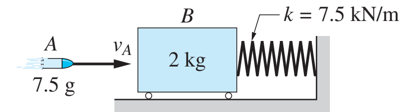


Fig. P15.91

15.91 El bloque *B* de 2 kg al principio está en reposo sobre el plano horizontal. Después de que la bala *A* de 7.5 g se dispara contra el bloque, se observa que la máxima compresión en el resorte es de 49 mm. Establezca la velocidad inicial v_A de la bala, suponiendo que ésta queda incrustada en el bloque.

15.92 El paquete *A* de 8 lb se libera a partir del reposo en la posición que se indica y se desliza hacia abajo sin fricción sobre la rampa hasta el tope *B* de 18 lb. El paquete y el tope quedan en reposo después de recorrer una distancia *d* sobre el piso. Si el coeficiente de fricción cinética entre el tope y el piso es 0.2, determine la distancia *d*.

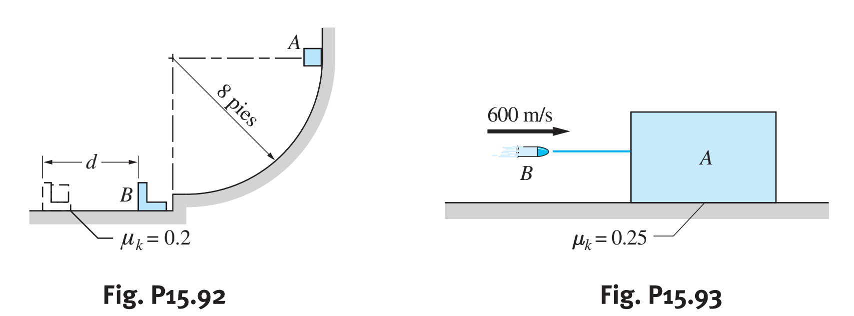


Fig. P15.92

Fig. P15.93

15.93 La bala *B* de 20 g golpea el bloque *A* inmóvil de 10 kg con una velocidad horizontal de 600 m/s. El coeficiente cinético de fricción entre el bloque y la superficie horizontal es 0.25. Obtenga: (a) la distancia total recorrida por el bloque después del impacto y (b) el porcentaje de energía mecánica perdida durante el impacto. Suponga que la bala queda incrustada en el bloque.

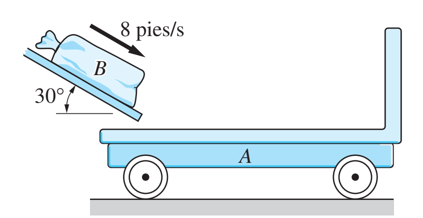


Fig. P15.94

15.94 El costal *B* de 60 lb se desliza por una rampa para caer sobre la carreta *A* estacionaria de 220 lb con una velocidad de 8 pies/s dirigida como se muestra. Despreciando la resistencia por rodamiento de la carreta, determine: (a) la rapidez de ésta después de que el costal queda en reposo sobre ella, y (b) el porcentaje de energía mecánica perdida durante el impacto.

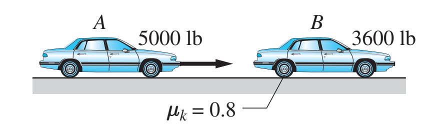


Fig. P15.95

15.95 El automóvil *B* de 3600 lb se encuentra estacionado con el freno aplicado cuando el automóvil *A* de 5000 lb lo impacta en su parte posterior. Después del impacto, los vehículos quedan enganchados y se deslizan 22 pies antes de detenerse. El coeficiente de fricción cinética entre la carretera y los neumáticos de *B* es 0.8.

¿A qué rapidez viajaba A inmediatamente antes del impacto? Suponga que los frenos de éste no se aplicaron.

15.96 El péndulo de 6 kg con punta se deja caer desde la posición 1. Cuando llega a la posición 2, la punta ensarta el paquete de 2 kg y lo lleva a la posición 3 antes de detenerse de manera momentánea. Determine el ángulo θ en la posición 3.

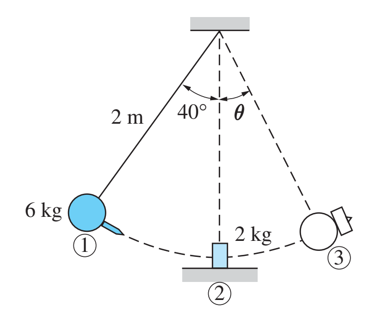


Fig. P15.96

15.97 Cada uno de los carritos de supermercado A y B pesa 50 lb. El paquete C de 35 lb puede deslizarse libremente en A. Si se empuja el carrito A contra el B que se encuentra estacionado con la rapidez v = 15 pies/s, determine: (a) la rapidez de los carritos inmediatamente después del impacto inicial, y (b) la rapidez final de ambos. Desprecie la fricción y suponga que todos los impactos son plásticos.

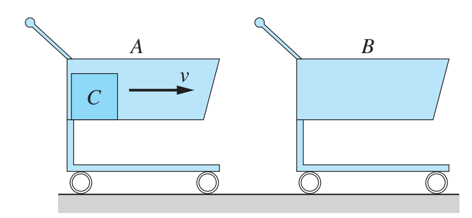


Fig. P15.97

15.98 Los automóviles A y B colisionan con velocidades v_A y v_B, en las direcciones que se muestran. Después de la colisión, los vehículos se enganchan y patinan 24 pies en la dirección que se indica antes de detenerse. Si se sabe que el coeficiente de fricción cinética entre la carretera y los neumáticos es 0.65 para cada automóvil, encuentre v_A y v_B.

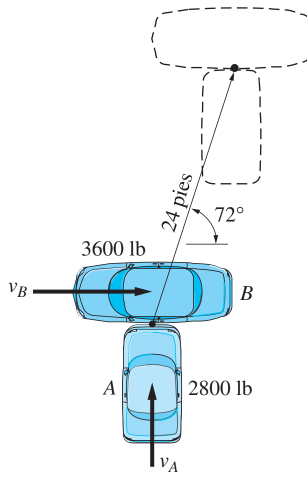


Fig. P15.98

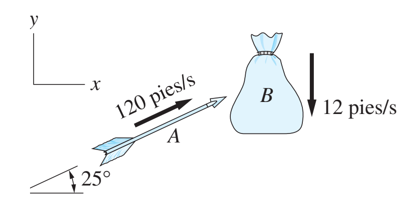


Fig. P15.99

15.99 El costal B de arena de 10 lb cae verticalmente cuando la flecha A de 3.5 oz que viaja a 120 pies/s en la dirección que se muestra lo golpea. Al tiempo del impacto, la rapidez del costal es de 12 pies/s. Establezca la velocidad del costal justo después del impacto, suponiendo que la flecha queda clavada en él.

15.100 El costal A de 60 lb se deja caer sobre una balanza de resortes desde la altura $h = 0$. La plataforma B de la balanza pesa 12 lb y la rigidez combinada de los resortes es de 1200 lb/pie. Determine la lectura máxima de la balanza.

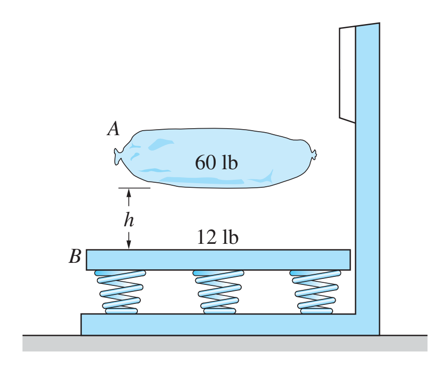


Fig. P15.100

15.101 La bala C de 25 g se dispara contra las pacas de heno A y B a una velocidad de 600 m/s. La bala pasa a través de A y queda incrustada en B. Inmediatamente después de los impactos, se observa que las dos pacas tienen la misma velocidad. Obtenga la rapidez de la bala entre ambas pacas. Desprecie la fricción.

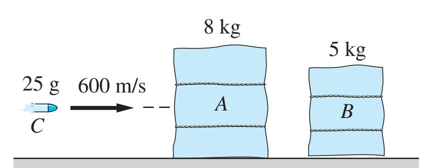


Fig. P15.101

15.102 Los collares A y B se deslizan con fricción despreciable sobre el alambre en el plano vertical. El resorte unido a A tiene una rigidez de $k = 10$ lb/pie y su longitud no deformada es de 0.8 pies. Ambos collares están en reposo cuando A se libera en la posición que se muestra. Después del impacto, A y B quedan unidos y se mueven una distancia d antes de detenerse momentáneamente. Determine d.

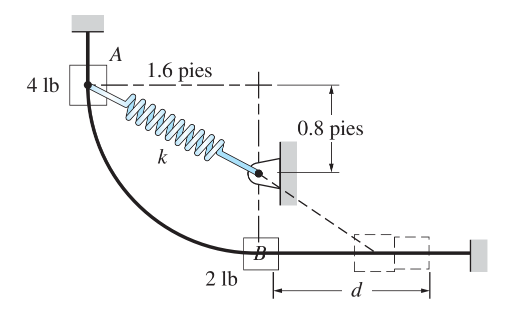


Fig. P15.102

15.103 El soporte A de 60 kg transporta un tubo B de 12 kg a una velocidad de 8 m/s cuando golpea contra una pared rígida. Suponiendo que todos los impactos son plásticos, determine la rapidez del tubo inmediatamente después de los impactos. Desprecie la fricción.

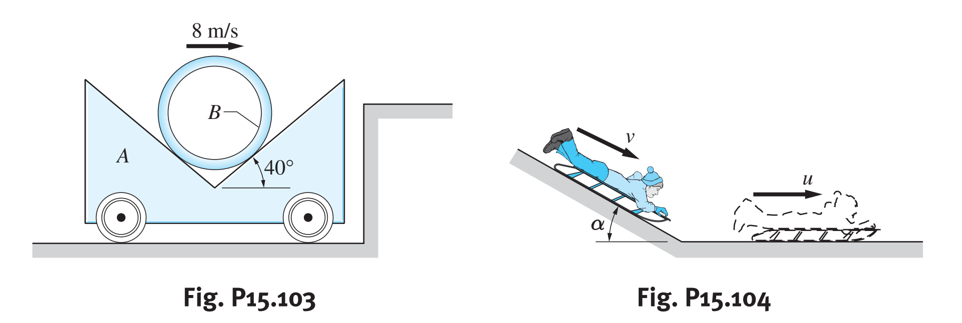


Fig. P15.103 **Fig. P15.104**

15.104 La rapidez del trineo, justo antes de llegar al vértice en el fondo de la colina, es v. Cuando el trineo golpea el vértice, recibe un impulso vertical del piso que cambia su rapidez a u, dirigida horizontalmente. En términos de v, la masa m del trineo y el conductor, y el ángulo α de la pendiente, obtenga: (a) u y (b) la energía perdida debido al impacto.

15.105 El péndulo de 12 kg se encuentra inmóvil en la posición que se muestra cuando es golpeado por una bala de 20 g que viaja en sentido horizontal ($\alpha = 0$). Después del impacto, el péndulo y la bala incrustada oscilan hasta un ángulo $\theta = 36^o$. Calcule la rapidez inicial de la bala.

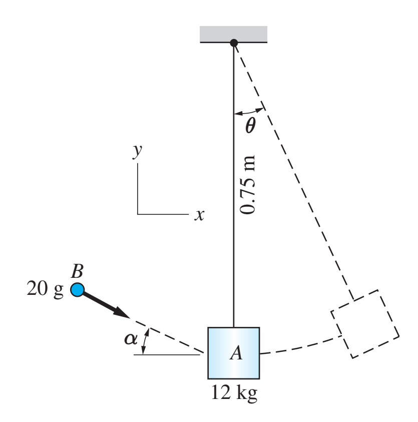


Fig. P15.105, P15.106

15.106 La bala B de 20 g viaja a 980 m/s a un ángulo $\alpha = 20°$ cuando queda incrustada en la masa A de 12 kg del péndulo. Antes del impacto, el péndulo se encontraba estacionario en la posición vertical ($\theta = 0$). Encuentre el vector de velocidad de A inmediatamente después del impacto, suponiendo que A está suspendida de: (a) una varilla rígida, y (b) una cuerda elástica (deformable).

***15.107** El péndulo C está suspendido del bloque B que puede moverse libremente sobre la superficie horizontal. El montaje está en reposo cuando la bala A golpea el bloque con la rapidez $v_1 = 300$ m/s y queda incrustada en él. Determine el máximo desplazamiento angular θ del péndulo después del impacto y la velocidad del bloque en ese instante.

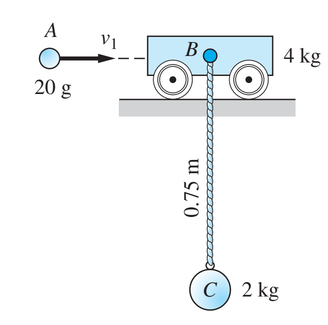
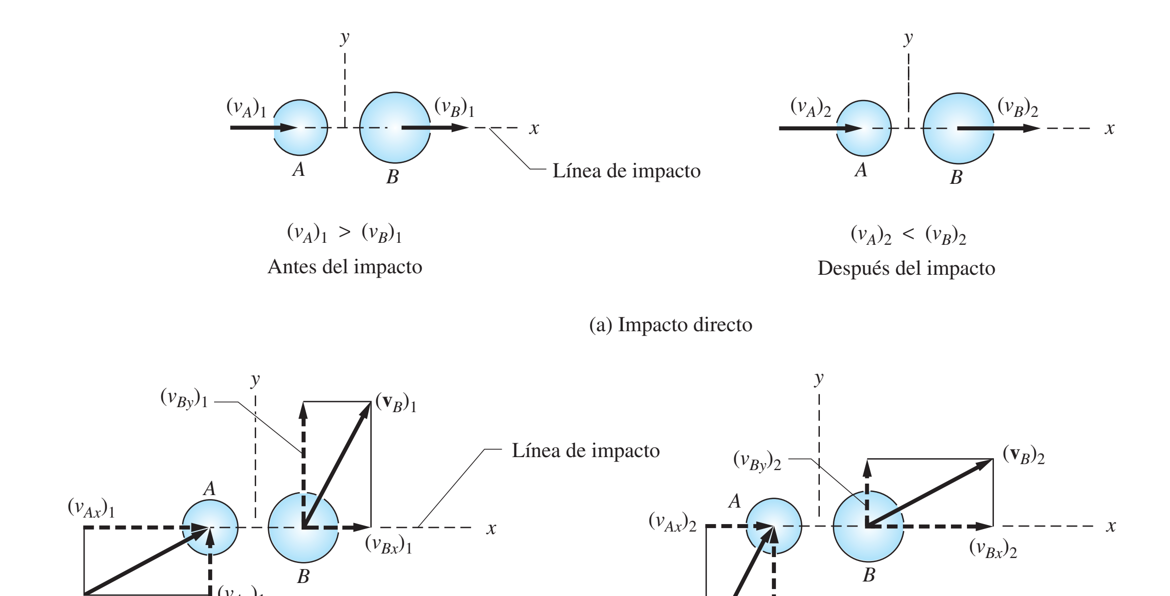


Fig. P15.107

15.10 *Impacto elástico*

La mayoría de los cuerpos tienen la habilidad de regresar, de manera total o parcial, a su forma original cuando se liberan de una posición deformada, una propiedad que se conoce como *elasticidad*. Por tanto, existen dos etapas en el impacto de las partículas elásticas. Al inicio hay una etapa de deformación en la que la partícula se comprime debido a la fuerza de impacto. A ésta le sigue una etapa de recuperación, durante la cual la partícula retorna parcial o totalmente a su configuración no deformada. Cuando dos partículas elásticas colisionan, la etapa de recuperación produce que éstas reboten, o se separen, después del impacto (no hay etapa de recuperación durante el impacto plástico). Si las partículas son perfectamente elásticas regresarán a su forma original sin pérdida de energía durante el impacto. Una situación más común es que las partículas en colisión sean deformadas de manera parcial por las relativamente grandes fuerzas de impacto, en cuyo caso se pierde una fracción de la energía cinética inicial debido a la deformación permanente. La energía cinética también puede perderse en la generación de calor y sonido durante el impacto. Antes de caracterizar el impacto de dos partículas elásticas, es necesario distinguir entre el impacto directo y el oblicuo.

La figura 15.15 muestra el impacto entre dos discos circulares *A* y *B* que se deslizan sin fricción sobre un plano horizontal. La línea que es perpendicular a la superficie de contacto (el eje *x*) es la *línea de impacto*. Las velocidades de las partículas antes de la colisión se denotan con $(v_A)_1$ y $(v_B)_1$. Cuando ambas velocidades iniciales están dirigidas sobre la línea de impacto, como se muestra en la figura 15.15(a), este último se denomina *impacto directo*. En caso contrario se llama *oblicuo*, como



(a) Impacto directo

(b) Impacto oblicuo

Fig. 15.15

se indica en la figura 15.15(b). Así el impacto directo es equivalente a una colisión frontal y el oblicuo se refiere a una con una desviación (con cierto parámetro de impacto). Observe que el impulso lineal que actúa sobre el sistema es cero para los dos casos que se muestran en la figura 15.15 ya que ninguna fuerza externa actúa sobre el sistema.

Para el impacto directo de la figura 15.15(a), el balance de la cantidad de movimiento en la dirección x da

$$\xrightarrow{+} \quad m_A(v_A)_1 + m_B(v_B)_1 = m_A(v_A)_2 + m_B(v_B)_2 \tag{15.42}$$

donde $(v_A)_2$ y $(v_B)_2$ son las velocidades después del impacto.

El *coeficiente de restitución e* es una constante experimental que caracteriza la "elasticidad" de los cuerpos que colisionan. Para un impacto directo éste se define como

$$e = \frac{v_{sep}}{v_{aprox}} \tag{15.43}$$

donde

$v_{sep} = (v_B)_2 - (v_A)_2$ es la *velocidad de separación* (la razón a la cual aumenta la distancia entre las partículas después del impacto).

$v_{aprox} = (v_A)_1 - (v_B)_1$ es la *velocidad de aproximación* (la razón a la cual disminuye la distancia entre las partículas antes del impacto).

Para que ocurra un impacto en la figura 15.15(a), se debe tener $v_{aprox} > 0$; si las partículas se separan después del impacto (omitiendo la posibilidad de que A pudiera pasar a través de B), se tiene $v_{sep} > 0$. Así que, en general, e es un número no negativo.

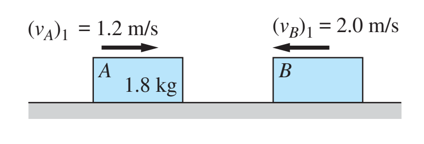
A partir de la ecuación (15.43) se observa que $e = 0$ ($v_{sep} = 0$) corresponde a un impacto plástico. Si $e = 1$, el impacto se llama *perfectamente elástico*, una situación en la que no hay pérdida de energía durante el mismo (véase el problema 15.108). Para la mayoría de los impactos, los valores de e estarán entre 0 y 1. (Un coeficiente de restitución negativo indica que un cuerpo ha pasado a través del otro, como una bala que perfora una placa.)

El impacto oblicuo se analiza suponiendo que e tiene el mismo valor que para un impacto directo; sin embargo, en la ecuación de definición para e, las velocidades se reemplazan por sus componentes sobre la línea de impacto. Por tanto, si la línea de impacto coincide con el eje x, como se muestra en la figura 15.15(b), se tiene

$$\begin{aligned} v_{sep} &= (v_{Bx})_2 - (v_{Ax})_2 \\ v_{aprox} &= (v_{Ax})_1 - (v_{Bx})_1 \end{aligned} \tag{15.44}$$

Si la fricción entre A y B es despreciable, la fuerza de impacto que actúa sobre cualquier partícula estará dirigida sobre el eje x, sin componente y. Para este caso, las componentes y de las velocidades de A y B no cambiarán durante el impacto.

En general se considera que el valor de e es constante, dependiendo únicamente del material de las partículas en colisión. Pero esto es sólo una aproximación a la realidad. La evidencia experimental indica que el coeficiente de restitución en realidad depende de muchos factores (la magnitud de la velocidad relativa de aproximación, la condición de las superficies que impactan, etcétera).



(a)

Problema de ejemplo **15.14**

El bloque A de 1.8 kg que se muestra en la figura (a) se desliza hacia la derecha con velocidad de 1.2 m/s y golpea al bloque B, que se mueve hacia la izquierda con velocidad de 2.0 m/s. El impacto hace que A se detenga. Si el coeficiente de restitución para el impacto es 0.5, determine: 1. la velocidad de B después del impacto y 2. la masa de B. Desprecie la fricción.

Solución

Parte 1

La velocidad de B después del impacto, $(v_B)_2$, puede calcularse con la ecuación que define al coeficiente de restitución. Respecto a la figura (a), se observa que la velocidad de aproximación es $v_{aprox} = 1.2 + 2.0 = 3.2$ m/s. Observe que el bloque A está en reposo después del impacto, la velocidad de separación es $v_{sep} = (v_B)_2$. Por tanto, $e = v_{sep}/v_{aprox}$ será

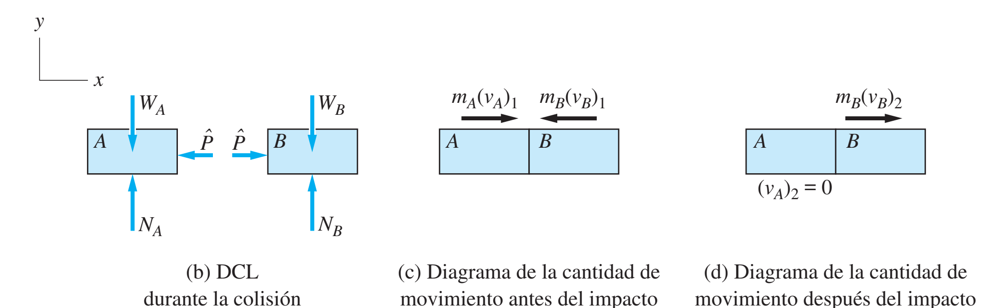
$$0.5 = \frac{(v_B)_2}{3.2}$$

de lo que se encuentra

$$(v_B)_2 = 1.6 \text{ m/s} \qquad \textit{Respuesta}$$

Parte 2

Los diagramas de cuerpo libre de los bloques A y B durante el impacto, que se muestran en la figura (b), contienen las siguientes fuerzas: los pesos W_A y W_B, las fuerzas de contacto N_A y N_B y la fuerza de impacto $\hat{P}$. Como $\hat{P}$ es interna al sistema de ambos bloques, se concluye que el impulso neto que actúa sobre el sistema en la dirección x es cero.



(b) DCL durante la colisión

(c) Diagrama de la cantidad de movimiento antes del impacto

(d) Diagrama de la cantidad de movimiento después del impacto

Respecto a las figuras (c) y (d), la conservación de la cantidad de movimiento lineal en la dirección x para el sistema resulta

$$(p_x)_1 = (p_x)_2$$

$$\xrightarrow{+} \quad m_A(v_A)_1 - m_B(v_B)_1 = m_B(v_B)_2$$

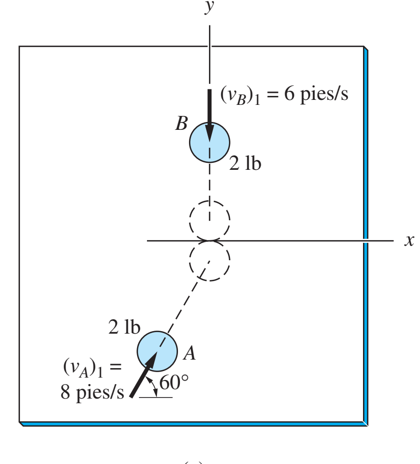
Al sustituir los valores numéricos se obtiene

$$1.8(1.2) - m_B(2.0) = m_B(1.6)$$

y a partir de ello se encuentra

$$m_B = 0.6 \text{ kg} \qquad \textit{Respuesta}$$

Problema de ejemplo **15.15**

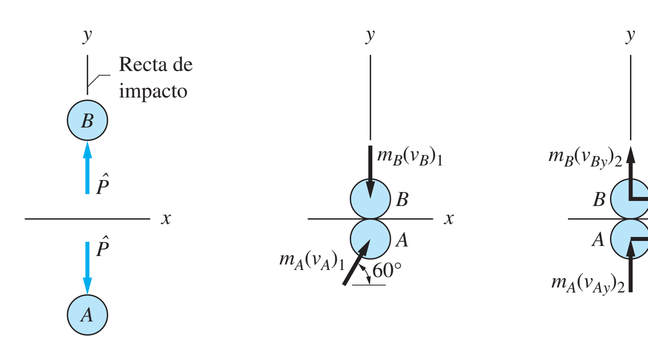



(a)

Dos discos idénticos A y B, con 2 lb de peso cada uno, se deslizan sobre una mesa horizontal y colisionan con las velocidades $(v_A)_1 = 8$ pies/s y $(v_B)_1 = 6$ pies/s, dirigidas como se indica en la figura (a). Si el coeficiente de restitución para el impacto es $e = 0.8$, calcule los vectores velocidad de los discos inmediatamente después de la colisión. Desprecie la fricción.

Solución

Como se muestra en los diagramas de cuerpo libre de la figura (b), las únicas fuerzas que actúan en el plano xy durante la colisión son las de impacto $\hat{P}$, que están dirigidas en sentido opuesto sobre A y B. (Los pesos de los discos y las fuerzas normales ejercidas por la superficie de la mesa son perpendiculares al plano horizontal xy.) En ausencia de fricción, $\hat{P}$ se dirigirá sobre el eje y, que es la línea de impacto. Suponiendo que la duración de la colisión es despreciable, el movimiento es impulsivo y los discos se localizarán en el origen del sistema de coordenadas justo antes y después del impacto.



(b) DCL durante la colisión (fuerzas que actúan únicamente en el plano xy)

(c) Diagrama de la cantidad de movimiento antes del impacto

(d) Diagrama de la cantidad de movimiento después de la colisión

En las figuras (c) y (d) se indican los diagramas que muestran los vectores de la cantidad de movimiento de A y B inmediatamente antes y después del impacto. Observe que en la figura (d) se ha supuesto que todas las componentes de las velocidades finales actúan en las direcciones de las coordenadas positivas.

A partir de la figura (b) a la (d) se observa que hay cinco incógnitas: $\int \hat{P}\,dt$ (el impulso de la fuerza de impacto), $(v_{Ax})_2$, $(v_{Ay})_2$, $(v_{Bx})_2$ y $(v_{By})_2$. Además, hay cinco ecuaciones independientes: dos componentes de la ecuación vectorial de impulso-cantidad de movimiento, $\mathbf{L}_{1-2} = \Delta\mathbf{p}$, para cada disco (un total de cuatro ecuaciones), más la ecuación del coeficiente de restitución, la (15.43). Por supuesto, esas cinco ecuaciones podrían emplearse para la obtención de las cinco incógnitas. Sin embargo, como éstas no se requieren para calcular $\int \hat{P}\,dt$, se logra una solución más eficaz si se analiza el sistema que contiene ambos discos. Así la solución consta de las siguientes cuatro partes.

1. Aplicar $(L_{1-2})_x = \Delta p_x$ al disco A

A partir de la figura (b) se observa que no hay impulso sobre A en la dirección x. Por tanto, se conserva la componente x de la cantidad de movimiento de A. Respecto a

los diagramas de la cantidad de movimiento para el disco A en las figuras (c) y (d), se obtiene

$$(p_x)_1 = (p_x)_2$$

$$\xrightarrow{+} \quad m_A(v_A)_1 \cos 60° = m_A(v_{Ax})_2$$

Al eliminar m_A y sustituir $(v_A)_1 = 8$ pies/s, esta ecuación resulta en

$$(v_{Ax})_2 = (v_A)_1 \cos 60° = 8 \cos 60° = 4.00 \text{ pies/s} \tag{a}$$

2. Aplicar $(L_{1-2})_x = \Delta p_x$ al disco B

Si se utiliza el mismo argumento que se ha presentado antes para el caso del disco A, se encuentra que

$$(v_{Bx})_2 = (v_{Bx})_1 = 0 \tag{b}$$

(Observe que las componentes x de las velocidades de A y B no se modifican por el impacto porque $\hat{P}$ está dirigida sobre el eje y).

3. Aplicar $(L_{1-2})_x = \Delta p_y$ al sistema que contiene ambos discos

En la figura (b) se observa que no existen fuerzas externas y por tanto ningún impulso externo, que actúen sobre el sistema durante el impacto ($\hat{P}$ es una fuerza interna). Por tanto, la cantidad de movimiento del sistema se conserva. Respecto a las figuras (c) y (d), la conservación de la componente y de la cantidad de movimiento para el sistema da

$$(p_y)_1 = (p_y)_2$$

$$+\uparrow \quad m_A(v_A)_1 \operatorname{sen} 60° - m_B(v_B)_1 = m_A(v_{Ay})_2 + m_B(v_{By})_2$$

$$\frac{2}{g}(8) \operatorname{sen} 60° - \frac{2}{g}(6) = \frac{2}{g}(v_{Ay})_2 + \frac{2}{g}(v_{By})_2$$

que puede reducirse a

$$(v_{Ay})_2 + (v_{By})_2 = 0.9282 \tag{c}$$

4. Uso del coeficiente de restitución

Al observar que la línea de impacto es el eje y, la velocidad de aproximación [véase la figura (a)] es $v_{aprox} = 8 \operatorname{sen} 60° + 6 = 12.928$ pies/s. Respecto a la figura (d), se deduce que la velocidad de separación es $v_{sep} = (v_{By})_2 - (v_{Ay})_2$. Por tanto, $e = v_{sep}/v_{aprox}$ será

$$0.8 = \frac{(v_{By})_2 - (v_{Ay})_2}{12.928}$$

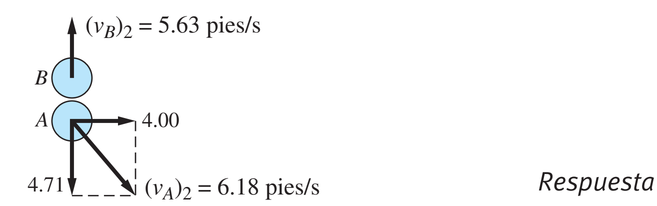
que, después de simplificar, puede escribirse como

$$(v_{By})_2 - (v_{Ay})_2 = 10.342 \tag{d}$$

Cuando se resuelven las ecuaciones simultáneas (c) y (d), se obtiene

$$(v_{Ay})_2 = -4.71 \text{ pies/s} \quad \text{y} \quad (v_{By})_2 = 5.63 \text{ pies/s} \tag{e}$$

Con los valores obtenidos con las ecuaciones (a), (b) y (e), las velocidades de los discos A y B después del impacto son:

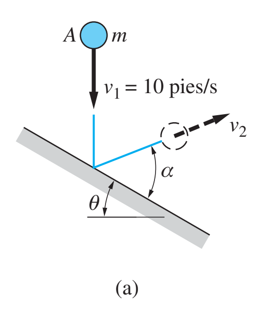


Respuesta

Si se necesitara, el impulso de la fuerza de impacto, $\int \hat{P}\,dt$, podría calcularse aplicando la ecuación $(L_{1-2})_y = \Delta p_y$ ya sea al disco A o al B.

Problema de ejemplo **15.16**

Como se muestra en la figura (a), la pelota A de masa $m = 0.2$ kg se deja caer sobre una superficie rígida inclinada en un ángulo $\theta = 30°$ respecto a la horizontal. El coeficiente de restitución para el impacto es 0.8 y la fricción entre la pelota y la superficie es despreciable. Determine: 1. la velocidad de rebote v_2 y el ángulo α de rebote, y 2. el porcentaje de energía cinética perdida durante la colisión.

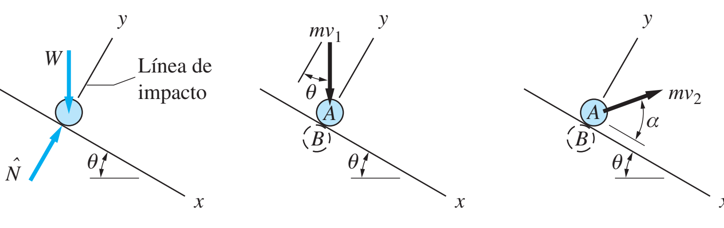


(a)

Solución

Parte 1

Como se muestra en el diagrama de cuerpo libre de la figura (b), las fuerzas que actúan sobre la pelota durante el impacto son su peso W y la fuerza de impacto $\hat{N}$, que es normal para el plano sin fricción. El eje y, que es perpendicular al plano, es la línea de impacto.



(b) DCL durante el impacto (c) Diagrama de la cantidad de movimiento antes del impacto (d) Diagrama de la cantidad de movimiento después del impacto

Se desprecia la duración del impacto, lo que significa que el movimiento es impulsivo. De esto se deduce que es posible despreciar el impulso de W, que es una fuerza finita, y que la pelota se encuentra en la misma ubicación inmediatamente antes y después del impacto.

Debido a que la descripción del impacto requiere dos partículas, imagine que una segunda partícula B está incrustada en el plano rígido, como se muestra en el diagrama de cantidad de movimiento de las figuras (c) y (d). Ya que la velocidad de B siempre es cero, los diagramas de la cantidad de movimiento antes y después de la colisión sólo contienen la cantidad de movimiento de la pelota A.

En la figura (b) se observa que no habrá impulso que actúe sobre la pelota en la dirección x durante la colisión (recuerde que se ha despreciado el impulso de W). Por tanto, la componente x de la cantidad de movimiento de A se conserva. Respecto a los diagramas de la cantidad de movimiento de las figuras (c) y (d), se obtiene

$$(p_x)_1 = (p_x)_2$$

$$\searrow^{+} \quad mv_1 \operatorname{sen}\theta = mv_2 \cos\alpha$$

que produce

$$v_2 \cos\alpha = v_1 \operatorname{sen}\theta = 10 \operatorname{sen} 30^\circ = 5.0 \text{ pies/s} \qquad \text{(a)}$$

De las figuras (c) y (d) se observa que las velocidades de aproximación y separación son $v_{\text{aprox}} = v_1 \cos\theta$ y $v_{\text{sep}} = v_2 \cos\alpha$. Por tanto, la definición del coeficiente de restitución, $v_{\text{sep}} = ev_{\text{aprox}}$, conduce a

$$v_2 \operatorname{sen}\alpha = ev_1 \cos\theta = (0.8)(10)\cos 30^\circ = 6.928 \text{ pies/s} \qquad \text{(b)}$$

Al resolver las ecuaciones (a) y (b), se obtiene

$$v_2 = 8.544 \text{ pies/s} \quad \text{y} \quad \alpha = 54.18^\circ \qquad \textit{Respuesta}$$

Parte 2

El cambio en la energía cinética de la pelota durante el impacto es

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2}(0.2)[(8.544)^2 - (10)^2]$$
$$= 7.30 - 10.0 = -2.70 \text{ lb} \cdot \text{pie}$$

El porcentaje de pérdida de energía cinética es

$$\% \text{ pérdida} = -\frac{\Delta T}{T_1} = \frac{2.70}{10.0} \times 100\% = 27.0\% \qquad \textit{Respuesta}$$

Problemas

15.108 Demuestre que no se pierde energía durante el impacto directo de dos partículas si $e = 1$.

15.109 Los dos bloques se deslizan sobre una superficie horizontal con las velocidades $(v_A)_1$ y $(v_B)_1$, donde $(v_A)_1 > (v_B)_1$. Demuestre que, después del impacto, la rapidez respectiva de cada bloque es:

$$(v_A)_2 = \frac{(v_A)_1(m_A/m_B - e) + (v_B)_1(1+e)}{1 + m_A/m_B}$$

$$(v_B)_2 = \frac{(v_A)_1(1+e) + (v_B)_1(m_B/m_A - e)}{1 + m_B/m_A}$$

donde e es el coeficiente de restitución. Desprecie la fricción.

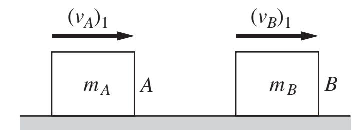


Fig. P15.109

15.110 Tres bloques idénticos ($m_A = m_B = m_C$) están en reposo sobre una superficie horizontal cuando al bloque A se le da una velocidad inicial v_0. Determine la rapidez de cada bloque después de que han ocurrido todas las colisiones. El coeficiente de restitución para cada impacto es 0.5. Utilice las fórmulas que se proporcionaron en el problema 15.109 y desprecie la fricción.

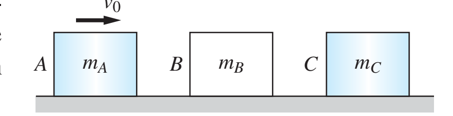


Fig. P15.110, P15.111

15.111 Resuelva el problema 15.110 suponiendo que las masas de los bloques son $m_A = m_C = m$ y $m_B = 0.6m$.

15.112 Los tres péndulos idénticos de masa m cada uno, están suspendidos de manera que sus masas casi se tocan. Después, el péndulo A se desplaza y se suelta, golpeando a B con la velocidad v_0. Obtenga la rapidez de la masa C inmediatamente después del impacto. Suponga que todos los impactos son perfectamente elásticos ($e = 1$).

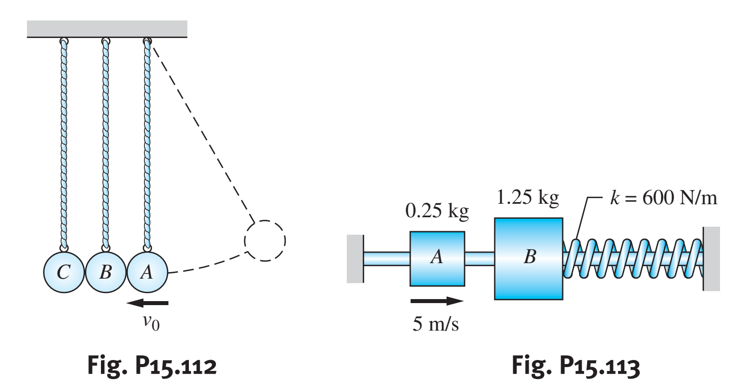


Fig. P15.112 Fig. P15.113

15.113 Después de que el collar deslizante A golpea al collar estacionario B con una rapidez de 5 m/s, rebota con una rapidez de 2 m/s, dirigida hacia la izquierda. Determine el coeficiente de restitución para el impacto.

15.114 Se colocan dos monedas idénticas sobre una superficie horizontal rugosa, como se muestra en (a). Después de que se empuja la moneda A hacia la B estacionaria con la velocidad inicial $(v_A)_1$, las monedas quedan quietas en las posiciones que

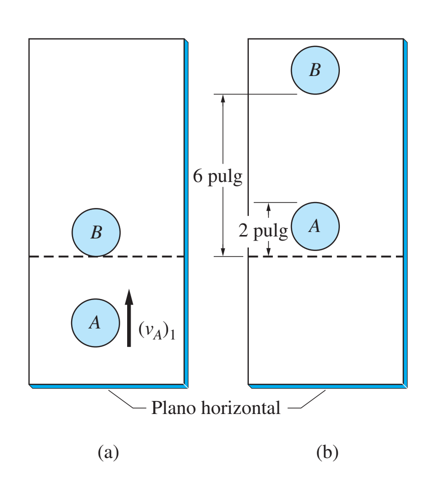


Fig. P15.114

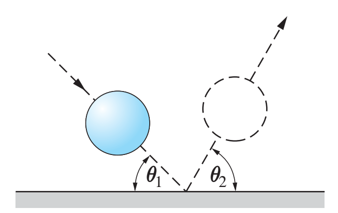


Fig. P15.115

se muestran en el inciso (b). Encuentre el coeficiente de restitución para el impacto entre las monedas.

15.115 La pelota elástica rebota sobre una superficie rígida. Demuestre que la relación entre el ángulo de incidencia y el ángulo de rebote es tan $\theta_2 = e$ tan θ_1, donde e es el coeficiente de restitución. Desprecie la fricción.

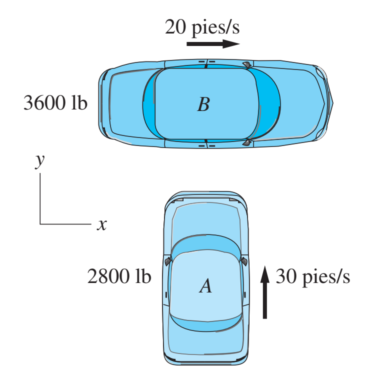


Fig. P15.116

15.116 Dos automóviles que viajan con las velocidades que se muestran, chocan en una intersección. El coeficiente de restitución es 0.2 para el impacto y no existe fricción en las superficies que entran en contacto. Calcule la velocidad de cada automóvil después del impacto.

15.117 Los dos discos A y B están sobre una superficie horizontal. El disco A se lanza hacia B, que inicialmente está en reposo, con la velocidad que se muestra. Si $e = 0.85$, calcule la velocidad de cada disco después del impacto. Desprecie la fricción.

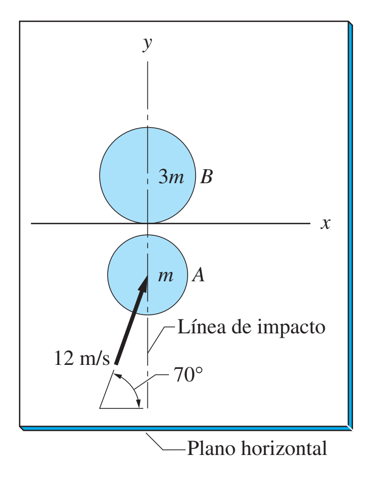


Fig. P15.117

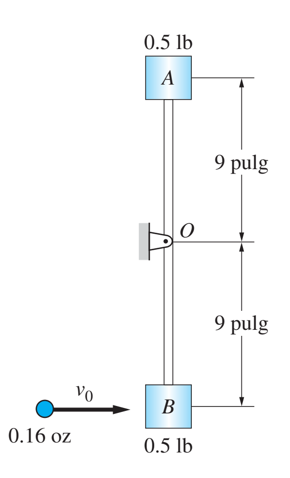


Fig. P15.118

15.118 Los bloques A y B de 0.5 lb están unidos por una varilla de peso despreciable. El montaje, que al principio está en reposo, es libre de rotar respecto al perno en O. Si el perdigón de 0.16 oz se dispara contra B con la velocidad $v_0 = 300$ pies/s, determine la velocidad angular de la varilla inmediatamente después del impacto. El coeficiente de restitución para el impacto es 0.75.

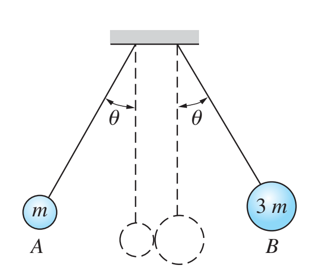


Fig. P15.119

15.119 Dos péndulos se sueltan de manera simultánea a partir del reposo en las posiciones que se muestran. Después de que las masas colisionan, el péndulo A oscila de regreso a su posición inicial. Calcule el coeficiente de restitución para el impacto.

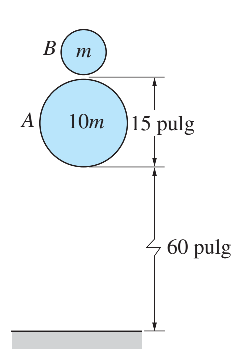


Fig. P15.120

15.120 Las pelotas A y B se liberan de manera simultánea desde las posiciones que se muestran, con un pequeño espacio entre ellas. Determine la altura máxima que B alcanza después de chocar con A. El coeficiente de restitución es 0.85 para todos los impactos. Observe que la masa de A es diez veces la masa de B.

***15.121** Se suelta una pelota desde una altura h_0 sobre un piso rígido. Si el coeficiente de restitución es 0.985, encuentre el número de rebotes que la pelota efectúa antes de que su altura de rebote se reduzca a $h_0/2$.

15.122 Los dos discos que se mueven sobre trayectorias paralelas chocan con las velocidades que se muestran. El radio de A es 50 mm y su masa es 0.4 kg. El disco B tiene un radio de 100 mm y una masa de 0.8 kg. Obtenga la rapidez de cada disco inmediatamente después del impacto si el coeficiente de restitución es 0.7. Desprecie la fricción.

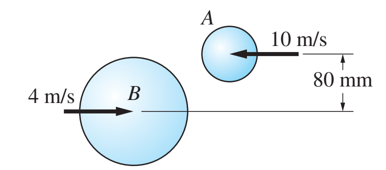


Fig. P15.122

*15.11 Flujo de masa

a. Volumen de control

Hasta ahora, la atención se ha centrado en los sistemas que siempre contienen las mismas partículas. En otras palabras, se supuso que el sistema era cerrado en el sentido de que no entraba masa al mismo ni salía de él. En este apartado se aplica el principio de impulso-cantidad de movimiento al *flujo de masa*; donde las partículas se mueven continuamente a través de una región espacial, llamada *volumen de control*.

Un ejemplo es el flujo de agua a través de la sección de un tubo, como se muestra en la figura 15.16(a). Aquí una elección conveniente para el volumen de control V es el interior del tubo. El agua entra al volumen de control con la velocidad $\mathbf{v}_{\text{ent}}$ y sale con velocidad $\mathbf{v}_{\text{sal}}$. Debido a que la cantidad de movimiento del agua en el tubo ha cambiado, debe existir una fuerza igual a la razón de cambio de dicha cantidad entre la superficie del volumen de control y el flujo de agua.

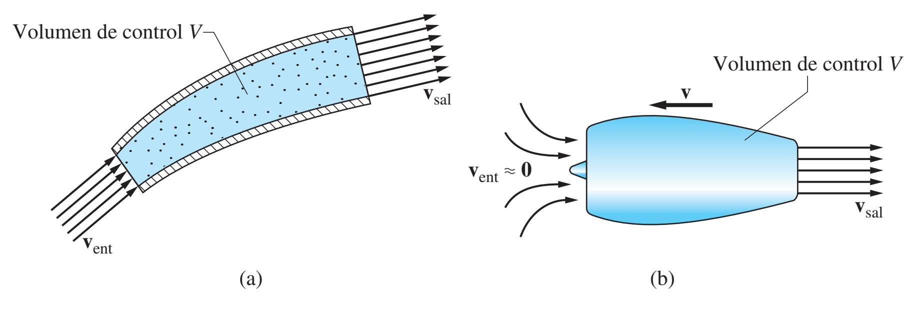


Fig. 15.16

Un segundo ejemplo de flujo de masa es la turbina de un avión, véase la figura 15.16(b). La turbina aspira aire ($\mathbf{v}_{\text{ent}} \approx \mathbf{0}$), que se mezcla con el combustible y se enciende. Los gases de la combustión se expulsan a la velocidad $\mathbf{v}_{\text{sal}}$. El volumen de control V es el interior de la turbina, que en sí misma se mueve con velocidad $\mathbf{v}$. En este caso, ocurren dos cambios dentro del volumen de control: la velocidad del aire se incrementa de cero a $\mathbf{v}_{\text{sal}}$ y la del combustible quemado se modifica de $\mathbf{v}$ a $\mathbf{v}_{\text{sal}}$. La razón correspondiente de cambio de la cantidad de movimiento origina una fuerza entre la turbina y el flujo de masa, llamada *empuje*.

Hablando en sentido estricto, el análisis del flujo de masa pertenece al campo de la *mecánica de fluidos*, que está fuera del alcance de este libro. Así el análisis se restringirá a los problemas que no requieren el conocimiento y técnicas especializados de la mecánica de fluidos. En particular, se supone que las velocidades $\mathbf{v}_{\text{ent}}$ y $\mathbf{v}_{\text{sal}}$ son constantes a través de las áreas de entrada y salida del volumen de control, respectivamente.

b. Principio de impulso-cantidad de movimiento

Ahora se formulará el principio de impulso-cantidad de movimiento, con base en el concepto de un volumen de control.

La figura 15.17(a) muestra un volumen de control V que consiste en la región interior de un contenedor, como un tubo. En general, cualquier región del espacio puede seleccionarse como un volumen de control, con la mejor opción determinada por el problema en consideración. Cuando la forma del volumen de control es mantenida por un recipiente, como en la figura 15.17(a), este último puede incluirse como parte del sistema, si es conveniente. Sin embargo, el volumen de control debe quedar claramente especificado desde el inicio del análisis, ya que determina las ecuaciones que se usarán en la solución.

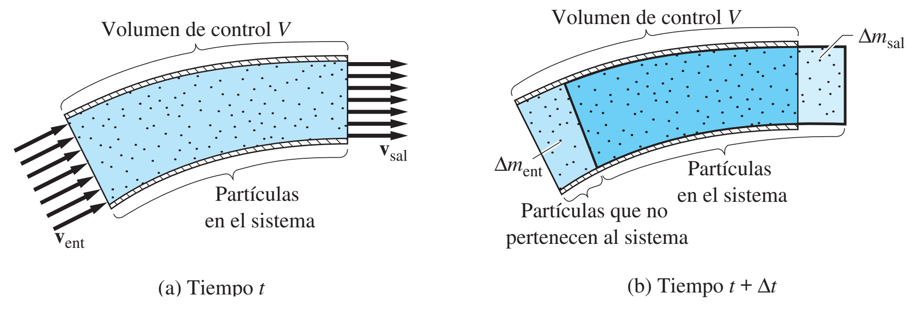


Fig. 15.17

Ahora considere la cantidad de movimiento del sistema que consta de todas las partículas que están dentro del volumen de control V al tiempo t, como el que se indica en la figura 15.17(a). Observe que, a diferencia del volumen de control, el sistema siempre contiene las mismas partículas: es decir, su masa es constante. Sean $\mathbf{p}$ la cantidad de movimiento del sistema al tiempo t y $\mathbf{p}_V$ la cantidad de movimiento de la masa dentro del volumen de control al tiempo t. Como el sistema está dentro de V al tiempo t, entonces $\mathbf{p} = \mathbf{p}_V$.

Ahora considere la cantidad de movimiento del sistema al tiempo $t + \Delta t$, donde Δt es un pequeño intervalo de tiempo. Como se indica en la figura 15.17(b), algunas de las partículas del sistema han salido del volumen de control V y otras, que no son parte del sistema, han entrado a V. Las masas de esas partículas se han etiquetado como Δm_{sal} y Δm_{ent}, respectivamente. Debido a que se ha supuesto que las velocidades de entrada y salida a través de las áreas transversales son constantes, entonces las cantidades de movimiento de las partículas que salen y entran del volumen de control son, respectivamente,

$$\Delta \mathbf{p}_{sal} = \Delta m_{sal}\, \mathbf{v}_{sal} \quad \text{(a)}$$

$$\Delta \mathbf{p}_{ent} = \Delta m_{ent}\, \mathbf{v}_{ent} \quad \text{(b)}$$

La cantidad de movimiento del sistema ha cambiado de $\mathbf{p}$ a $\mathbf{p} + \Delta\mathbf{p}$ y la cantidad de movimiento de las partículas que ahora están en V es $\mathbf{p}_V + \Delta\mathbf{p}_V$. Ya que la cantidad de movimiento de las partículas que abandonan V quizá no sea igual a la cantidad de movimiento de las partículas que entran a V, entonces $\Delta\mathbf{p}$ no es necesariamente igual a $\Delta\mathbf{p}_V$. De la figura 15.17(b), se observa que la cantidad de movimiento del sistema es igual a la cantidad de movimiento de las partículas dentro de V más la cantidad de movimiento de las partículas que salen de V (ésas son parte del sistema) menos la cantidad de movimiento de las partículas que entran a V (ésas no son parte del sistema); en otras palabras,

$$\mathbf{p} + \Delta\mathbf{p} = \mathbf{p}_V + \Delta\mathbf{p}_V + \Delta\mathbf{p}_{sal} - \Delta\mathbf{p}_{ent} \quad \text{(c)}$$

Al sustituir de las ecuaciones (a) y (b) y recordar que $\mathbf{p} = \mathbf{p}_V$, se obtiene

$$\Delta\mathbf{p} = \Delta\mathbf{p}_V + \Delta m_{\text{sal}}\,\mathbf{v}_{\text{sal}} - \Delta m_{\text{ent}}\mathbf{v}_{\text{ent}} \tag{d}$$

La razón con la que cambia la cantidad de movimiento del sistema al tiempo t está dada por

$$\dot{\mathbf{p}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{p}}{\Delta t}$$

que implica, en conjunción con la ecuación (d),

$$\dot{\mathbf{p}} = \dot{\mathbf{p}}_V + \dot{m}_{\text{sal}}\,\mathbf{v}_{\text{sal}} - \dot{m}_{\text{ent}}\mathbf{v}_{\text{ent}} \tag{15.45}$$

donde

$$\dot{m}_{\text{sal}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta m_{\text{sal}}}{\Delta t} \quad \text{y} \quad \dot{m}_{\text{ent}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta m_{\text{ent}}}{\Delta t}$$

son las razones de flujos de masa de salida y entrada al volumen de control, respectivamente. (Las unidades para la razón de flujo de masa son: masa por unidad de tiempo, por ejemplo, slugs/s o kg/s.)

La ecuación (15.45) es una forma del *teorema de transporte de Reynolds*:

La razón a la que cambia la cantidad de movimiento de un sistema es igual a la razón de cambio de la cantidad de movimiento dentro del volumen de control más la razón neta con la que fluye la cantidad de movimiento hacia afuera del volumen de control.

Si $\Sigma\mathbf{F}$ es la fuerza resultante que actúa sobre el sistema en el tiempo t (cuando todo el sistema está contenido en el volumen de control), entonces el principio de impulso-cantidad de movimiento establece que $\Sigma\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}$, que, al usar la ecuación (15.45), implica

$$\Sigma\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}_V + \dot{m}_{\text{sal}}\,\mathbf{v}_{\text{sal}} - \dot{m}_{\text{ent}}\mathbf{v}_{\text{ent}} \tag{15.46}$$

Los siguientes dos ejemplos de flujos de masa representan aplicaciones de la ecuación (15.46) que ameritan atención especial por su importancia práctica.

c. Deflexión de una corriente de fluido estacionario

Imagine una corriente que se desvía por un deflector estacionario, como se muestra en la figura 15.18. Se considera al volumen de control V como la región espacial que se indica, siendo $\mathbf{v}_{\text{ent}}$ y $\mathbf{v}_{\text{sal}}$ las velocidades con las que la corriente entra y sale del volumen de control, respectivamente. La fuerza $\Sigma\mathbf{F}$ es la resultante que actúa sobre el fluido dentro del volumen de control.

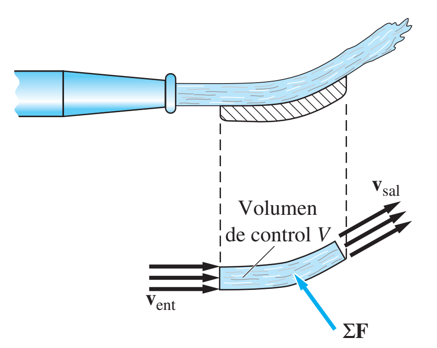


Fig. 15.18

Para el flujo estacionario, $\dot{m}_{\text{ent}} = \dot{m}_{\text{sal}} = \dot{m}$ (una constante), que significa que no existe acumulación de masa en el volumen de control V. Además, también es constante la cantidad de movimiento del fluido en el volumen de control; es decir, $\dot{\mathbf{p}}_V = \mathbf{0}$. Al hacer estas sustituciones en la ecuación (15.46) se obtiene

$$\Sigma\mathbf{F} = \dot{m}(\mathbf{v}_{\text{sal}} - \mathbf{v}_{\text{ent}}) \tag{15.47}$$

Observe que la fuerza resultante $\Sigma\mathbf{F}$ que actúa sobre el fluido es constante en el caso del flujo estacionario.

d. Propulsión de cohetes

La figura 15.19(a) muestra un cohete en vuelo vertical. La masa del mismo, incluyendo su contenido, se denota con $M(t)$ y su velocidad es $\mathbf{v}(t) = v(t)\mathbf{j}$, donde t es el tiempo. El cohete expulsa gases a razón $\dot{m}$ con la velocidad de tobera constante $\mathbf{u} = -u\mathbf{j}$ *relativa al cohete*.

El cohete y su interior se seleccionan como volumen de control V. El cohete consume sólo el combustible que transporta (no hay toma de aire), entonces las razones del flujo de masa son

$$\dot{m}_{\text{sal}} = \dot{m} \quad \text{y} \quad \dot{m}_{\text{ent}} = 0 \tag{h}$$

La cantidad de movimiento de la masa dentro del volumen de control es $\mathbf{p}_V = Mv\mathbf{j}$, que al derivarla respecto al tiempo se obtiene

$$\dot{\mathbf{p}}_V = \dot{M}v\mathbf{j} + M\dot{v}\mathbf{j} = -\dot{m}v\mathbf{j} + M\dot{v}\mathbf{j} \tag{i}$$

donde se ha sustituido $\dot{M} = -\dot{m}$ (ésta es la razón con la que se consume el combustible). La velocidad del gas expulsado puede escribirse como

$$\mathbf{v}_{\text{sal}} = (v - u)\mathbf{j} \tag{j}$$

En la figura 15.19(b) se muestra el diagrama de cuerpo libre (DCL) del cohete y su contenido. La única fuerza que actúa sobre el cohete es su peso total (la resistencia del aire y la presión de los gases en la salida de la tobera se desprecian). Al sustituir $\Sigma\mathbf{F} = -Mg\mathbf{j}$ y las ecuaciones de la (h) a la (j) en la ecuación (15.46), se obtiene

$$-Mg\mathbf{j} = -\dot{m}v\mathbf{j} + M\dot{v}\mathbf{j} + \dot{m}(v - u)\mathbf{j}$$

que se simplifica a

$$\dot{m}u - Mg = M\dot{v} \tag{15.48}$$

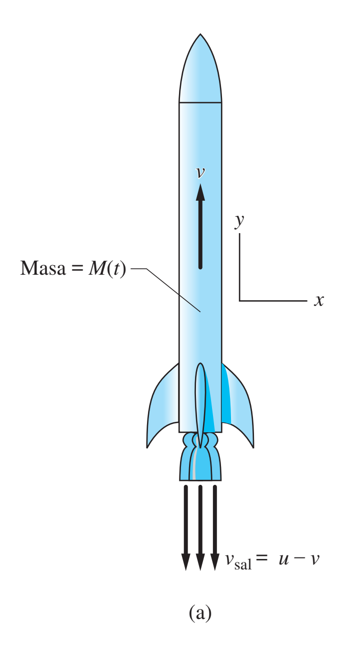
Se sustituye $\dot{v} = a$, donde a es la aceleración del cohete y queda

$$T = \dot{m}u \tag{15.49}$$

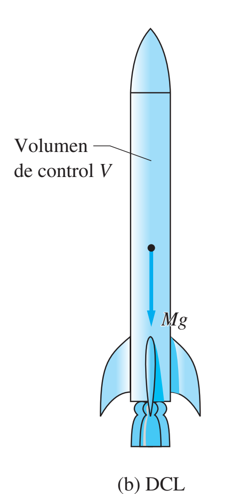
La ecuación (15.48) será

$$T - Mg = Ma \tag{15.50}$$

La ecuación (15.50) muestra que T representa una fuerza, llamada *empuje*, que tiende a impulsar al cohete.



(a)

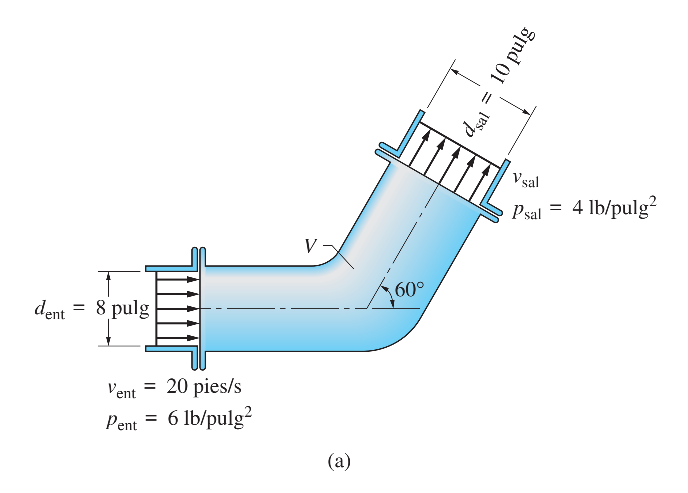


(b) DCL

Fig. 15.19

Problema de ejemplo 15.17

La figura (a) muestra el agua que entra en un codo doblado a 60° respecto a la horizontal, a una velocidad $v_{ent} = 20$ pies/s. Conforme el agua pasa por el codo, su presión cae de $p_{ent} = 6$ lb/pulg^2 a $p_{sal} = 4$ lb/pulg^2 y el diámetro del tubo se incrementa de $d_{ent} = 8$ pulg a $d_{sal} = 10$ pulg. Determine la fuerza ejercida por el agua sobre el codo. (El agua tiene un peso específico de 62.4 lb/pie^3.)



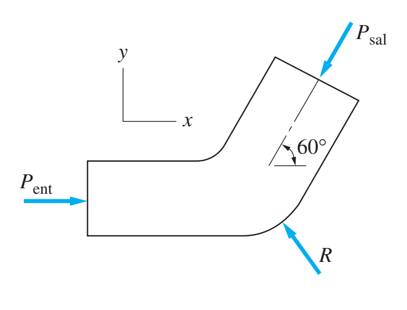
(a)

Solución

Este problema implica un flujo estacionario, entonces se puede resolver utilizando la ecuación (15.47):

$$\Sigma \mathbf{F} = \dot{m}(\mathbf{v}_{sal} - \mathbf{v}_{ent}) \quad \text{(a)}$$

Como se indica en la figura (a), el interior del codo se selecciona como volumen V de control. En la figura (b) se muestra el diagrama de cuerpo libre del agua en el volumen de control, donde P_{ent} y P_{sal} son las fuerzas debido a las presiones en las secciones de entrada y salida y $\mathbf{R}$ es la fuerza ejercida sobre el agua por la pared del codo (también debería incluirse el peso del agua si el plano del codo no fuera horizontal).



(b) DCL

La fuerza $\Sigma\mathbf{F}$ en la ecuación (a) es la resultante de las fuerzas que aparecen en el DCL. Si se supone que la distribución de presión es constante en cada sección transversal, se obtiene

$$P_{ent} = p_{ent}A_{ent} = (6)\left[\frac{\pi(8)^2}{4}\right] = 301.6 \text{ lb}$$

$$P_{sal} = p_{sal}A_{sal} = (4)\left[\frac{\pi(10)^2}{4}\right] = 314.2 \text{ lb}$$

donde A denota el área de la sección transversal del tubo.

Debido a que el flujo es estacionario (es decir, no existe acumulación de agua en V), se tiene $A_{ent}v_{ent} = A_{sal}v_{sal}$. Por tanto, la rapidez del agua saliendo del volumen de control es

$$v_{sal} = v_{ent}\frac{A_{ent}}{A_{sal}} = v_{ent}\left(\frac{d_{ent}}{d_{sal}}\right)^2 = 20\left(\frac{8}{10}\right)^2 = 12.800 \text{ pies/s}$$

La razón de flujo de masa a través del tubo es $\dot{m} = \rho A v$, donde ρ es la densidad de masa del agua y v representa su rapidez. Utilizando los valores en la sección de entrada del codo (también podrían utilizarse los valores en la sección de salida), se obtiene

$$\dot{m} = \rho A_{ent}v_{ent} = \left(\frac{62.4}{32.2}\right)\left[\frac{\pi}{4}\left(\frac{8}{12}\right)^2\right](20) = 13.529 \text{ slugs/s}$$

Cuando se hace referencia a la figura (b), el lado izquierdo de la ecuación (a) es

$$\begin{aligned}\Sigma\mathbf{F} &= P_{ent}\mathbf{i} - P_{sal}(\cos 60°\mathbf{i} + \operatorname{sen} 60°\mathbf{j}) + \mathbf{R} \\ &= 301.6\mathbf{i} - 314.2(\cos 60°\mathbf{i} + \operatorname{sen} 60°\mathbf{j}) + \mathbf{R} = 144.5\mathbf{i} - 272.2\mathbf{j} + \mathbf{R} \text{ lb} \quad \text{(b)}\end{aligned}$$

El lado derecho de la ecuación (a) es

$$\dot{m}(\mathbf{v}_{sal} - \mathbf{v}_{ent}) = 13.529[12.800(\cos 60°\mathbf{i} + \operatorname{sen} 60°\mathbf{j}) - 20\mathbf{i}] = -184.0\mathbf{i} + 150.0\mathbf{j} \text{ lb} \quad \text{(c)}$$

Al igualar las ecuaciones (b) y (c), se obtiene

$$144.5\mathbf{i} - 272.2\mathbf{j} + \mathbf{R} = -184.0\mathbf{i} + 150.0\mathbf{j}$$

que da la fuerza aplicada por el codo sobre el agua

$$\mathbf{R} = -329\mathbf{i} + 422\mathbf{j} \text{ lb}$$

Por tanto, la fuerza ejercida por el agua sobre el codo es

$$-\mathbf{R} = 329\mathbf{i} - 422\mathbf{j} \text{ lb}$$ *Respuesta*

Problema de ejemplo **15.18**

Un cohete en vuelo vertical tiene una masa total M_0 en el despegue y consume combustible (incluyendo el oxidante) a razón constante $\dot{m}$. También es constante la velocidad u de los gases expulsados relativa al cohete. Deduzca la expresión para la velocidad de este último como una función del tiempo t, donde t se mide desde el momento del despegue.

Solución

La ecuación de movimiento del cohete está dada por la ecuación (15.48):

$$\dot{m}u - Mg = M\dot{v} \tag{a}$$

La masa del cohete al tiempo t después del despegue es $M = M_0 - \dot{m}t$ Al sustituir en la ecuación (a) resulta

$$\dot{m}u - (M_0 - \dot{m}t)g = (M_0 - \dot{m}t)\dot{v}$$

Cuando se despeja a $\dot{v}$, se obtiene

$$\dot{v} = \frac{\dot{m}u}{M_0 - \dot{m}t} - g$$

Al integrar respecto al tiempo se obtiene

$$v = \int \dot{v}\,dt = -u\ln(M_0 - \dot{m}t) - gt + C \tag{b}$$

donde C es la constante de integración. La condición inicial es $v = 0$ cuando $t = 0$ que, al sustituir en la ecuación (b), da

$$0 = -u\ln M_0 + C$$

Por tanto,

$$C = u\ln M_0$$

y la ecuación (b) queda

$$v = u\ln\left(\frac{M_0}{M_0 - \dot{m}t}\right) - gt \qquad \textit{Respuesta}$$

Problemas

15.123 Un cohete de 2.5 Mg está en vuelo vertical por encima de la atmósfera de la Tierra, donde la aceleración gravitacional es 9.5 m/s^2. El motor consume combustible a razón de 98 kg/s y expulsa gases con velocidad de 500 m/s relativa al cohete. Determine: (a) el empuje del motor, y (b) la aceleración del cohete.

15.124 Un cohete Saturno V pesa 6.2×10^6 lb en el despegue. Su primera etapa desarrolla un empuje de 7.5×10^6 lb mientras consume 4.4×10^6 lb de combustible durante su encendido de 2.5 min. Obtenga: (a) la velocidad de los gases expulsados relativa al cohete y (b) la velocidad del cohete al final de la combustión. Suponga que el vuelo es vertical y desprecie la resistencia del aire y el cambio de la gravedad con la altura. (Sugerencia: véase el problema de ejemplo 15.18).

15.125 El cohete V-2 de la Segunda Guerra Mundial pesaba 14 ton en el despegue, incluyendo 9.5 ton de combustible (alcohol y oxígeno). El vuelo impulsado duraba 65 s y el cohete alcanzaba una velocidad máxima de 3600 mi/h en vuelo vertical. Calcule el empuje del motor del cohete. (*Sugerencia:* véase el problema de ejemplo 15.18.)

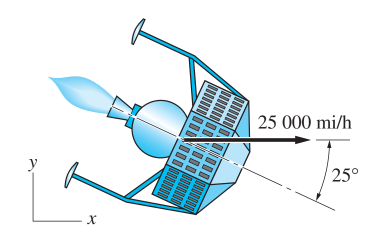


Fig. P15.126

15.126 La sonda espacial pesa 1200 lb y viaja con una rapidez constante de 25 000 mi/h cuando su impulsor se enciende durante 100 s. Durante el encendido, el consumo de combustible es de 5 lb/s y los gases se expulsan a 4000 mi/h relativos al vehículo. Si la línea de empuje está inclinada a 25° respecto a la dirección inicial de viaje, determine la velocidad final de la sonda. Desprecie el efecto de la gravedad.

15.127 La manguera descarga un chorro de agua contra la placa plana. El diámetro del chorro es $d = 40$ mm y la rapidez del agua es 50 m/s. Calcule la fuerza ejercida por el chorro sobre la placa si ésta (a) es estacionaria y (b) se mueve hacia la derecha a 4 m/s. (La densidad del agua es 1000 kg/m^3.)

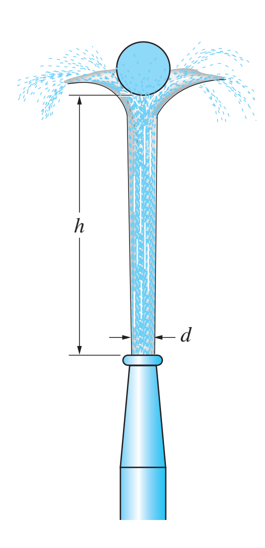


Fig. P15.129

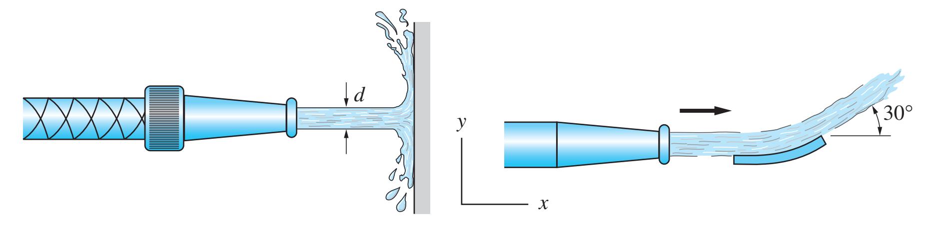


Fig. P15.127 **Fig. P15.128**

15.128 El chorro de agua se desvía 30° con un deflector estacionario, como se muestra. La razón de flujo es 210 gal/min y la rapidez del chorro es 50 pies/s. Determine la fuerza ejercida por el chorro sobre el deflector. (El agua pesa 8.34 lb/gal.)

15.129 La pelota de 0.15 kg se encuentra estacionaria gracias a un chorro de agua, como se muestra en la figura. En la boquilla, la rapidez del chorro es de 6 m/s y su diámetro es $d = 12$ mm. Encuentre: (a) la velocidad con la que el chorro golpea a la pelota y (b) la altura h de la pelota. (La densidad del agua es 1000 kg/m^3.)

15.130 El agua fluye sobre un vertedero a razón de 2×10^5 gal/min. Si la rapidez del agua en lo alto del vertedor es 8 pies/s, calcule la fuerza horizontal que el agua en movimiento aplica al vertedor. Suponga que la energía mecánica del agua se conserva. (Utilice 8.34 lb/gal para el peso específico del agua.)

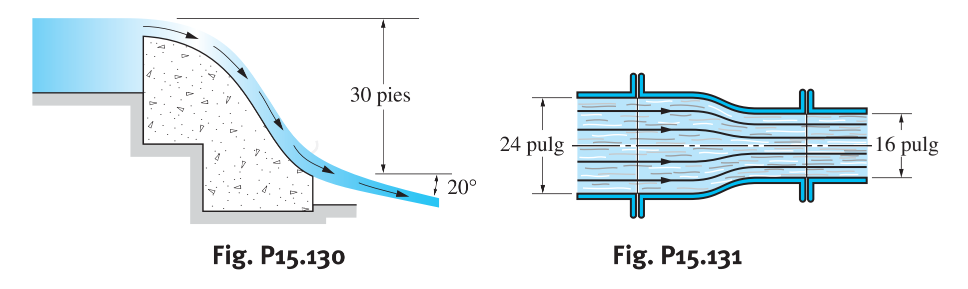


Fig. P15.130 **Fig. P15.131**

15.131 El agua entra a la sección reducida del tubo con una rapidez de 10 pies/s y una presión de 5 lb/pulg^2. Si la presión en la salida es 2.27 lb/pulg^2, determine la fuerza horizontal que el agua aplica sobre el reductor. (El agua pesa 62.4 lb/pies^3.)

15.132 El agua entra al codo horizontal en el tubo a una velocidad de 4.8 m/s. Las presiones de entrada y salida son 23 kPa y 32 kPa, respectivamente. Encuentre la fuerza horizontal que el agua aplica al codo en el tubo. (La densidad del agua es 1000 kg/m^3.)

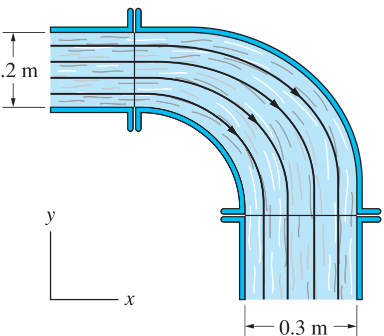


Fig P15.132

15.133 La cadena de masa 3.2 kg/m se levanta con rapidez constante de 1.5 m/s. Obtenga la tensión en la cadena en *A*.

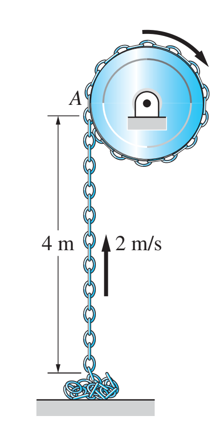


Fig. P15.133

15.134 Cuando se empuja el quitanieve a 3 pies/s, éste elimina la nieve a razón de 20 lb/s. La velocidad de descarga relativa al quitanieve es 30 pies/s en la dirección que se muestra. Determine la fuerza horizontal *P* que se requiere para empujar el quitanieve. Desprecie la resistencia por rodamiento.

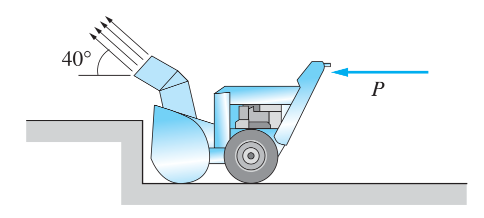


Fig. P15.134

15.135 El diámetro del orificio reentrante en un tanque de agua es 5 pulg. En la sección *a-a* la presión del agua es de 624 lb/pie^2 y la velocidad del agua es despreciable. Si la velocidad del chorro saliente es 25.4 pies/s, encuentre el diámetro *d* del chorro. (*Nota:* el agua pesa 62.4 lb/pie^3.)

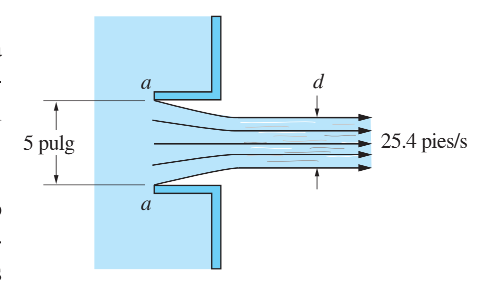


Fig. P15.135

15.136 Es posible asistir el despegue de un avión a reacción al dirigir hacia abajo el escape de su motor con la ayuda de un deflector. El motor que se muestra consume aire a razón de 80 kg/s y combustible a 1.6 kg/s. La mezcla aire-combustible es expulsada a 660 m/s. Si dos de esos motores están unidos a un avión de 8000 kg,

entonces ¿cuál es el menor ángulo θ del deflector con el que se lograría un despegue inmediato? ¿Cuál es la aceleración correspondiente del avión?

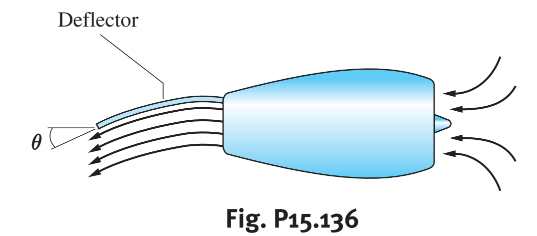


Fig. P15.136

15.137 El cohete de 5000 lb está en vuelo propulsado a una altitud donde la aceleración gravitacional es $g = 28.8$ pies/s^2. El motor consume combustible a razón de 250 lb/s, expulsando los gases a 1500 pies/s relativa al cohete. Calcule el ángulo θ para que la aceleración del cohete sea horizontal.

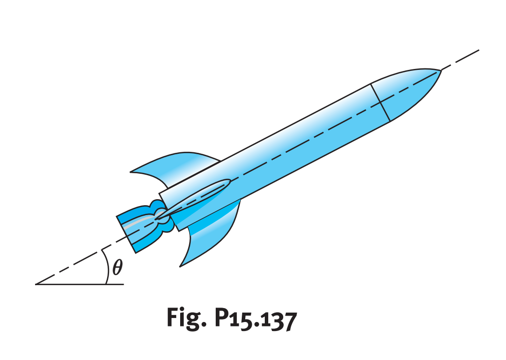


Fig. P15.137

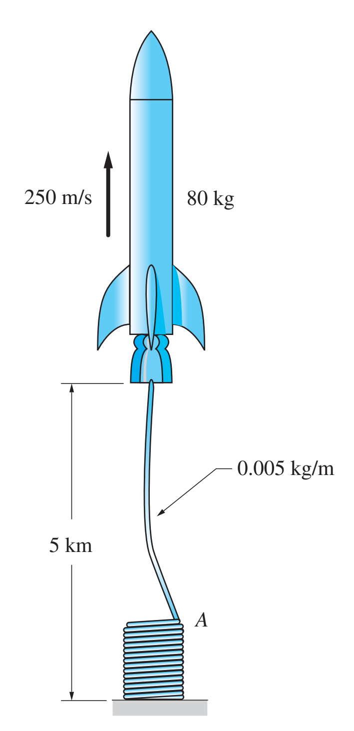


Fig. P15.138

15.138 El cohete de 80 kg está conectado a una estación de control en tierra mediante un alambre guía que se desenrolla conforme el cohete asciende. La masa del alambre es 0.005 kg/m y se mantiene una tensión constante de 20 N en el alambre en A. En el instante que se muestra, el cohete se encuentra sin propulsión a una elevación de 5 km y vuela a 250 m/s. Determine la aceleración del cohete en ese instante.

15.139 La fuerza P jala la cadena con velocidad constante $\dot{x} = 3$ pies/s. Obtenga P si la cadena pesa 2 lb/pie. Desprecie la fricción.

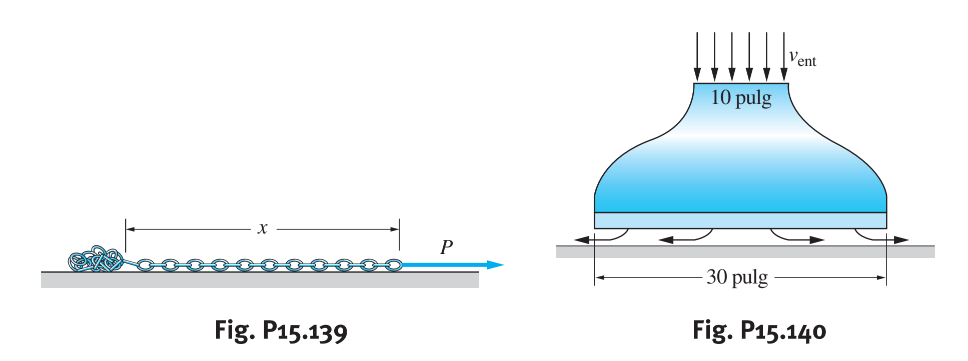


Fig. P15.139 **Fig. P15.140**

15.140 El modelo de 20 lb de un aerodeslizador toma aire con una rapidez $v_{ent} = 80$ pies/s y lo expulsa en sentido horizontal por abajo del faldón. Calcule la presión promedio abajo del faldón. Utilice 0.075 lb/pies^3 para el peso específico del aire.

15.141 Un conducto vertical descarga carbón sobre una banda transportadora a razón de 60 kg/s. Si la rapidez de la banda es constante a 3 m/s, encuentre la potencia que se requiere para hacerla funcionar. Desprecie la fricción.

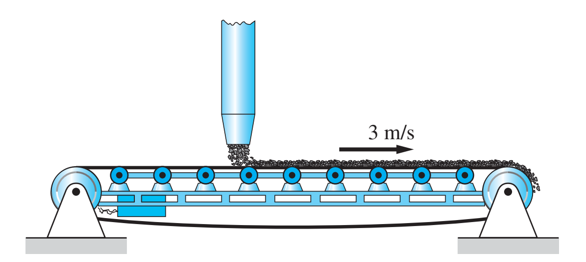


Fig. P15.141

15.142 Cada tobera de la turbina descarga agua a razón de 0.8 lb/s con la velocidad $u = 18$ pies/s relativa a la tobera. Encuentre: (a) la potencia generada por la turbina en términos de la velocidad constante v de la tobera, y (b) la potencia máxima y el valor correspondiente de v. Desprecie la velocidad con la que el agua ingresa a las toberas.

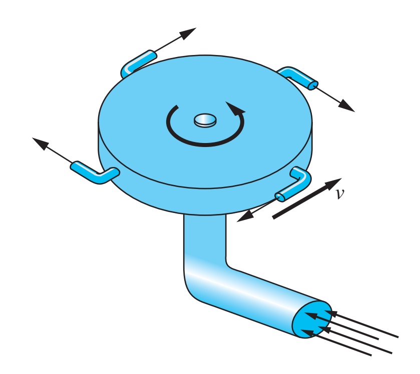


Fig. P15.142

Repaso de ecuaciones

Movimiento relativo entre dos partículas

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A} \quad \mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} \quad \mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$$

Movimiento del centro de masa de un sistema de partículas

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{d\bar{\mathbf{r}}}{dt} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{v}_i \qquad \bar{\mathbf{a}} = \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} = \frac{d^2\bar{\mathbf{r}}}{dt^2} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{a}_i$$

Ecuación de movimiento del centro de masa

$$\Sigma\mathbf{F} = m\bar{\mathbf{a}}$$

Principio de trabajo y energía cinética

$$(U_{1-2})_{\text{ext}} + (U_{1-2})_{\text{int}} = T_2 - T_1$$

Conservación de la energía mecánica

$$V_1 + T_1 = V_2 + T_2$$

Relaciones fuerza-cantidad de movimiento y momento-cantidad de movimiento angular

$$\Sigma\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}} \qquad \Sigma\mathbf{M}_A = \dot{\mathbf{h}}_A$$

$\mathbf{p} = m\bar{\mathbf{v}}$ = cantidad de movimiento lineal del sistema
$\mathbf{h}_A$ = cantidad de movimiento angular del sistema respecto a A

Ecuaciones de impulso-cantidad de movimiento

$$\mathbf{L}_{1-2} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$$
$$(\mathbf{A}_A)_{1-2} = (\mathbf{h}_A)_2 - (\mathbf{h}_A)_1 \quad (A \text{ es un punto fijo o centro de masa})$$

$\mathbf{L}$ = impulso lineal de las fuerzas externas
$\mathbf{A}_A$ = impulso angular de fuerzas externas respecto de A

Coeficiente de restitución de un impacto elástico

$$e = \frac{\text{velocidad de separación}}{\text{velocidad de aproximación}}$$

Problemas de repaso

15.143 Despreciando la fricción, determine la aceleración de cada bloque cuando se aplica al bloque A una fuerza horizontal de 80 lb.

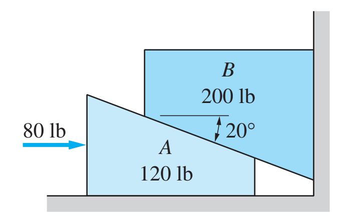


Fig. P15.143

15.144 Los proyectiles A y B se lanzan de manera simultánea en $t = 0$ con las velocidades que se muestran. Suponga que ambas trayectorias se encuentran en el mismo plano vertical, obtenga: (a) el vector de posición relativa $\mathbf{r}_{B/A}$ como una función de t, y (b) la menor distancia entre los proyectiles. Desprecie la resistencia del aire.

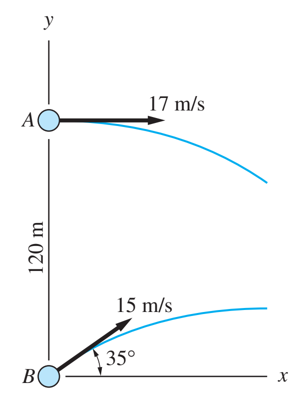


Fig. P15.144

15.145 Un automóvil de 4000 lb se dirige a 25 mi/h hacia un vagón de ferrocarril de cama plana de 32 000 lb que se encuentra estacionario, y frena hasta detenerse relativo al vagón. Encuentre la velocidad final de ambos.

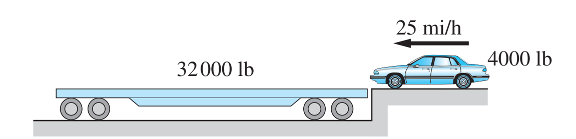


Fig. P15.145

15.146 Los vagones de carbón A y B chocan con las velocidades que se muestran sin acoplarse. Si se sabe que la velocidad de B es 5.2 mi/h después del choque, determine la velocidad de A.

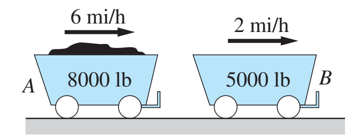


Fig. P15.146

15.147 Los bloques *A* y *B* están unidos por un cable que pasa por las cinco poleas. Encuentre la velocidad de *B* si *A* se mueve hacia abajo a 2 m/s.

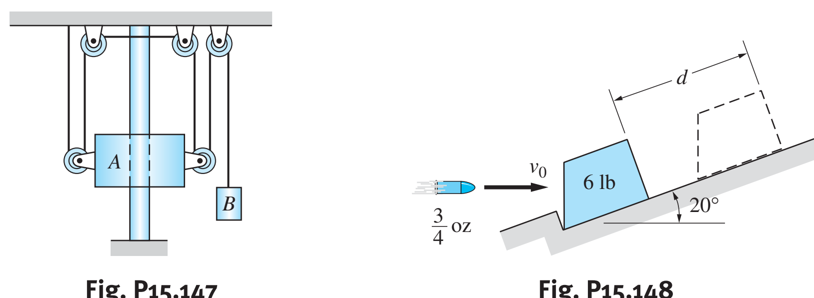


Fig. P15.147 **Fig. P15.148**

15.148 La bala de $\frac{3}{4}$ oz golpea al bloque estacionario de 6 lb con velocidad horizontal v_0 y queda incrustada. Si el desplazamiento máximo del bloque después del impacto es $d = 1.4$ pies, obtenga v_0. Desprecie la fricción y suponga que el bloque no se despega de la superficie inclinada.

15.149 La velocidad aerodinámica del helicóptero en vuelo horizontal es 125 mi/h, hacia el este. Si la velocidad respecto al suelo es 160 mi/h en dirección de 25° al noreste, determine la magnitud y la dirección de la velocidad del viento.

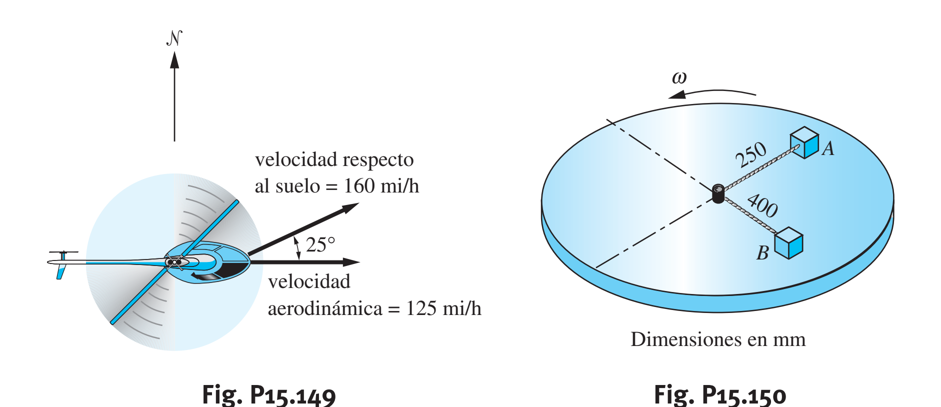


Fig. P15.149 **Fig. P15.150**

15.150 Un disco, que tiene una pequeña clavija en el centro, rota con rapidez angular ω. Los bloques *A* y *B*, cada uno con masa de 2 kg, están unidos por medio de una cuerda que pasa alrededor de la clavija. Inicialmente, los bloques están en reposo relativos al disco. Si se incrementa gradualmente la rapidez angular del disco, determine el valor de ω en el que los bloques empezarán a deslizarse sobre el mismo. El coeficiente de fricción estática para cada bloque es 0.25 y la fricción en la clavija es despreciable.

m m 2m
A B C

Fig. P15.151

15.151 Las tres masas están suspendidas del sistema cable-poleas que se muestra. Obtenga la aceleración de cada masa en términos de la aceleración gravitacional *g*. Desprecie las masas de las poleas.

15.152 El cohete *A* de 620 lb está en vuelo no propulsado cerca de la superficie terrestre cuando se rompe en dos partes; la punta cónica *B* de 185 lb y el impulsor

C de 435 lb. La figura muestra las velocidades de las dos partes 60 s después del rompimiento (observe que *A*, *B* y *C* están en el mismo plano vertical). Determine la velocidad (magnitud y dirección) del cohete justo antes de romperse.

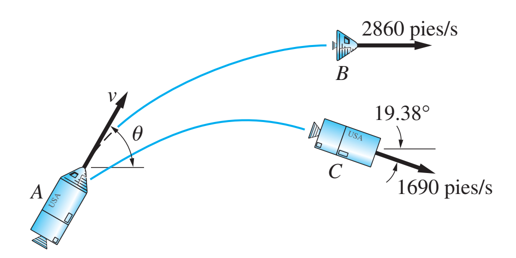


Fig. P15.152

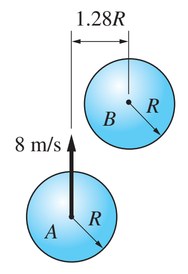


Fig. P15.153

15.153 Dos bolas de billar idénticas de radio *R* están sobre una mesa horizontal. Después de que la bola *A* golpea a la bola *B* estacionaria con una velocidad de 8 m/s, la rapidez de *B* es 5.52 m/s. Obtenga: (a) el coeficiente de restitución entre las bolas, y (b) la rapidez de *A* después del impacto. Desprecie la fricción.

15.154 Una pequeña pieza de hierro al rojo vivo se coloca sobre un yunque y se golpea con el martillo que se mueve a la velocidad v_0. Las masas del martillo y del yunque son m_h y m_a, respectivamente, y el coeficiente de restitución entre el martillo y el hierro caliente es *e*. Si el yunque se encuentra encima de una base elástica (como indican los resortes en la figura), deduzca la expresión para el impulso que el martillo suministra al metal caliente.

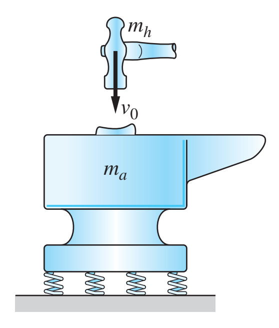


Fig. P15.154

15.155 La cuerda que une al deslizador *A* con la masa *B* pasa por dos pequeñas poleas, una de las cuales está unida a *A*. La masa *B* tiene una velocidad constante v_0, dirigida hacia abajo. En el instante en que $y_A = b$, determine: (a) la velocidad de *A*, y (b) la aceleración de *A*.

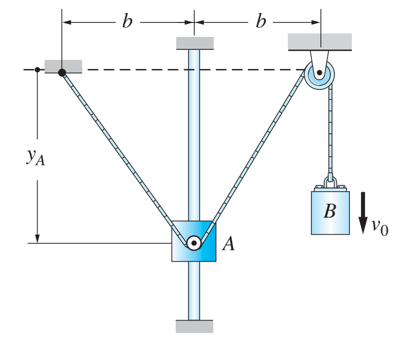


Fig. P15.155

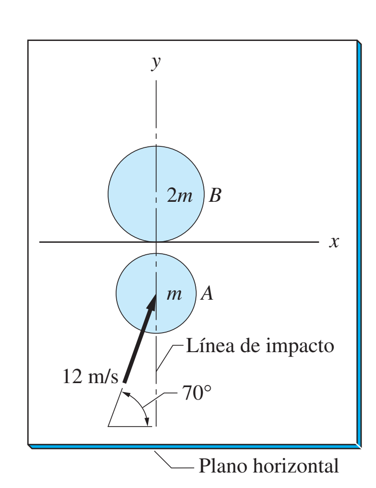


Fig. P15.156

15.156 Los dos discos *A* y *B* están sobre una superficie horizontal. *A* es propulsado contra *B*, que inicialmente se encuentra estacionario, con la velocidad que se muestra. Si $e = 0.75$, calcule la velocidad de cada disco después del impacto. Desprecie la fricción.

15.157 Dos bloques idénticos A y B de masa m están en reposo sobre una superficie horizontal sin fricción. El resorte con rigidez k, que une a los bloques, no está deformado. Si a B se le da una velocidad inicial v_0 hacia la derecha, determine: (a) la relación entre $v_{B/A}$ y $x_{B/A}$ para el movimiento subsiguiente y (b) el valor máximo de $x_{B/A}$.

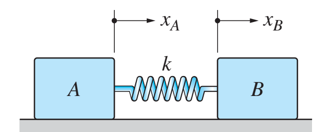


Fig. P15.157

15.158 Un cañón dispara el proyectil de artillería A de 26 lb con velocidad inicial de 2000 pies/s. El resorte, con rigidez de 28×10^3 lb/pie, amortigua el retroceso del cañón B de 700 lb en su montura C. Determine la deformación máxima del resorte después del disparo. Desprecie la fricción.

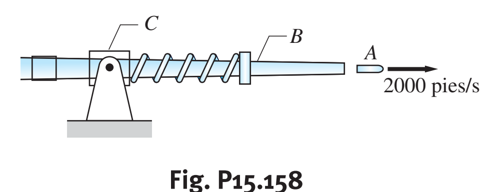


Fig. P15.158

15.159 Determine la mayor fuerza P que puede aplicarse al bloque B de 6 lb sin hacer que el bloque A de 3 lb se mueva hacia arriba sobre B. En la figura se indican los coeficientes de fricción estática y cinética entre las superficies en contacto.

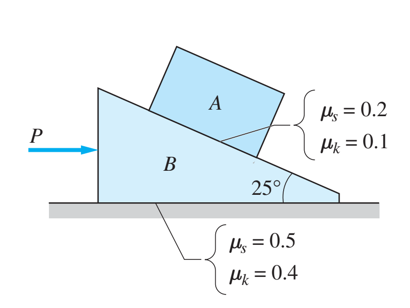


Fig. P15.159

15.160 Los automóviles A y B viajan con las velocidades que se muestran cuando chocan. Si se supone que el impacto es plástico, determine: (a) la velocidad común de los vehículos justo después del impacto, y (b) el porcentaje de energía mecánica absorbida por el choque.

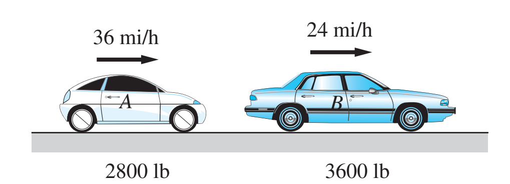


Fig. P15.160

15.161 La bola de billar A debe rebotar en el punto B de la baranda, de manera que entre en la tronera C. El coeficiente de restitución para el impacto entre la bola y la baranda es 0.85. Despreciando la fricción, encuentre la distancia x que establece la ubicación de B.

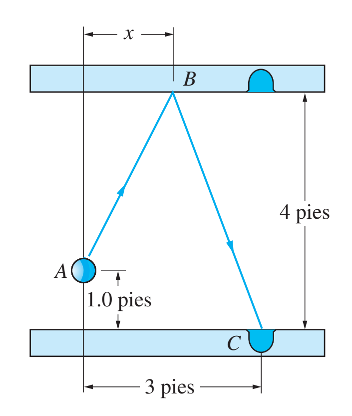
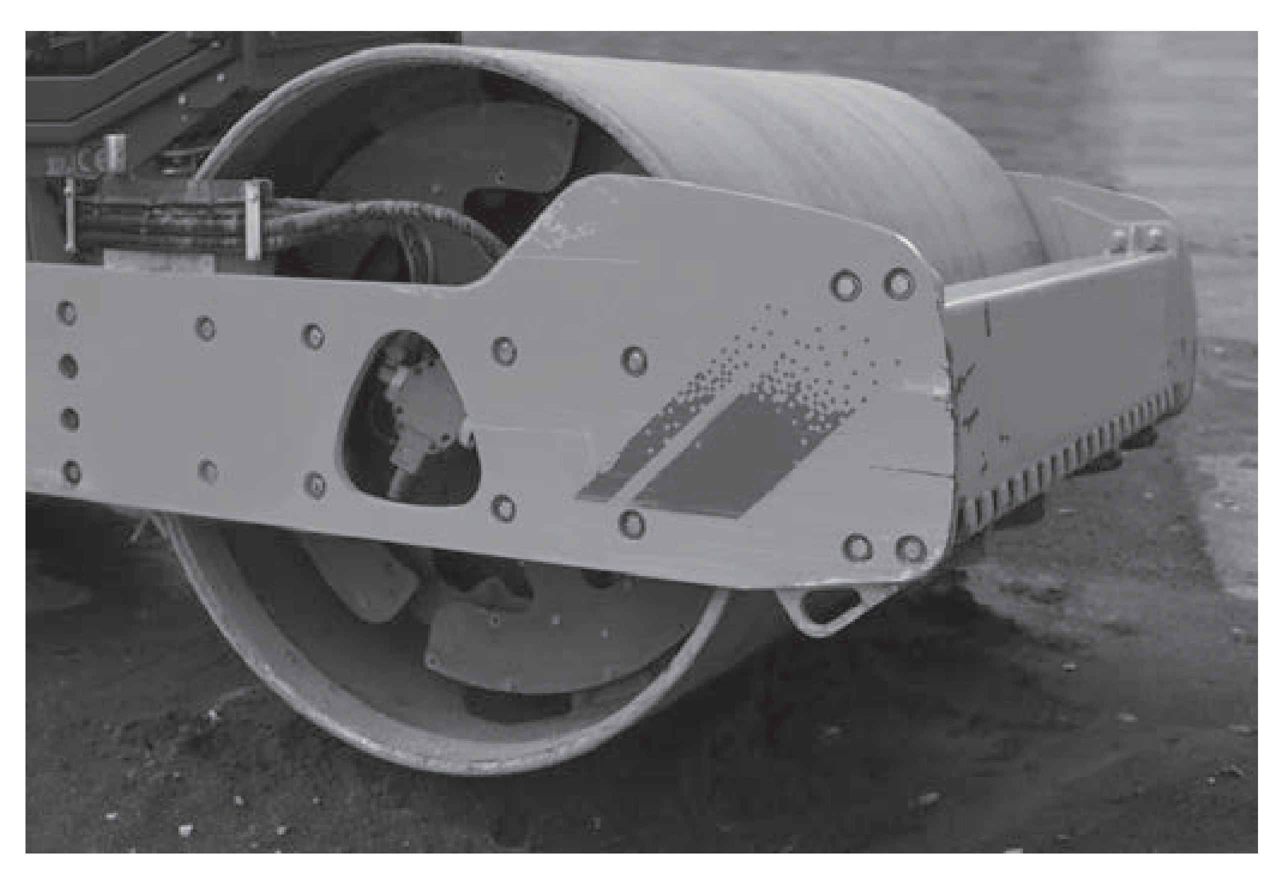


Fig. P15.161

16

Cinemática plana de cuerpos rígidos





El rodamiento sin deslizamiento es un problema de la cinemática que se encuentra con mucha frecuencia. Este capítulo contiene varios problemas de ejemplo que analizan el rodamiento, como el 16.4 y los problemas 16.20 y 16.23.
(© Spe/Dreamstime.com)

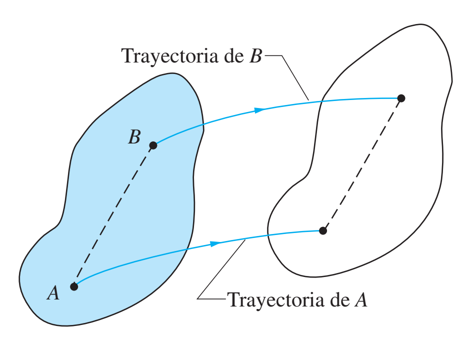
16.1 Introducción

Se dice que un cuerpo es *rígido* si la distancia entre cualesquiera dos puntos de éste se mantiene constante. En otras palabras, un cuerpo rígido no se deforma. Por supuesto, este concepto es una idealización, ya que todos los cuerpos experimentan una deformación cuando se encuentran sometidos a la acción de las fuerzas. Pero si la deformación es suficientemente pequeña ("pequeña" en general significa despreciable comparada con las dimensiones del cuerpo) entonces se justifica la suposición de rigidez.

Este capítulo sólo se ocupa de la cinemática del *movimiento en un plano* de los cuerpos rígidos. Un cuerpo realiza movimiento en un plano si todos sus puntos permanecen a una distancia constante de un plano de referencia fijo, llamado *plano de movimiento* del cuerpo.

En otras palabras, todos los puntos en el cuerpo se mueven en planos que son paralelos al plano de movimiento. Existen tres categorías de este movimiento:

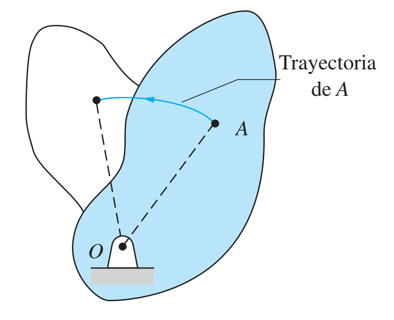
- *Traslación* es el caso especial en el que el cuerpo se mueve sin rotación; es decir, cualquiera de sus líneas permanece paralela a su posición inicial, como se muestra en la figura 16.1(a).* Debido a que todos los puntos en el cuerpo tienen el mismo desplazamiento, el movimiento de un punto determina el del cuerpo entero.



Traslación

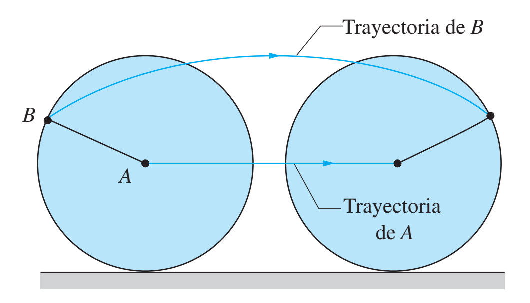
Fig. 16.1(a)

- *Rotación respecto a un eje fijo* es el caso especial en el que una línea en el cuerpo, llamada *eje de rotación*, está fija en el espacio. En consecuencia, cada punto que no está sobre el eje de rotación se mueve en un círculo alrededor del eje, como se muestra en la figura 16.1(b) (el eje de rotación en O es perpendicular al plano de la página).
- *Movimiento general en un plano* es la superposición de traslación y rotación. En la figura 16.1(c), el disco que rueda es un ejemplo de este movimiento: gira y se traslada simultáneamente.



Rotación respecto a un eje fijo

Fig. 16.1(b)



Movimiento general en un plano

Fig. 16.1(c)

*Cuando se ilustra el movimiento en un plano, con frecuencia es conveniente mostrar una sección transversal representativa del cuerpo, que sea paralela al plano de movimiento.

16.2 Movimiento angular en un plano

En este apartado se presentan el desplazamiento, la velocidad y la aceleración angulares de las líneas y los cuerpos rígidos que se mueven en un plano.

Posición angular Considere el cuerpo rígido $\mathcal{B}$ de la figura 16.2 que se mueve en el plano xy. Sea AB una línea integrada en $\mathcal{B}$ y que se encuentra en el plano de movimiento.* El ángulo $\theta(t)$ entre AB y una línea de referencia fija, como el eje x, es la *coordenada de posición angular de la recta AB*.

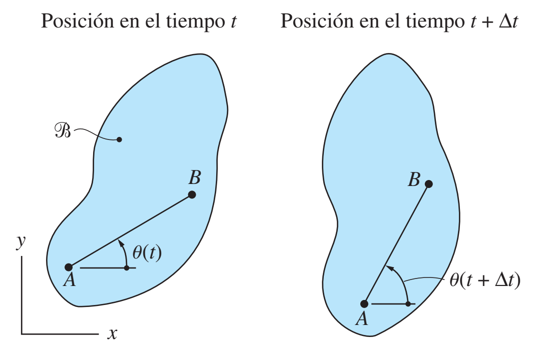


Fig. 16.2

Desplazamiento angular Durante el intervalo de tiempo Δt, la coordenada de posición angular de AB cambia de $\theta(t)$ a $\theta(t + \Delta t)$, como se muestra en la figura 16.2. El desplazamiento angular de la recta AB durante este intervalo de tiempo se define como

$$\Delta\theta = \theta(t + \Delta t) - \theta(t) \tag{16.1}$$

Ahora se muestra que todas las rectas en $\mathcal{B}$ que están en el plano de movimiento tienen el mismo desplazamiento angular. La figura 16.3 presenta dos de tales rectas,

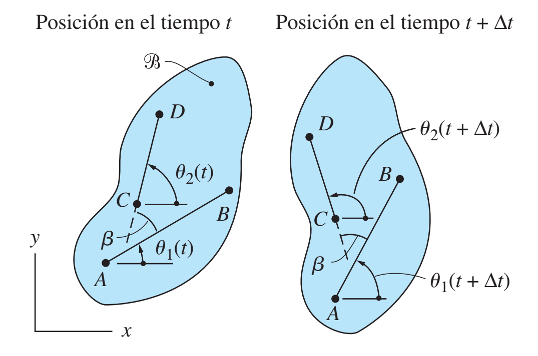


Fig. 16.3

*Aquí y en el análisis que sigue el término "plano de movimiento" también se aplica a cualquier plano que es paralelo al de movimiento.

AB y *CD*, con las coordenadas de posición angular $\theta_1(t)$ y $\theta_2(t)$, respectivamente. Ya que el cuerpo es rígido, el ángulo β entre las líneas no cambia entre las dos posiciones que se muestran en la figura; es decir, $\beta = \theta_2(t) - \theta_1(t) = \theta_2(t + \Delta t) - \theta_1(t + \Delta t)$. A esto sigue que $\theta_1(t + \Delta t) - \theta_1(t) = \theta_2(t + \Delta t) - \theta_2(t)$ o

$$\Delta\theta_1 = \Delta\theta_2$$

Puesto que *AB* y *CD* pueden elegirse de manera arbitraria en el plano de movimiento, se concluye que todas las rectas en este plano tienen el mismo desplazamiento angular. Por tanto, $\Delta\theta$ también se llama *desplazamiento angular del cuerpo* $\mathcal{B}$.

Velocidad angular La *velocidad angular* ω *de la recta AB* está definida como la derivada temporal de su coordenada de posición angular θ:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \qquad (16.2)$$

Ya que todas las rectas en el plano de movimiento tienen el mismo desplazamiento angular $\Delta\theta$, entonces también tienen la misma velocidad angular. Por tanto, a ω también se le llama *velocidad angular del cuerpo* $\mathcal{B}$. Las unidades que se usan para la velocidad angular son rad/s y rev/min.

Aceleración angular La *aceleración angular* α *de la recta AB* se define como la derivada respecto al tiempo de su velocidad angular:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} \quad \text{o} \quad \alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta} \qquad (16.3)$$

Debido a que la velocidad angular ω es la misma para todas las rectas en el plano de movimiento, entonces α también se conoce como *aceleración angular del cuerpo* $\mathcal{B}$. Las unidades de la aceleración angular que en general se usan son rad/s^2.

El tiempo *t* en la ecuación (16.3) puede eliminarse, como una variable explícita, si se utiliza la regla de la cadena para la derivación:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \omega\frac{d\omega}{d\theta} \qquad (16.4)$$

- Observe que las direcciones positivas de la velocidad y la aceleración angulares son las mismas que la dirección positiva supuesta para θ.
- Las ecuaciones (16.2)) a (16.4) son análogas a las (12.9) y (12.10) para el movimiento rectilíneo de una partícula: $v = \dot{x}$, $a = \dot{v} = \ddot{x}$ y $\alpha = v(dv/dx)$. Por tanto, los métodos matemáticos que se presentan en el apartado 12.4 pueden utilizarse para analizar la rotación angular en un plano.

Representación vectorial del movimiento angular Como $\Delta\theta$, ω y α tienen magnitud y dirección, algunas veces es conveniente representarlos como vectores empleando la regla de la mano derecha. Suponiendo que se tiene un sistema de coor-

denadas de mano derecha (en la figura 16.2 el eje z positivo debería apuntar hacia afuera de la página), puede escribirse

$$\Delta\boldsymbol{\theta} = \Delta\theta\mathbf{k} \qquad \boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k} = \dot{\theta}\mathbf{k} \qquad \boldsymbol{\alpha} = \alpha\mathbf{k} = \dot{\omega}\mathbf{k} = \ddot{\theta}\mathbf{k} \tag{16.5}$$

Comentario sobre el movimiento tridimensional En el movimiento en un plano, el desplazamiento angular es una cantidad vectorial porque tiene magnitud ($\Delta\theta$) y dirección (perpendicular al plano de movimiento), y obedece la ley del paralelogramo para la adición (sumar vectores colineales es un caso especial de la adición del paralelogramo). A esto sigue que la velocidad y la aceleración angulares también son vectores. Sin embargo, si el movimiento es tridimensional, los desplazamientos angulares no obedecen la ley del paralelogramo para la suma. Por tanto, los desplazamientos angulares, en general, *no* son vectores.

A modo de ilustración del carácter no vectorial de los desplazamientos angulares, considere un libro que se ha colocado en la posición inicial que se muestra en la figura 16.4(a) y las rotaciones angulares dadas $\Delta\theta_x = 90°$ (respecto del eje x) y $\Delta\theta_y = 90°$ (respecto al eje y). La figura 16.4(b) muestra la posición final del libro si las rotaciones son efectuadas en la secuencia $\Delta\theta_x$ y después $\Delta\theta_y$. La figura 16.4(c) representa el resultado si se efectúa primero $\Delta\theta_y$ seguida de $\Delta\theta_x$. A partir de esas figuras se observa que la orientación final del libro depende del orden en que se ejecutan

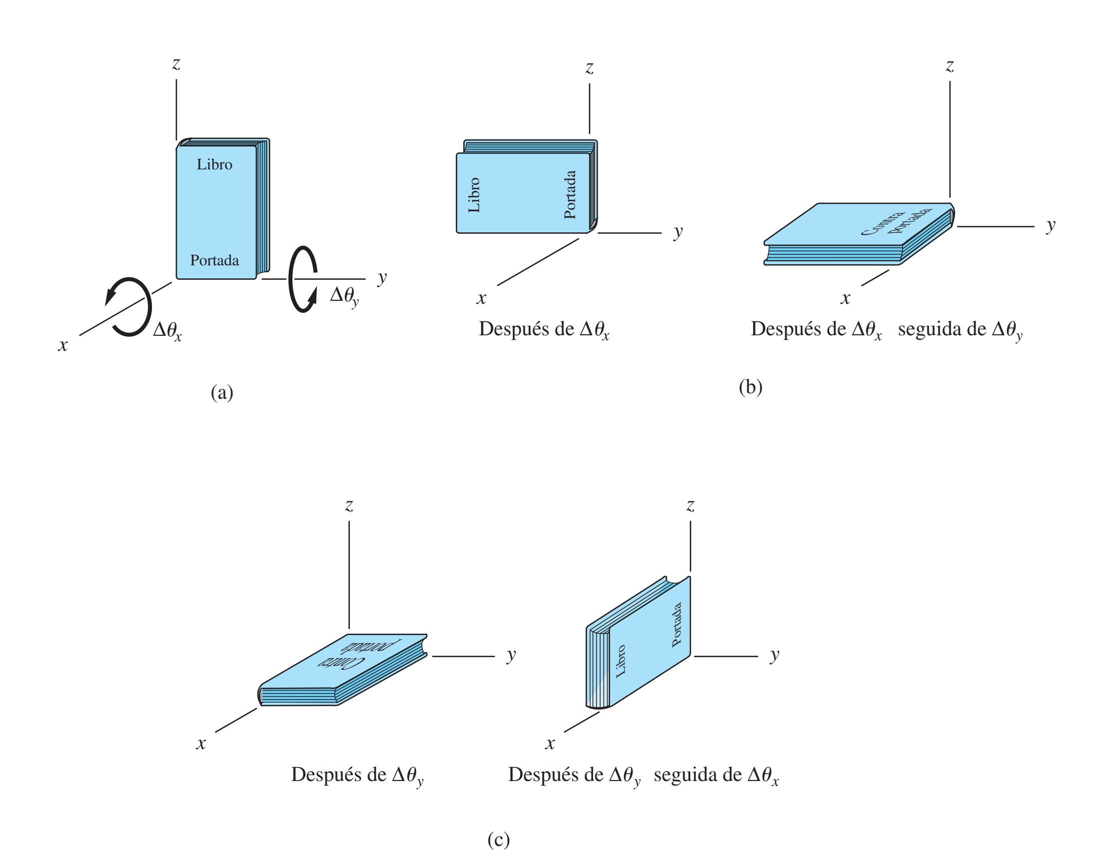


Fig. 16.4

las rotaciones. Se concluye que, en general, los desplazamientos angulares no son vectores porque no obedecen la propiedad conmutativa de la suma vectorial. Sin embargo, es posible demostrar* que los desplazamientos angulares diferenciales (infinitesimales) son vectores, aun en el movimiento tridimensional. Por esta razón, la velocidad y la aceleración angulares *siempre* son cantidades vectoriales.

16.3 *Rotación respecto a un eje fijo*

La rotación respecto a un eje fijo es el caso especial de movimiento en un plano donde una recta en el cuerpo, llamada *eje de rotación*, está fija en el espacio. La figura 16.5 muestra un cuerpo rígido que rota respecto a un eje. Sea B un punto en el cuerpo que está a una distancia R del eje. Puesto que el cuerpo es rígido, la trayectoria de B es un círculo de radio R que está en un plano perpendicular al eje de rotación. El centro O del círculo está sobre el eje y la coordenada de posición angular de la recta radial OB se denota con θ. Ya que OB está en el plano de movimiento, la velocidad y la aceleración angulares del cuerpo son, de acuerdo con las ecuaciones (16.2) y (16.3),

$$\omega = \dot{\theta} \qquad \alpha = \dot{\omega} = \ddot{\theta} \tag{16.6}$$

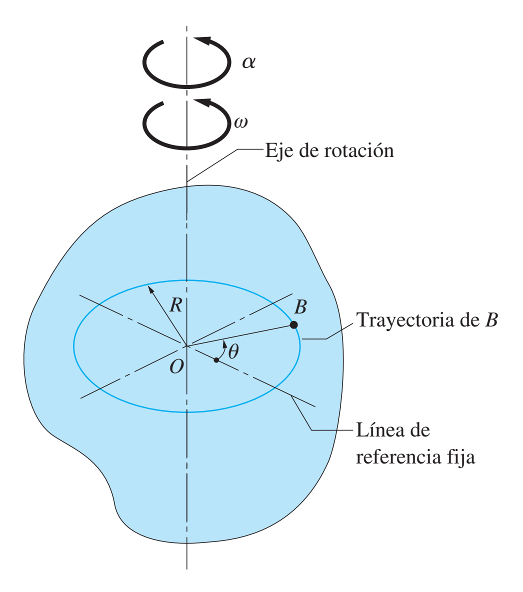


Fig. 16.5

Cinemática de un punto en el cuerpo El movimiento de una partícula sobre una trayectoria circular de radio R se analizó en el apartado 13.2 mediante las coordenadas de trayectoria. Con θ que representa la velocidad angular de la recta radial a

*Véase *Principles of Dynamics*, 2a. ed., Donald T. Greenwood, Prentice Hall, 1988, p. 350.

la partícula, la velocidad (v) y las componentes normal (a_n) y tangencial (a_t) de la aceleración de la partícula, resultan ser

$$v = R\dot{\theta} \qquad \text{(13.10, repetida)}$$

$$a_n = R\dot{\theta}^2 \qquad a_t = R\ddot{\theta} \qquad \text{(13.11, repetida)}$$

Al sustituir para $\dot{\theta}$ y $\ddot{\theta}$ de la ecuación (16.6), la velocidad y las componentes de la aceleración del punto B serán

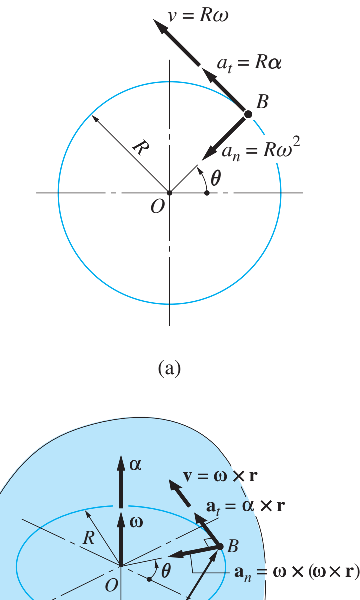
$$\begin{aligned} v &= R\omega \\ a_n &= R\omega^2 = \frac{v^2}{R} = v\omega \\ a_t &= R\alpha \end{aligned} \qquad \text{(16.7a)}$$

Los vectores de velocidad y aceleración del punto B están en el plano de movimiento (el plano del círculo), como se indica en la figura 16.6(a). La velocidad v y la componente tangencial de la aceleración a_t son tangentes al círculo, al señalar en la dirección de aumento de θ. La componente normal de la aceleración a_n está dirigida hacia el centro de la trayectoria circular.

Representación vectorial de la cinemática Algunas veces es conveniente calcular la velocidad y la aceleración de un punto utilizando el álgebra vectorial.

En la figura 16.6(b), sea **r** el vector de posición de B relativo a un punto de referencia arbitrario A que está sobre el eje de rotación. El ángulo entre **r** y el eje se denota con β. Se mostrará que las siguientes ecuaciones vectoriales proporcionan la magnitud y dirección de la velocidad y aceleración del punto B:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \\ \mathbf{a}_n &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \\ \mathbf{a}_t &= \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} \end{aligned} \qquad \text{(16.7b)}$$



(a)

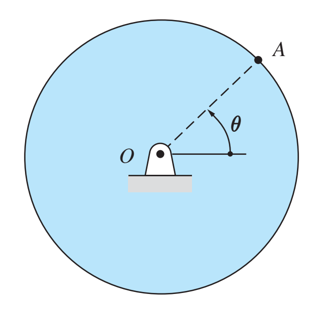
(b)

Fig. 16.6

Al utilizar las propiedades del producto cruz, las magnitudes de los vectores en las ecuaciones (16.7b) son

$$\begin{aligned} v &= |\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}| = \omega r \operatorname{sen} \beta = R\omega \\ a_n &= |\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}| = \omega v \operatorname{sen} 90^\circ = \omega v = R\omega^2 \\ a_t &= |\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}| = \alpha r \operatorname{sen} \beta = R\alpha \end{aligned}$$

Esos resultados concuerdan con las ecuaciones (16.7a). Empleando la regla de la mano derecha para el producto cruz, no es difícil ver que las direcciones de los vectores en las ecuaciones (16.7b) son las mismas que las que se muestran en la figura 16.6(a).



Problema de ejemplo **16.1**

El disco rota respecto a un eje fijo en O. Durante el periodo $t = 0$ a $t = 4$ s, la posición angular de la recta OA en el disco varía como $\theta(t) = t^3 - 12t + 6$ rad, donde t está en segundos. Determine: 1. la velocidad y la aceleración angulares del disco al final del periodo; 2. el desplazamiento angular del disco durante el periodo; y 3. el ángulo total en el que ha girado el disco durante el periodo.

Solución

Parte 1

La velocidad y la aceleración angulares del disco son

$$\omega = \dot{\theta} = 3t^2 - 12 \text{ rad/s} \qquad \alpha = \dot{\omega} = 6t \text{ rad/s}^2$$

Cuando $t = 4$ s, se tiene

$$\omega = 3(4)^2 - 12 = 36 \text{ rad/s (SCM*)}$$ *Respuesta*

$$\alpha = 6(4) = 24 \text{ rad/s}^2 \text{ (SCM)}$$ *Respuesta*

Parte 2

Las posiciones angulares de la recta OA al inicio y al final del periodo son

$$\theta\big|_{t=0} = 6 \text{ rad}$$

$$\theta\big|_{t=4\text{ s}} = 4^3 - 12(4) + 6 = 22 \text{ rad}$$

Por tanto, el desplazamiento angular del disco de $t = 0$ a $t = 4$ s es

$$\Delta\theta = \theta\big|_{t=4\text{ s}} - \theta\big|_{t=0} = 22 - 6 = 16 \text{ rad (SCM)}$$ *Respuesta*

Parte 3

Observe que la dirección de rotación del disco cambia cuando $\omega = 0$, es decir, cuando

$$3t^2 - 12 = 0 \qquad t = 2 \text{ s}$$

La posición angular de OA en ese tiempo es

$$\theta\big|_{t=2\text{ s}} = 2^3 - 12(2) + 6 = -10 \text{ rad}$$

Se concluye que el disco rota en sentido negativo (de las manecillas del reloj) ($\omega < 0$), entre $t = 0$ y $t = 2$ s, siendo su desplazamiento angular

$$\Delta\theta_1 = \theta\big|_{t=2\text{ s}} - \theta\big|_{t=0} = -10 - 6 = -16 \text{ rad}$$

*SCM, en sentido contrario a las manecillas del reloj.

Entre $t = 2$ s y $t = 4$ s, la rotación ocurre en sentido positivo (contrario a las manecillas del reloj o SCM) ($\omega > 0$); el desplazamiento angular correspondiente es

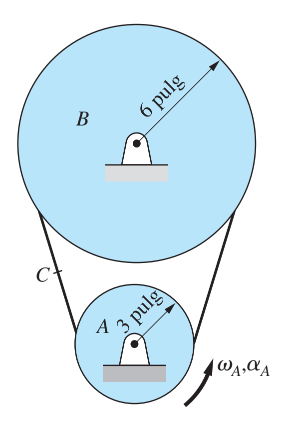
$$\Delta\theta_2 = \theta\big|_{t=4\,\text{s}} - \theta\big|_{t=2\,\text{s}} = 22 - (-10) = 32 \text{ rad}$$

Por tanto, el ángulo total que ha girado el disco de $t = 0$ a $t = 4$ s es

$$|\Delta\theta_1| + |\Delta\theta_2| = 16 + 32 = 48 \text{ rad}$$ *Respuesta*

Problema de ejemplo **16.2**

La polea B funciona gracias a la polea motorizada A que gira a $\omega_A = 20$ rad/s. En el tiempo $t = 0$, se corta la corriente en el motor y la fricción en los cojinetes hace que las poleas se detengan. La aceleración angular de A durante la desaceleración es $\alpha_A = -2.5t$ rad/s^2, donde t está en segundos. Suponiendo que la banda no se desliza en las poleas, determine: 1. la velocidad angular de B como una función del tiempo; 2. el desplazamiento angular de B durante el periodo de frenado y 3. la aceleración del punto C sobre la parte recta de la banda como una función del tiempo.



Solución

Parte 1

Debido a que la banda no se desliza, cada punto de ella que está en contacto con una polea tiene la misma velocidad que el punto adyacente sobre la polea. Por tanto, la rapidez de cualquier punto sobre la banda es

$$v = R_A\omega_A = R_B\omega_B \qquad \text{(a)}$$

tal que

$$\omega_B = \frac{R_A}{R_B}\omega_A = \frac{3}{6}\omega_A = 0.5\omega_A$$

Al derivar respecto al tiempo, se obtiene la aceleración angular de la polea B

$$\alpha_B = 0.5\alpha_A = 0.5(-2.5t) = -1.25t \text{ rad/s}^2$$

Ya que $\alpha_B = d\omega_B/dt$, entonces se tiene $d\omega_B = \alpha_B dt$ o

$$\omega_B = \int \alpha_B \, dt = \int -1.25t \, dt = -0.625t^2 + C_1$$

La condición inicial, $\omega_B = 20$ rad/s cuando $t = 0$, implica que $C_1 = 20$ rad/s. Entonces, la velocidad angular de la polea B es

$$\omega_B = -0.625t^2 + 20 \text{ rad/s} \qquad \textit{Respuesta}$$

Parte 2

Sea θ_B la posición angular de una recta en B medida desde una recta de referencia fija. Si se recuerda que $\omega_B = d\theta_B/dt$, se integra $d\theta_B = \omega_B dt$ para obtener

$$\theta_B = \int \omega_B \, dt = \int (-0.625t^2 + 20)dt = -0.2083t^3 + 20t + C_2$$

Si se establece que $\theta_B = 0$ cuando $t = 0$, se tiene $C_2 = 0$, lo que da

$$\theta_B = -0.2083t^3 + 20t \text{ rad}$$

La polea llega al reposo cuando $\omega_B = -0.625t^2 + 20 = 0$, de donde $t = 5.657$ s. La posición angular correspondiente de la recta en B es

$$\theta_B\big|_{t=5.657\text{ s}} = -0.2083(5.657)^3 + 20(5.657) = 112.0 \text{ rad}$$

Por tanto, el desplazamiento angular de la polea B hasta que llega al reposo es

$$\Delta\theta_B = \theta_B\big|_{t=5.657\text{ s}} - \theta_B\big|_{t=0} = 112.0 - 0 = 112.0 \text{ rad} \qquad \textit{Respuesta}$$

Ya que la dirección de rotación no cambia, el ángulo total que la polea B ha girado durante la desaceleración también es 112.0 rad.

Parte 3

Al sustituir $R_B = 6$ pulg y $\omega_B = -0.625t^2 + 20$ rad/s en la ecuación (a), la rapidez del punto C (que es la misma para todos los puntos de la banda) es

$$v_C = 6(-0.625t^2 + 20) = -3.75t^2 + 120 \text{ pulg/s} \qquad \text{(b)} \qquad \textit{Respuesta}$$

Ya que la trayectoria del punto C sobre la banda es una línea recta, entonces la aceleración de C es

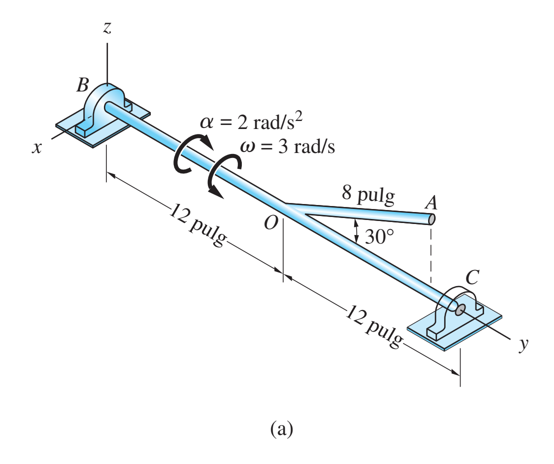
$$a_C = \dot{v}_C = -7.5t \text{ pulg/s}^2 \qquad \textit{Respuesta}$$

Sería posible obtener el mismo resultado si se observa que a_C es igual a la *componente tangencial* de la aceleración de un punto sobre el borde de la polea B (también podría utilizarse la polea A). Así $a_C = R_B\alpha_B = 6(-1.25t) = -7.5t$ pulg/s^2.

Observe que la expresión para v_C de la ecuación (b) es válida para todo el periodo de desaceleración ($0 \le t \le 5.657$ s), mientras que la respuesta para a_C sólo se aplica a aquellos tiempos en los que C no está en contacto con alguna polea. Los puntos sobre la banda siguen trayectorias circulares cuando están en contacto con una polea.

Problema de ejemplo 16.3

El cuerpo rígido rota respecto al eje y. En la posición que se muestra en la figura (a), la velocidad y la aceleración angulares del cuerpo son como ahí se especifica. Determine los vectores de velocidad y aceleración del punto A en esta posición empleando: 1. ecuaciones vectoriales, y 2. ecuaciones escalares.



(a)

Solución

Parte 1

Cuando se utiliza la regla de la mano derecha, los vectores de velocidad angular y aceleración del cuerpo son

$$\boldsymbol{\omega} = 3\mathbf{j} \text{ rad/s} \qquad \boldsymbol{\alpha} = -2\mathbf{j} \text{ rad/s}^2$$

El vector de posición de A relativo al punto O sobre el eje de rotación es

$$\mathbf{r} = 8\cos 30^\circ \mathbf{j} + 8 \operatorname{sen} 30^\circ \mathbf{k} = 6.928\mathbf{j} + 4.0\mathbf{k} \text{ pulg}$$

Los vectores de velocidad y aceleración del punto A pueden calcularse a partir de

$$\mathbf{v}_A = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = 3\mathbf{j} \times (6.928\mathbf{j} + 4.0\mathbf{k}) = 12.0\mathbf{i} \text{ pulg/s} \qquad \textit{Respuesta}$$

$$\mathbf{a}_A = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} = 3\mathbf{j} \times 12\mathbf{i} + (-2\mathbf{j}) \times (6.928\mathbf{j} + 4.0\mathbf{k})$$

$$= -36.0\mathbf{k} - 8.0\mathbf{i} \text{ pulg/s}^2 \qquad \textit{Respuesta}$$

Parte 2

La figura (a) muestra el plano de movimiento del punto A (mirando desde C hacia B). La trayectoria de A es un círculo de radio $R = 8$ sen 30º $= 4.0$ pulg. Las magnitudes de la velocidad y las componentes de la aceleración de A son, empleando las ecuaciones (16.7a),

$$v_A = R\omega = 4.0(3) = 12.0 \text{ pulg/s}$$

$$(a_A)_n = R\omega^2 = 4.0(3)^2 = 36.0 \text{ pulg/s}^2$$

$$(a_A)_t = R\alpha = 4.0(2) = 8.0 \text{ pulg/s}^2$$

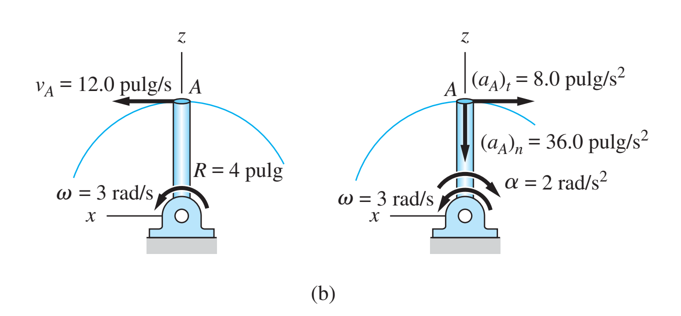
En la figura (b) se muestran esas componentes. Sus direcciones se determinaron de la siguiente manera:

- $\mathbf{v}_A$ es tangente a la trayectoria; su sentido es consistente con la dirección positiva de ω.
- $(a_A)_n$ se dirige hacia el centro de la trayectoria.
- $(a_A)_t$ es tangente a la trayectoria; su sentido es consistente con la dirección negativa (en sentido de las manecillas del reloj) de α.

Por tanto, los vectores de velocidad y aceleración del punto A son

$$\mathbf{v}_A = 12.0\mathbf{i} \text{ pulg/s}$$ *Respuesta*

$$\mathbf{a}_A = -36.0\mathbf{k} - 8.0\mathbf{i} \text{ pulg}^2/\text{s}$$ *Respuesta*



(b)

Problemas

16.1 En cada mecanismo que se muestra es preciso caracterizar el movimiento de los cuerpos A y B como: 1. traslación; 2. rotación respecto a un eje fijo, o 3. movimiento general en un plano.

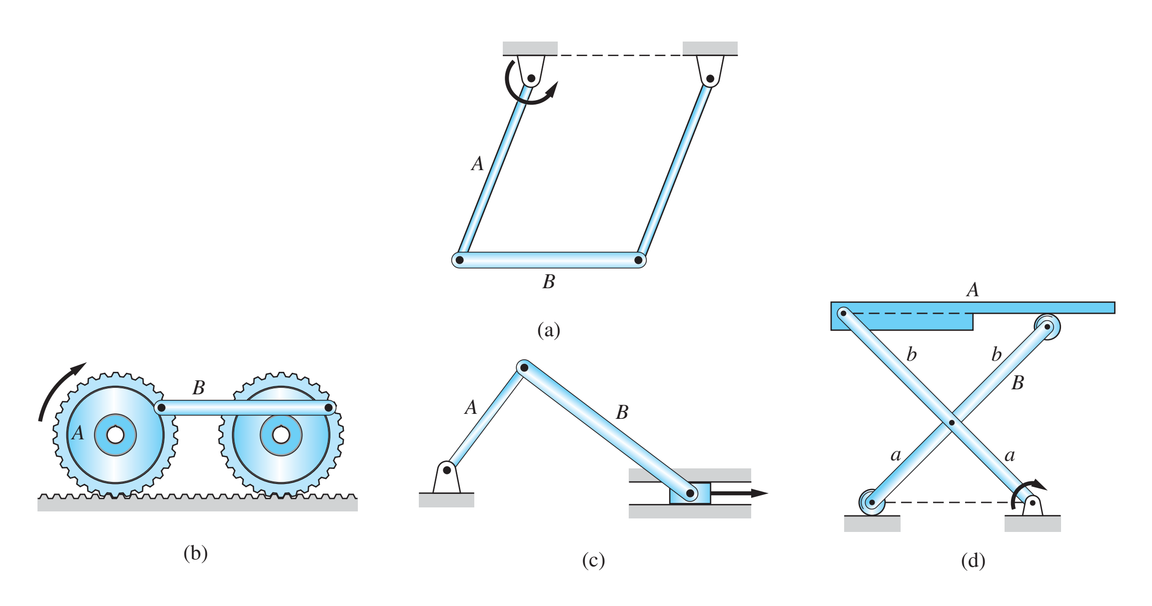


Fig. P16.1

16.2 Cuando un motor eléctrico se enciende en $t = 0$, su aceleración angular es $\alpha = 10e^{-0.5t}$ rad/s^2, donde t es el tiempo en segundos. ¿Cuál es su velocidad angular terminal? ¿Cuántas revoluciones se requieren para que alcance la mitad de su velocidad angular terminal?

16.3 Un motor gira a 8000 rev/min cuando se le corta el suministro de combustible, causándole desaceleración a razón constante. Si la rapidez angular es 4000 rev/min después de 3200 revoluciones, determine el tiempo total para que se detenga el motor.

16.4 La posición angular de la varilla OA varía con el tiempo como $\theta = -4t^2 + 24t - 10$, donde θ está en radianes y t en segundos. Obtenga: (a) la velocidad y la aceleración angulares de la varilla en $t = 4$ s, y (b) el ángulo total que la varilla ha girado entre $t = 0$ y $t = 4$ s.

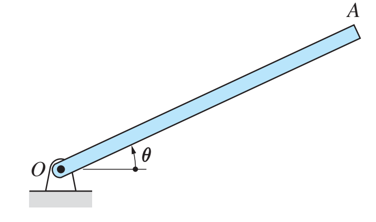


Fig. P16.4-P16.7

16.5 La aceleración angular de la varilla OA es $\ddot{\theta} = 4 + 6t$ rad/s^2, donde t está en segundos. Suponiendo que la varilla estaba en reposo en $t = 0$, calcule su desplazamiento angular entre $t = 0$ y el tiempo en que la rapidez angular alcanza los 24 rad/s.

16.6 La velocidad angular de la varilla OA es $\omega = 3t^2 - kt$ rad/s, donde t está en segundos y k es una constante. Cuando $t = 0$, $\theta = 8$ rad, en sentido negativo; y cuando $t = 4$ s, $\theta = 16$ rad, en sentido negativo. Encuentre: (a) la constante k y (b) el ángulo total que OA gira entre $t = 0$ y $t = 4$ s.

16.7 La aceleración angular α de la varilla OA está dada por $\alpha = k\theta^2$ rad/s^2, donde θ está en radianes y k es una constante. Cuando $\theta = 0$, $\omega = 2$ rad/s y cuando $\theta = 3$ rad, $\omega = 7$ rad/s. Determine: (a) la constante k, y (b) ω cuando $\theta = 2$ rad.

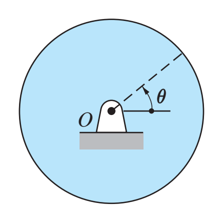


Fig. P16.8-P16.10

16.8 La aceleración angular constante del disco que rota es $\alpha = 12$ rad/s^2. La velocidad angular del disco es 24 rad/s, en sentido negativo, cuando $t = 0$. Obtenga el ángulo total en que el disco ha girado entre $t = 0$ y $t = 4$ s.

16.9 La velocidad angular del disco que rota es $\omega = 4\sqrt{t}$ rad/s, donde t está en segundos. Encuentre el desplazamiento angular del disco para el intervalo de tiempo $t = 0$ a $t = 6$ s.

16.10 La aceleración angular α (rad/s^2) del disco que rota se relaciona con su velocidad angular ω (rad/s) mediante $\alpha = 4\sqrt{\omega}$. Cuando $t = 0$, el disco está en reposo y la coordenada de posición angular de una recta en el disco es $\theta = 8$ rad. Encuentre las expresiones para lo siguiente: (a) $\theta(\omega)$; (b) $\omega(t)$ y (c) $\theta(t)$.

16.11 La velocidad y aceleración de la banda que corre entre el motor A y la polea B son $v = 16$ m/s y $a = -9$ m/s^2, respectivamente. Determine las velocidades y las aceleraciones angulares de las poleas B y C.

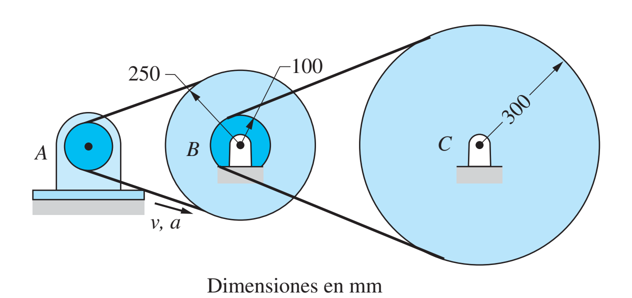


Fig. P16.11

16.12 En el instante que se muestra, la rapidez de la banda que une a las dos poleas es de 12 pies/s y la magnitud de la aceleración del punto A es 600 pies/s^2. ¿Cuál es la magnitud de la aceleración del punto B en este instante?

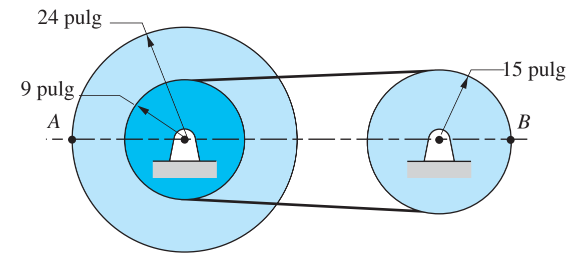


Fig. P16.12

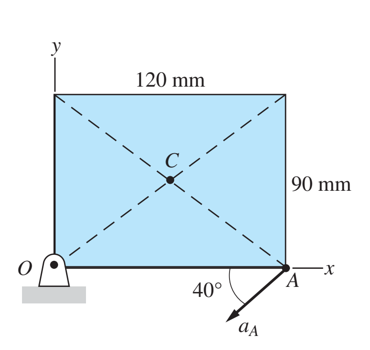


Fig. P16.13

16.13 La placa rectangular rota en el plano xy respecto a la esquina O. En el instante que se muestra, la aceleración de la esquina A es $a_A = 60$ m/s^2 en la dirección que se indica. Determine el vector de aceleración del punto medio C de la placa en este instante.

16.14 Justo antes de que las ruedas con fricción se pongan en contacto, B rota a 18 rad/s en sentido negativo y A está estacionaria. Las ruedas se deslizan en los primeros seis segundos de contacto; durante este tiempo, la rapidez angular de cada rueda cambia de manera uniforme. Si la rapidez angular final de B es 12 rad/s, determine: (a) la aceleración angular de A durante el periodo de deslizamiento, y (b) el número de revoluciones que A realiza antes de alcanzar su rapidez final.

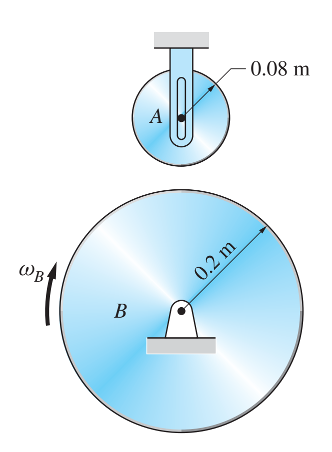


Fig. P16.14

16.15 En la posición que se muestra, la varilla $OABC$ rota respecto al eje y con velocidad angular $\omega = 2.4$ rad/s y aceleración angular $\alpha = 7.2$ rad/s^2 en la dirección que se indica. Para esta posición, calcule los vectores de velocidad y aceleración del punto C empleando: (a) ecuaciones vectoriales, y (b) ecuaciones escalares.

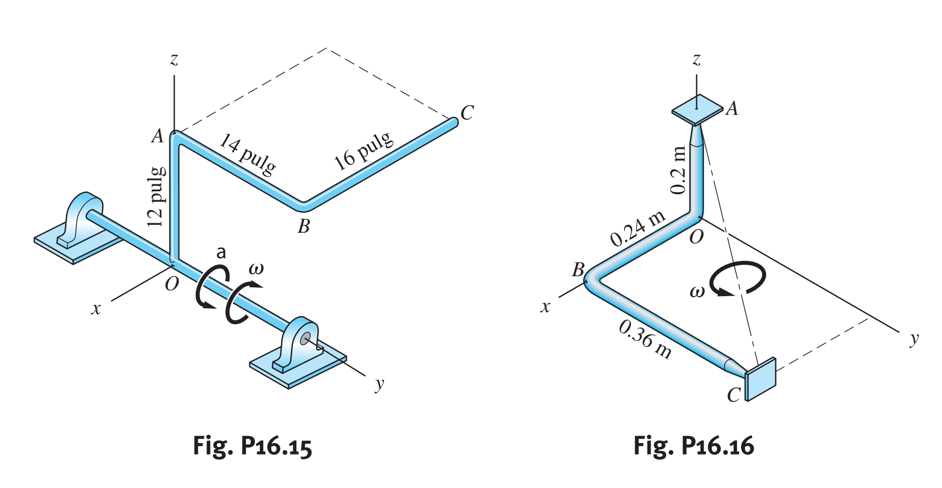


Fig. P16.15

Fig. P16.16

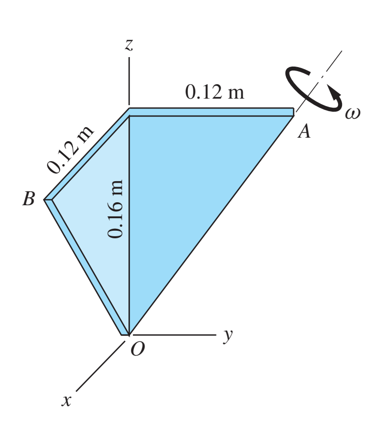


Fig. P16.17

16.16 La varilla doblada rota alrededor del eje AC. En la posición que se muestra, la rapidez angular de la varilla es $\omega = 2$ rad/s y se incrementa a razón de 7 rad/s^2. Para esta posición, determine los vectores de velocidad y aceleración del punto B.

16.17 La placa doblada rota respecto al eje fijo OA con la velocidad angular constante $\omega = 20$ rad/s en la dirección que se indica. Calcule las magnitudes de la velocidad y aceleración del punto B.

16.18 La varilla doblada ABC rota respecto al eje AC con la velocidad angular constante $\omega = 25$ rad/s dirigida como se muestra. Obtenga los vectores de velocidad y aceleración del punto B para la posición que se indica.

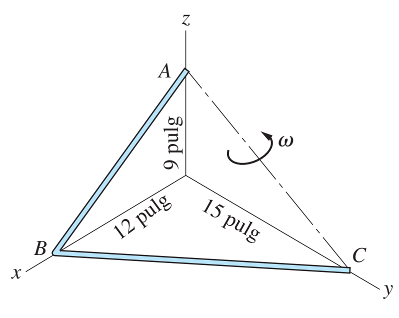
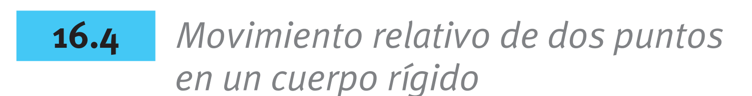


Fig. P16.18



16.4 *Movimiento relativo de dos puntos en un cuerpo rígido*

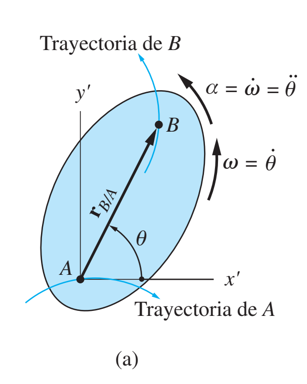
En el apartado 15.2 se analizó la cinemática del movimiento relativo de partículas (puntos). La definición de movimiento relativo entre los puntos A y B condujo a las siguientes relaciones:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} \qquad \text{(15.3, repetida)}$$

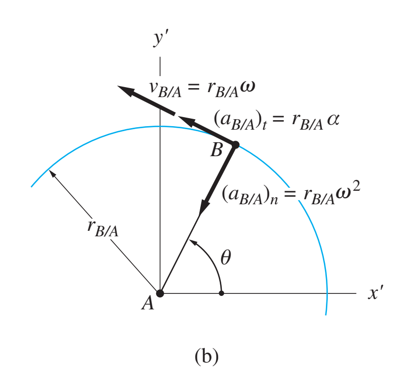
$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A} \qquad \text{(15.4, repetida)}$$

donde el subíndice B/A denota el movimiento de B relativo a A. Es útil recordar que $\mathbf{v}_{B/A}$ y $\mathbf{a}_{B/A}$ pueden verse como la velocidad y aceleración de B para un observador *que no rota* unido al punto A.

Si los puntos A y B pertenecen al mismo cuerpo rígido *en traslación* (es decir, que no rota), su vector de posición relativo $\mathbf{r}_{B/A}$ es constante y no existe movimiento relativo ($\mathbf{v}_{B/A} = \mathbf{a}_{B/A} = \mathbf{0}$). Por tanto, todos los puntos en el cuerpo en traslación tienen las mismas velocidades y aceleraciones.



(a)



(b)

Fig. 16.7

Ahora considere el cuerpo en la figura 16.7(a) que efectúa un movimiento general en un plano (traslación y rotación simultáneas). *Los ejes $x'y'$ no rotatorios están unidos al punto A.* La velocidad angular del cuerpo es $\omega = \dot{\theta}$ y su aceleración angular es $\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\theta}$, donde θ es el ángulo entre $\mathbf{r}_{B/A}$ y el eje x'. Conforme el cuerpo se mueve, la dirección de $\mathbf{r}_{B/A}$ cambia, pero su magnitud $r_{B/A}$ (la distancia entre A y B) es constante. A esto le sigue que la trayectoria de B, en el sistema de coordenadas $x'y'$ *en traslación*, es un círculo de radio $r_{B/A}$ que se encuentra en el plano de movimiento, como se muestra en la figura 16.7(b). Así, el movimiento de B relativo a A sólo se debe a la rotación del cuerpo respecto a un eje que pasa por A. Por tanto, la velocidad y la aceleración relativas entre dos puntos sobre un cuerpo rígido pueden calcularse con las ecuaciones que se han desarrollado en el apartado anterior para la rotación respecto a un eje fijo. Con los cambios apropiados en la notación, las ecuaciones (16.7a) serán:

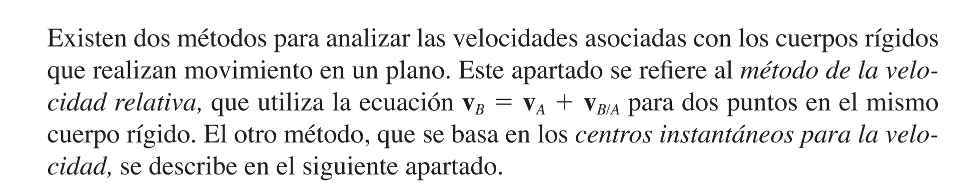
$$v_{B/A} = r_{B/A}\omega$$
$$(a_{B/A})_n = r_{B/A}\omega^2 = \frac{v_{B/A}^2}{R} = v_{B/A}\omega \qquad (16.8a)$$
$$(a_{B/A})_t = r_{B/A}\alpha$$

La figura 16.7(b) muestra cada uno de los términos en las ecuaciones (16.8a). Esta figura es idéntica a la 16.6(a) para la rotación respecto de un eje fijo, excepto por los cambios de notación. Es importante entender que en los cálculos se emplean la velocidad angular *absoluta* ($\dot{\omega} = \dot{\theta}$) y la aceleración angular *absoluta* ($\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\theta}$). Debido a que el ángulo θ se mide desde la dirección x' fija, todas las mediciones angulares son cantidades absolutas.

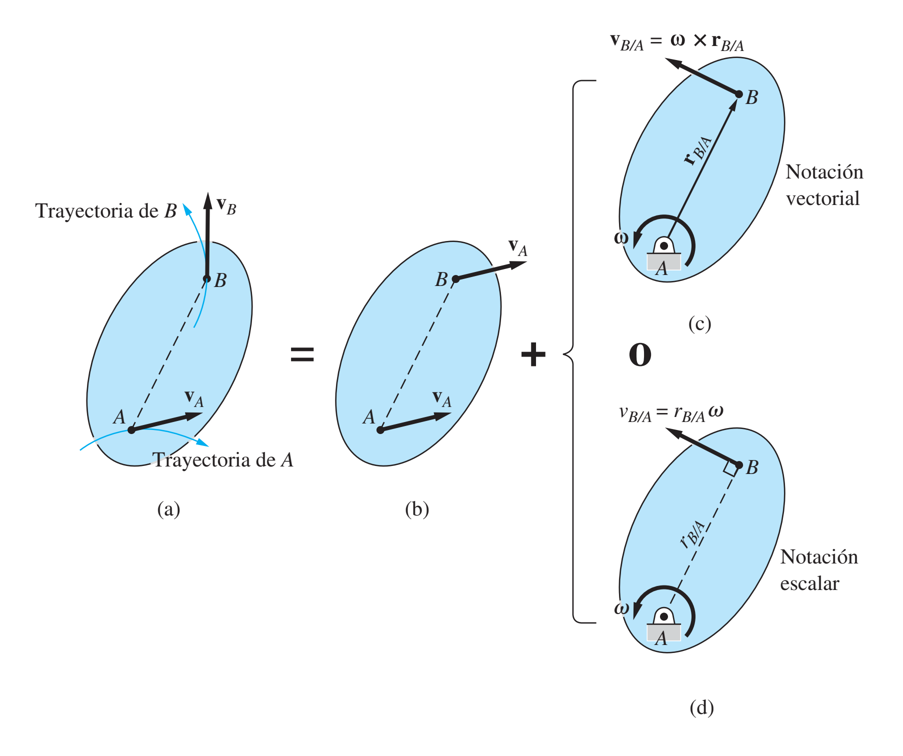
Las formas vectoriales de las ecuaciones (16.8a) son

$$\mathbf{v}_{B/A} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$$
$$(\mathbf{a}_{B/A})_n = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{B/A} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}) \qquad (16.8b)$$
$$(\mathbf{a}_{B/A})_t = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A}$$

16.5 Método de velocidad relativa



Existen dos métodos para analizar las velocidades asociadas con los cuerpos rígidos que realizan movimiento en un plano. Este apartado se refiere al *método de la velocidad relativa,* que utiliza la ecuación $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$ para dos puntos en el mismo cuerpo rígido. El otro método, que se basa en los *centros instantáneos para la velocidad,* se describe en el siguiente apartado.



Movimiento en un plano = Traslación + Rotación respecto de *A*

Fig. 16.8

La figura 16.8(a) muestra un cuerpo rígido que experimenta un movimiento general en un plano. Si *A* y *B* son puntos en el cuerpo, entonces de acuerdo con las ecuaciones (16.8), la velocidad de *B* relativa a *A* es

$$\mathbf{v}_{B/A} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A} \qquad (v_{B/A} = r_{B/A}\omega) \tag{16.9}$$

donde ω es la velocidad angular del cuerpo. Al sustituir la ecuación (16.9) en $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$, se obtiene

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A} \tag{16.10}$$

En la figura 16.8 se ilustra la interpretación física de la ecuación (16.10). La figura muestra que el movimiento general en un plano es equivalente a la superposición de los dos movimientos más sencillos.*

1. Una traslación del cuerpo rígido, donde la velocidad de cada punto es igual a la velocidad del punto de referencia *A* ($\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A$), como se muestra en la figura 16.8(b).
2. Una rotación del cuerpo rígido respecto a un eje fijo en A ($\mathbf{v}_{B/A} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$), que se indica en las figuras 16.8(c) o (d). La presentación de un perno de apoyo en *A* refuerza el concepto de que *A* se considera fijo en el instante en que se calcula la contribución de la rotación.

*Esta representación del movimiento general en un plano es una forma bidimensional del teorema de Chasle: el desplazamiento más general de un cuerpo rígido es equivalente a una traslación de un punto en el cuerpo más una rotación respecto a un eje que pasa por ese punto. Para obtener una prueba de este teorema, véase *Principles of Dynamics*, 2a. ed., Donald T. Greenwood, Prentice Hall, 1988, p. 339.

La contribución de la rotación del cuerpo a la velocidad de B puede calcularse al utilizar la notación vectorial en la figura 16.8(c) o la notación escalar en la figura 16.8(d). La elección de la notación es un asunto de preferencia personal. Cuando se emplea la notación escalar, se considera que la dirección de la velocidad es perpendicular a AB y su sentido se determina por la dirección de la velocidad angular ω del cuerpo (recuerde que ω es una propiedad de este último y es independiente de la elección del punto de referencia).

El método de la velocidad relativa consiste en escribir la ecuación (16.10), $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$, para dos puntos en el *mismo cuerpo rígido* y después despejar las incógnitas. Para el movimiento en un plano, la ecuación (16.10) es equivalente a dos ecuaciones escalares (por ejemplo, las ecuaciones que resultan de igualar las componentes horizontal y vertical de ambos lados de la ecuación vectorial). El número de variables que aparecen en la ecuación (16.10) es cinco (suponiendo que se conoce $\mathbf{r}_{B/A}$):

- $\mathbf{v}_B$: dos variables (magnitud y dirección o componentes horizontal y vertical)
- $\mathbf{v}_A$: dos variables (magnitud y dirección o componentes horizontal y vertical)
- ω: una variable (magnitud ω de la velocidad angular). Observe que la dirección del vector $\boldsymbol{\omega}$ es conocida porque siempre es perpendicular al plano de movimiento.

Evidentemente, la ecuación (16.10) no puede resolverse a menos que tres de las cinco variables que se muestran se conozcan de antemano. Por tanto, la elección de A o B está restringida a los puntos cuyas velocidades contengan menos de dos incógnitas. Éstos se conocen como *puntos de importancia cinemática para la velocidad*.* De ellos, un ejemplo común es un punto fijo; es decir, el que está anclado a un soporte. Debido a que la velocidad de un punto fijo es cero, éste no tiene incógnitas. Un segundo ejemplo es un punto que viaja sobre una trayectoria dada. Puesto que se sabe que la dirección de la velocidad es tangente a la trayectoria, la velocidad de tal punto tiene como máximo una incógnita, a saber, la magnitud.

Los pasos en la aplicación del método de la velocidad relativa son:

- Paso 1: Identificar dos puntos de importancia cinemática, por ejemplo, A y B, sobre el mismo cuerpo rígido.
- Paso 2: Escribir $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$, identificando las variables incógnitas (es posible emplear la notación vectorial o la escalar).
- Paso 3: Si el número de incógnitas es dos, resuelva la ecuación.

Si el número de incógnitas es mayor que dos, el problema aún puede resolverse si se considera el movimiento de otros puntos de importancia cinemática.

Rodamiento sin deslizamiento La figura 16.9(a) muestra un disco circular de radio R que rueda sobre una superficie horizontal con velocidad angular ω y aceleración angular α, ambas en sentido negativo. Observe que la trayectoria del centro O

*Como ya hemos analizado las velocidades, por el momento nos referiremos a estos puntos como “puntos de importancia cinemática”.

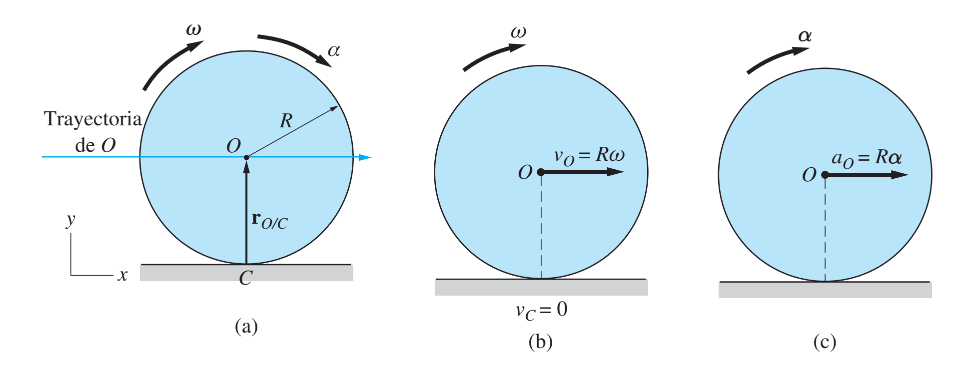


Fig. 16.9

es una línea recta paralela a la superficie. El rodamiento sin deslizamiento ocurre si el punto de contacto C sobre el disco no tiene velocidad, es decir, si el disco no se desliza sobre la superficie. Esto amerita especial atención porque sucede en muchas aplicaciones de la ingeniería.

Al relacionar las velocidades de los puntos O y C, se tiene

$$\mathbf{v}_O = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{O/C}$$

Cuando se sustituye $\mathbf{v}_C = \mathbf{0}$, $\omega = -\omega\mathbf{k}$ y $\mathbf{r}_{O/C} = R\mathbf{j}$, resulta

$$\mathbf{v}_O = -\omega\mathbf{k} \times R\mathbf{j} = R\omega\mathbf{i} \qquad (16.11a)$$

Como se esperaba, este resultado indica que la velocidad del centro O es paralela a la superficie sobre la que rueda el disco, cuya magnitud es

$$v_O = R\omega \qquad (16.11b)$$

como se muestra en la figura 16.9(b).

Aquí también es conveniente deducir la aceleración de O, no obstante que esta información se utilizará hasta el apartado 16.7. La aceleración de O puede obtenerse por derivación de la ecuación (16.11a). Al observar que R e $\mathbf{i}$ son constantes, se tiene

$$\mathbf{a}_O = \dot{\mathbf{v}}_O = R\alpha\mathbf{i} \qquad (16.12a)$$

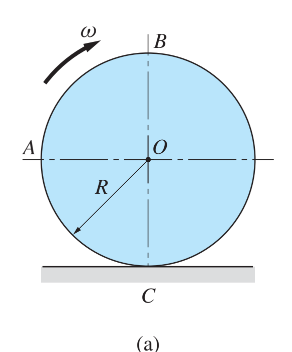
donde $\alpha = \dot{\omega}$ es la aceleración angular del disco. Así, la aceleración de O es paralela a la superficie horizontal y su magnitud es

$$a_O = R\alpha \qquad (16.12b)$$

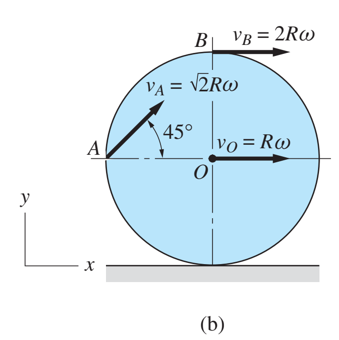
como se muestra en la figura 16.9(c).

Problema de ejemplo 16.4

La figura (a) presenta una llanta de radio R que rueda sin deslizarse con velocidad angular ω en sentido negativo. Para la posición que se muestra, determine los vectores de velocidad de: 1. punto A, y 2. punto B.



(a)



(b)

Solución

Comentarios introductorios

Este problema se resolverá empleando las notaciones escalar y vectorial. (Por supuesto, los resultados son idénticos para ambas.) Se elige O (el centro de la llanta) como el punto de referencia ya que de la ecuación (16.11) se sabe que su velocidad es $\mathbf{v}_O = R\omega\mathbf{i}$, como se muestra en la figura (b). El lector puede encontrar instructiva la repetición de la solución utilizando el punto de contacto C ($\mathbf{v}_C = \mathbf{0}$) como el de referencia.

Solución I (uso de la notación escalar)

Parte 1

Cuando se utiliza la notación escalar para relacionar las velocidades de A y O, $\mathbf{v}_{A/O}$ se calcula con la suposición de que el punto O es fijo. Por tanto, la ecuación de la velocidad relativa queda

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_O + \mathbf{v}_{A/O}$$

Rω →   A, Rω ↑, R, ω, O

de donde se encuentra que la velocidad de A es

$$\mathbf{v}_A = \sqrt{2}R\omega \quad \angle 45^\circ$$ *Respuesta*

como se muestra en la figura (b).

Parte 2

Utilizando la notación escalar, las velocidades de los puntos B y O están relacionadas por

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_O + \mathbf{v}_{B/O}$$

Rω →   B, Rω →, R, ω, O

lo que implica

$$\mathbf{v}_B = 2R\omega \rightarrow$$ *Respuesta*

En la figura (b) también se muestra la velocidad de B.

Solución II (uso de la notación vectorial)

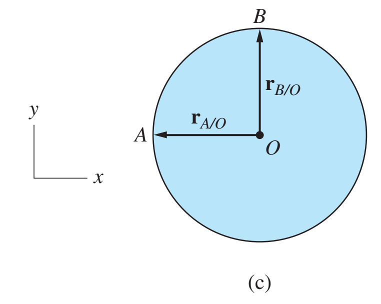
Parte 1

En la notación vectorial, la relación entre las velocidades de A y O es

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{A/O}$$

Al sustituir $\mathbf{v}_O = R\omega\mathbf{i}$, $\omega = -\omega\mathbf{k}$ y $\mathbf{r}_{A/O} = -R\mathbf{i}$, [véase la figura (c)], se obtiene

$$\mathbf{v}_A = R\omega\mathbf{i} + (-\omega\mathbf{k}) \times (-R\mathbf{i}) = R\omega\mathbf{i} + R\omega\mathbf{j} \qquad \textit{Respuesta}$$



(c)

Parte 2

Las velocidades de B y O están relacionadas por

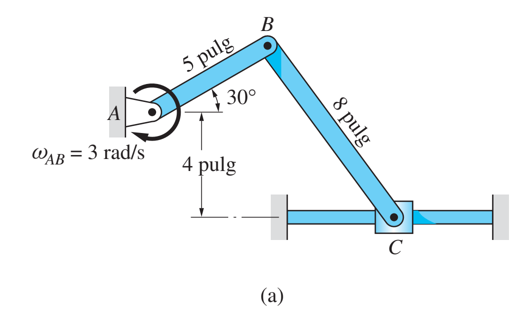
$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/O}$$

Al sustituir $\mathbf{v}_O = R\omega\mathbf{i}$, $\omega = -\omega\mathbf{k}$ y $\mathbf{r}_{B/O} = R\mathbf{j}$, [véase la figura (c)], se obtiene

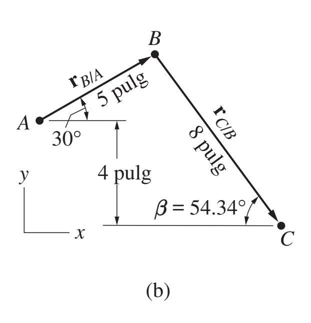
$$\mathbf{v}_B = R\omega\mathbf{i} + (-\omega\mathbf{k}) \times (R\mathbf{j}) = 2R\omega\mathbf{i} \qquad \textit{Respuesta}$$

Problema de ejemplo 16.5

En la figura (a), la velocidad angular de la barra AB es 3 rad/s, en sentido negativo, en la posición que se muestra. Determine la velocidad angular de la barra BC y la velocidad del deslizador C en esta posición.



(a)



(b)

Solución

Comentarios introductorios

De la geometría en la figura (b) se tiene que 5 sen 30º + 4 = 8 sen β, de lo que se encuentra que $\beta = 54.34$º para la posición que se muestra.

Los siguientes son los puntos de importancia cinemática:

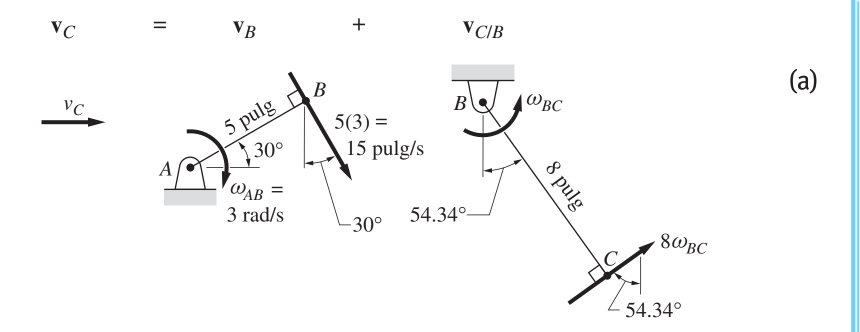
A: Es un punto fijo.
C: Su trayectoria es una línea recta horizontal.
B: Su trayectoria es un círculo con centro en A; también conecta las barras AB y BC.

Ya que B y C son puntos en la misma barra rígida BC, entonces parece razonable investigar la ecuación $\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{C/B}$ (también podría emplearse la ecuación equivalente $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{B/C}$).

Más adelante se presentan dos soluciones, una en la que se utiliza la notación escalar y la otra que se apoya en la notación vectorial. En la figura (b) se muestran los vectores de posición relativos que se usan en las soluciones.

Solución I (uso de la notación escalar)

Cuando se usa la notación escalar, las velocidades de B y C se relacionan con:



Comentarios sobre la ecuación (a):

1. Se supone que $\mathbf{v}_C$ se dirige hacia la derecha.
2. $\mathbf{v}_B$ se encuentra al reconocer que la trayectoria de B es un círculo centrado en A. Así, su magnitud es $v_B = r_{B/A}\omega_{AB} = 5(3) = 15$ pulg/s, que va en ángulos rectos hacia AB. El sentido de $\mathbf{v}_B$ está determinado por la dirección negativa de ω_{AB}.
3. $\mathbf{v}_{C/B}$ se obtiene al considerar a B como el punto fijo en este instante, que da $v_{C/B} = r_{C/B}\omega_{BC} = 8\omega_{BC}$. La dirección del vector es perpendicular a BC, con su sentido determinado por la suposición de la dirección positiva de ω_{BC}.

Como existe un total de dos incógnitas (v_C y ω_{BC}), la ecuación (a) puede resolverse. Al igualar las componentes x y y, se obtiene

$$\xrightarrow{+} \quad v_C = 15 \operatorname{sen} 30^\circ + 8\omega_{BC} \operatorname{sen} 54.34^\circ \tag{b}$$

$$+\uparrow \quad 0 = -15\cos 30^\circ + 8\omega_{BC}\cos 54.34^\circ \tag{c}$$

La solución es

$$v_C = 25.60 \text{ pulg/s} \quad \text{y} \quad \omega_{BC} = 2.785 \text{ rad/s} \qquad \textit{Respuesta}$$

Los signos positivos significan que las direcciones que se han empleado para v_C y ω_{BC} son correctas.

Solución II (uso de la notación vectorial)

La ecuación vectorial que relaciona las velocidades de los puntos *B* y *C* es

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{C/B} = \boldsymbol{\omega}_{AB} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\omega}_{BC} \times \mathbf{r}_{C/B} \tag{d}$$

De la información dada y de un examen de la figura (b), se obtiene

$\mathbf{v}_C = v_C\mathbf{i}$ (suponiendo que la velocidad de C se dirija hacia la derecha)

$\omega_{AB} = -3\mathbf{k}$ rad/s

$\mathbf{r}_{B/A} = 5 \cos 30^\circ\mathbf{i} + 5 \text{ sen } 30^\circ\mathbf{j} = 4.330\mathbf{i} + 2.500\mathbf{j}$ pulg

$\omega_{BC} = \omega_{BC}\mathbf{k}$ (suponiendo que el sentido de ω_{BC} es positivo)

$\mathbf{r}_{C/B} = 8 \cos 54.34^\circ\mathbf{i} - 8 \text{ sen } 54.34^\circ\mathbf{j} = 4.66\mathbf{i} - 6.500\mathbf{j}$ pulg

Si se examinan las expresiones anteriores se observa que sólo existen dos incógnitas: v_C y ω_{BC}. Por tanto, la ecuación (d) puede resolverse porque es equivalente a dos ecuaciones escalares.

Si las expresiones anteriores se sustituyen en la ecuación (d), se tiene

$$\begin{aligned} v_C\mathbf{i} &= (-3\mathbf{k}) \times (4.330\mathbf{i} + 2.500\mathbf{j}) + (\omega_{BC}\mathbf{k}) \times (4.664\mathbf{i} - 6.500\mathbf{j}) \\ &= -12.990\mathbf{j} + 7.500\mathbf{i} + 4.664\omega_{BC}\mathbf{j} + 6.500\omega_{BC}\mathbf{i} \end{aligned}$$

La igualación de los coeficientes de **i** y **j** resulta en:

$$\begin{aligned} v_C &= 7.500 + 6.500\omega_{BC} \\ 0 &= -12.990 + 4.664\omega_{BC} \end{aligned}$$

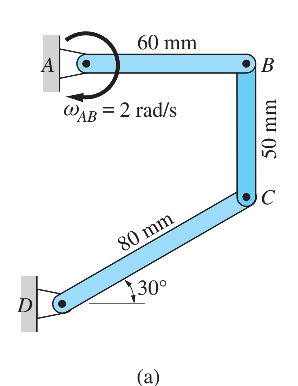
Al resolver las dos ecuaciones, se encuentra que

$$v_C = 25.60 \text{ pulg/s} \quad \text{y} \quad \omega_{BC} = 2.785 \text{ rad/s} \qquad \textit{Respuesta}$$

Los signos positivos indican que las direcciones supuestas para $\mathbf{v}_C$ y ω_{BC} son correctas.

Problema de ejemplo **16.6**

En la posición que se muestra en la figura (a), la velocidad angular de la barra *AB* es 2 rad/s en sentido negativo. Calcule las velocidades angulares de las barras *BC* y *CD* para esta posición.



(a)

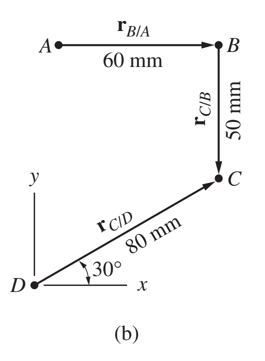
Solución

Comentarios introductorios

En la figura (a) se muestra un mecanismo conocido como *conexión articulada de cuatro barras*. (La base que une los soportes en *A* y *D* se considera como la cuarta barra.)

De la figura (a) se observa que los siguientes puntos tienen importancia cinemática:

A: Es un punto fijo.
B: Su trayectoria es un círculo con centro en A y también conecta las barras AB y BC.
D: Es un punto fijo.
C: Su trayectoria es un círculo centrado en D y también conecta las barras BC y CD.



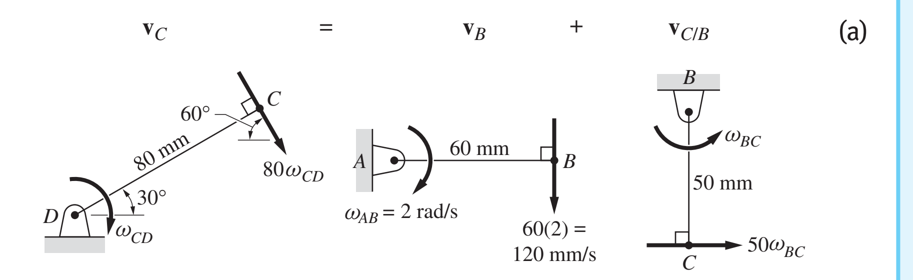
(b)

Puesto que B y C pertenecen al mismo cuerpo rígido, es posible considerar la ecuación $\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{C/B}$ (también podría emplearse la ecuación equivalente $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{B/C}$). Se presentan dos soluciones, una que utiliza la notación escalar y la otra que se apoya en la notación vectorial. En la figura (b) se muestran los vectores de posición relativos que se emplearon en la solución.

Solución I (uso de la notación escalar)

La ecuación que relaciona las velocidades de B y C es

$$\mathbf{v}_C \quad = \quad \mathbf{v}_B \quad + \quad \mathbf{v}_{C/B} \tag{a}$$



Comentarios de la ecuación (a):

1. $\mathbf{v}_C$ se encuentra al reconocer que la trayectoria de C es un círculo centrado en D. Por tanto, su magnitud es $v_C = r_{C/D}\omega_{CD} = 80\omega_{CD}$, siendo su dirección perpendicular a CD. El sentido de $\mathbf{v}_C$ se obtiene de la dirección propuesta (sentido negativo) para ω_{CD}.
2. $\mathbf{v}_B$ resulta al observar que la trayectoria de B es un círculo centrado en A. Su magnitud es $v_B = r_{B/A}\omega_{AB} = 60(2) = 120$ mm/s. La dirección de $\mathbf{v}_B$ es perpendicular a AB y su sentido se obtiene de la dirección negativa dada de ω_{AB}.
3. $\mathbf{v}_{C/B}$ se traza considerando a B como un punto fijo en este instante, que da $v_{C/B} = r_{C/B}\omega_{BC} = 50\omega_{BC}$. La dirección de $\mathbf{v}_{C/B}$ es perpendicular a BC y su sentido se encuentra a partir de la dirección supuesta (el sentido positivo) para ω_{BC}.

La ecuación (a) contiene un total de dos incógnitas, ω_{CD} y ω_{BC}, que pueden obtenerse al resolver las dos ecuaciones escalares equivalentes. Cuando se igualan las componentes x y y en la ecuación (a), se obtiene

$$\xrightarrow{+} \quad 80\omega_{CD}\cos 60° = 0 + 50\omega_{BC} \tag{b}$$

$$+\uparrow \quad -80\omega_{CD}\,\text{sen}\,60° = -120 + 0 \tag{c}$$

Al resolver estas ecuaciones, resulta

$$\omega_{CD} = 1.732 \text{ rad/s} \quad \text{y} \quad \omega_{BC} = 1.386 \text{ rad/s} \qquad \textit{Respuesta}$$

Los signos positivos indican que las direcciones adoptadas para ω_{CD} y ω_{BC} son correctas.

Solución II (uso de la notación vectorial)

Las velocidades de los puntos B y C están relacionadas por

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{C/B}$$
$$\boldsymbol{\omega}_{CD} \times \mathbf{r}_{C/D} = \boldsymbol{\omega}_{AB} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\omega}_{BC} \times \mathbf{r}_{C/B} \qquad \text{(d)}$$

Si se utiliza la información dada y los vectores que se muestran en la figura (b), se obtiene

$\omega_{CD} = -\omega_{CD}\mathbf{k}$ (se supone que la dirección de ω_{CD} es negativa)

$\mathbf{r}_{C/D} = 80 \cos 30^{\circ}\mathbf{i} + 80 \text{ sen } 30^{\circ}\mathbf{j} = 69.28\mathbf{i} + 40.00\mathbf{j}$ mm

$\omega_{AB} = -2\mathbf{k}$ rad/s

$\mathbf{r}_{B/A} = 60\mathbf{i}$ mm

$\omega_{BC} = \omega_{BC}\mathbf{k}$ (se supone que la dirección de ω_{BC} es positiva)

$\mathbf{r}_{C/B} = -50\mathbf{j}$ mm

Se observa que las ecuaciones anteriores sólo contienen dos incógnitas: ω_{CD} y ω_{BC}. Por tanto, es posible resolver la ecuación (d) para las dos incógnitas ya que es equivalente a dos ecuaciones escalares.

Al sustituir las expresiones anteriores en la ecuación (d) resulta

$$(-\omega_{CD}\mathbf{k}) \times (69.28\mathbf{i} + 40.00\mathbf{j}) = (-2\mathbf{k}) \times (60\mathbf{i}) + (\omega_{BC}\mathbf{k}) \times (-50\mathbf{j})$$

que se convierte en

$$-69.28\omega_{CD}\mathbf{j} + 40.00\omega_{CD}\mathbf{i} = -120\mathbf{j} + 50\omega_{BC}\mathbf{i}$$

la igualación de los coeficientes de **i** y **j** resulta en

$$40.00\omega_{CD} = 50\omega_{BC}$$
$$-69.28\omega_{CD} = -120$$

y la solución de esas dos ecuaciones es

$$\omega_{CD} = 1.732 \text{ rad/s} \quad \text{y} \quad \omega_{BC} = 1.386 \text{ rad/s} \qquad \textit{Respuesta}$$

Las respuestas positivas indican que las direcciones propuestas para ω_{CD} y ω_{BC} son correctas.

Problemas

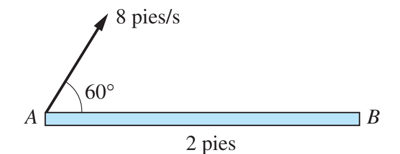


Fig. P16.19

16.19 En cierto instante, la velocidad del extremo A de la barra AB es 8 pies/s en la dirección que se muestra. Si se sabe que la magnitud de la velocidad del extremo B es 6 pies/s, determine la velocidad angular de la barra AB.

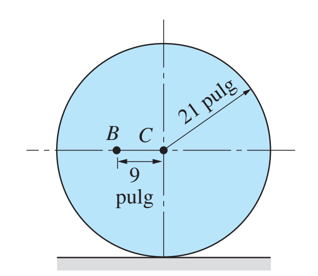


Fig. P16.20

16.20 La rueda gira sin deslizarse. En la posición que se muestra, la componente vertical de la velocidad del punto B es 8 pies/s y se dirige hacia arriba. Para esta posición, calcule la velocidad angular de la rueda y la velocidad de su centro C.

16.21 El disco rueda sin deslizarse con la velocidad angular constante ω. Para la posición que se indica, encuentre la velocidad angular de la barrera de conexión AB y la velocidad del deslizador A.

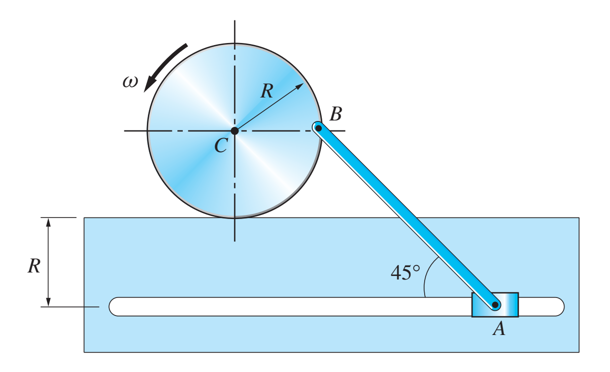


Fig. P16.21

16.22 El piñón diferencial engrana sobre las dos cremalleras. Si éstos se mueven con las velocidades que se muestran, determine la velocidad angular del piñón y la velocidad de su centro C.

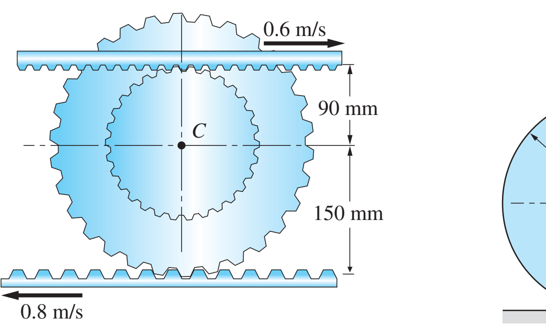


Fig. P16.22

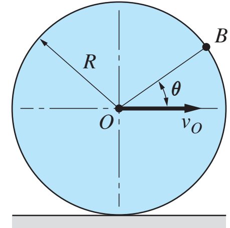


Fig. P16.23

16.23 La rueda gira sin deslizarse hacia la derecha con velocidad angular constante. La velocidad del centro de la rueda es v_0. Obtenga la rapidez del punto B sobre el borde como una función de su posición angular θ.

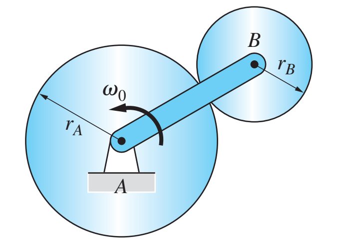


Fig. P16.24, P16.25

16.24 El brazo que une las dos ruedas con fricción rota con velocidad angular constante ω_0. Suponiendo que la rueda A es estacionaria y que no hay deslizamiento entre las dos, determine la velocidad angular de la rueda B.

16.25 Resuelva el problema 16.24 si la rueda A rota en sentido negativo con la velocidad angular $\omega_A = 2\omega_0$.

16.26 El engrane A, del tren de engranes planetarios, rota en sentido negativo con $\omega_A = 8$ rad/s. Calcule las velocidades angulares del engrane B y del brazo AB. Observe que el engrane externo C es estacionario.

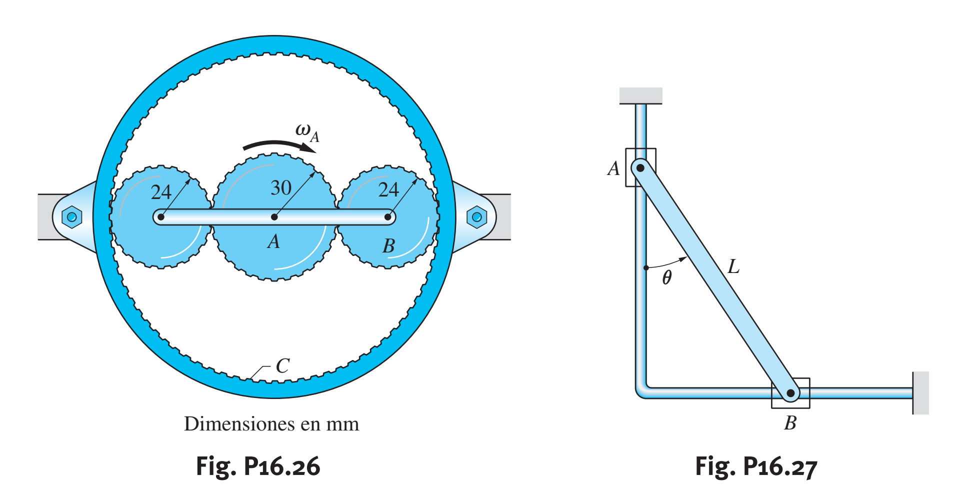


Fig. P16.26

Fig. P16.27

16.27 La barra AB rota en sentido positivo con la velocidad angular constante ω_0. (a) Encuentre las velocidades de los extremos A y B como funciones de θ. (b) Derive los resultados obtenidos del inciso (a) para determinar las aceleraciones de A y B en términos de θ.

16.28 El extremo A de la barra AD se empuja hacia la derecha con velocidad constante $v_A = 1.2$ pies/s. Encuentre la velocidad angular de AD como una función de θ.

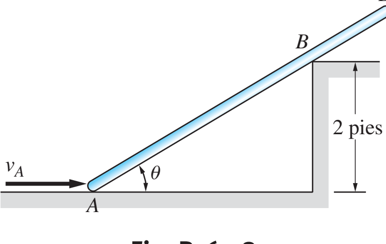


Fig. P16.28

16.29 La rapidez angular de la barra articulada AB en la posición que se muestra es 2.8 rad/s, en sentido negativo. Calcule la rapidez angular de los enlaces BC y CD en esta posición.

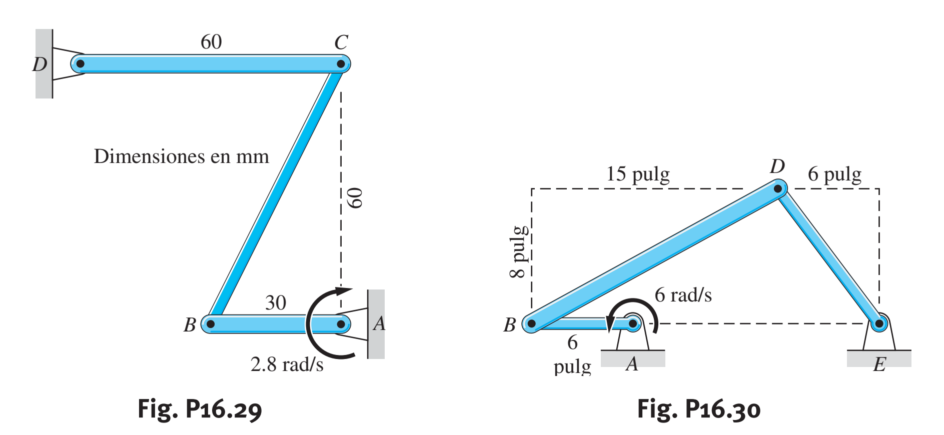


Fig. P16.29

Fig. P16.30

16.30 La barra articulada AB del mecanismo rota con rapidez angular constante de 6 rad/s, en sentido positivo. Obtenga las velocidades angulares de las barras articuladas BD y DE en la posición que se muestra.

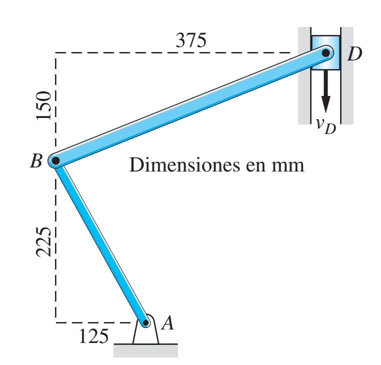


Fig. P16.31

16.31 Cuando el mecanismo está en la posición que se muestra, la velocidad del deslizador *D* es $v_D = 1.25$ m/s. Determine las velocidades angulares de las barras *AB* y *BD* en este instante.

16.32 Cuando la barra articulada está en la posición que se indica, la barra *AB* rota en sentido positivo a 16 rad/s. Obtenga la velocidad del collar deslizante *C* en esta posición.

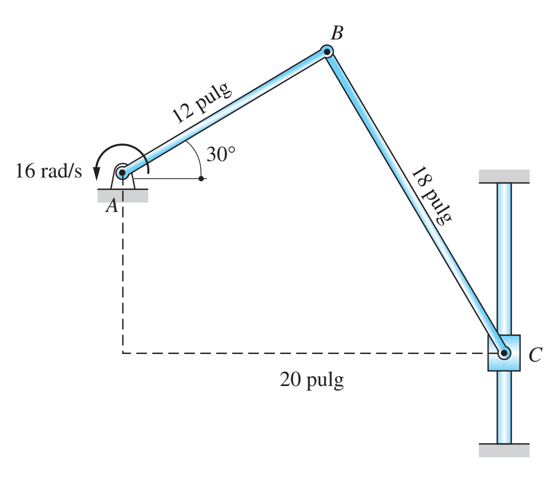


Fig. P16.32

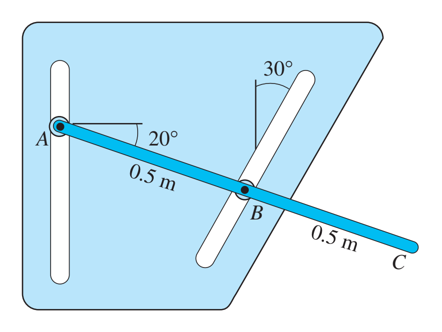


Fig. P16.33

16.33 En el instante que se muestra, el extremo *A* de la barra *ABC* tiene una velocidad de 2 m/s hacia abajo. Encuentre la velocidad angular de la barra y la rapidez del extremo *C* en este instante.

16.34 La barra *AB* rota en sentido positivo con velocidad angular constante $\omega_0 = 30$ rad/s. Obtenga las velocidades angulares de las barras *BD* y *DE* en la posición que se indica.

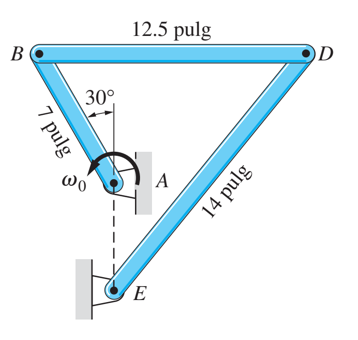


Fig. P16.34

16.35 La rueda gira sin deslizarse. Su centro tiene una velocidad constante de 0.6 m/s hacia la izquierda. Calcule la velocidad angular de la barra *BD* y la velocidad del extremo *D* cuando $\theta = 0$.

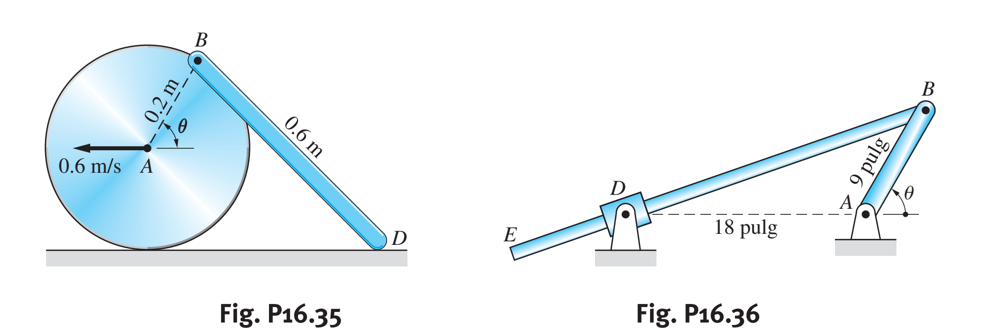


Fig. P16.35 Fig. P16.36

16.36 La manivela *AB* rota con velocidad angular constante de 16 rad/s, en sentido positivo. Determine la velocidad angular de la barra *BE* cuando $\theta = 60°$.

16.37 El cilindro hidráulico eleva el perno B a razón constante de 30 mm/s. Obtenga la rapidez del extremo D de la barra AD en el instante que se muestra.

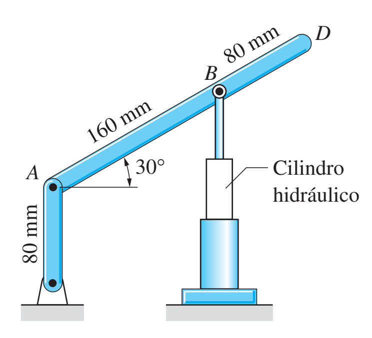


Fig. P16.37

16.38 En la posición que se muestra, las rapideces de los vértices A y B de la placa triangular recta son $v_A = 3$ m/s y $v_B = 2.4$ m/s, dirigida como se indica. Encuentre: (a) el ángulo α, y (b) la rapidez del vértice D.

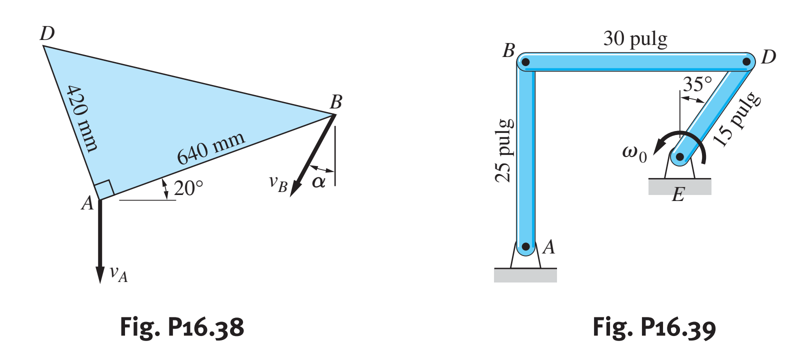


Fig. P16.38 **Fig. P16.39**

16.39 La barra DE rota en sentido positivo con velocidad angular constante $\omega_0 = 5$ rad/s. Determine las velocidades angulares de las barras AB y BD en la posición que se muestra.

16.6 Centro instantáneo para las velocidades

El centro instantáneo para las velocidades de un cuerpo que realiza movimiento en un plano, se define como el punto que tiene velocidad cero en el instante en consideración.* Este punto puede estar dentro o fuera del cuerpo (en el "cuerpo extendido"). Con frecuencia es conveniente emplear el centro instantáneo del cuerpo al calcular las velocidades de los puntos en el mismo.

*Algunas veces se emplean tres "centros" en el análisis cinemático del movimiento en un plano: el centro instantáneo de rotación para el movimiento virtual (véase el apartado 10.6), el centro instantáneo para las velocidades y para las aceleraciones. Cada uno de estos puntos simplemente se denota como el centro instantáneo cuando es claro a partir del contexto a qué centro se refiere. El análisis del centro instantáneo para las velocidades que se presenta aquí es comparable con el del centro instantáneo de rotación para el movimiento virtual del apartado 10.6.

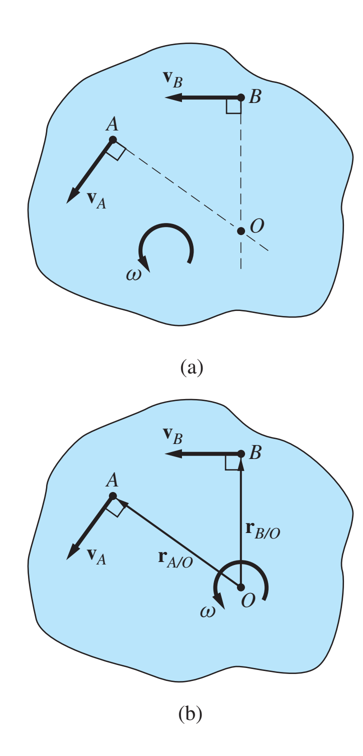


Fig. 16.10

La figura 16.10(a) muestra un cuerpo rígido que efectúa movimiento en un plano. Se supone que los vectores de velocidad para los puntos A y B no son paralelos y que la velocidad angular ω del cuerpo tiene sentido positivo (contrario a las manecillas del reloj). Para localizar el centro instantáneo para las velocidades, se traza una recta a través de A que sea perpendicular a $\mathbf{v}_A$ y una a través de B perpendicular a $\mathbf{v}_B$. Esas dos rectas se cortarán en el punto O de la figura. Si el punto O no está en el cuerpo, simplemente imagine que éste se ha alargado para incluirlo, dando así origen al *cuerpo extendido*.

Ahora se muestra que el punto O es el centro instantáneo, es decir, que la velocidad de O es cero. Como A, B y O son puntos que se encuentran en el mismo cuerpo rígido (o cuerpo extendido), entonces pueden escribirse las siguientes ecuaciones de velocidad relativa:

$$\mathbf{v}_O = \mathbf{v}_A - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{A/O} \tag{a}$$

$$\mathbf{v}_O = \mathbf{v}_B - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/O} \tag{b}$$

donde $\mathbf{r}_{A/O}$ y $\mathbf{r}_{B/O}$ son los vectores de posición relativa que se muestran en la figura 16.10(b). Debido a que tanto ω como $\mathbf{r}_{A/O}$ son perpendiculares a $\mathbf{v}_A$, se tiene que $\omega \times \mathbf{r}_{A/O}$ en la ecuación (a) es paralelo a $\mathbf{v}_A$. Esto significa que $\mathbf{v}_O$ es paralelo a $\mathbf{v}_A$. De modo similar, a partir de la ecuación (b) es posible probar que $\mathbf{v}_O$ es paralelo a $\mathbf{v}_B$. Ya que un vector distinto de cero no puede ser paralelo de manera simultánea a dos direcciones diferentes, entonces se concluye que $\mathbf{v}_O = \mathbf{0}$. Por tanto, el punto O es en efecto el centro instantáneo para las velocidades.

En general, el centro instantáneo para las velocidades no es un punto fijo. Por tanto, su aceleración no por fuerza es cero. Sin embargo, si un punto de un cuerpo es fijo, entonces es evidente que ese punto es el centro instantáneo tanto para velocidades como para aceleraciones.

Si O es el centro instantáneo, la ecuación (a) se reduce a:

$$\mathbf{v}_A = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{A/O} \qquad (v_A = r_{A/O}\,\omega) \tag{16.13}$$

Esta ecuación tiene la misma forma que la primera de las ecuaciones (16.8) para la rotación alrededor de un eje fijo que pasa por O. Sin embargo, es preciso reiterar que para el movimiento general en un plano el centro instantáneo no es un punto fijo. Por tanto, la analogía con la rotación respecto a un eje fijo es válida sólo para las velocidades en un *instante* de tiempo dado (a esto se debe el término “centro instantáneo”). La analogía no se aplica a las aceleraciones.

Las siguientes reglas, que se deducen directamente de la ecuación (16.13), se aplican cuando se utiliza el centro instantáneo.

1. La velocidad de cualquier punto en el cuerpo es perpendicular a la línea que se dibuja del punto al centro instantáneo.
2. La magnitud de la velocidad de cualquier punto del cuerpo es proporcional a la distancia del punto a partir del centro instantáneo.
3. El sentido del vector de velocidad de cualquier punto debe ser consistente con el sentido de la velocidad angular del cuerpo.

El trazo que se muestra en la figura 16.10(a) para localizar el centro instantáneo es válido de manera evidente sólo si $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{v}_B$ no son paralelas. La figura 16.11 ilustra los métodos para ubicar el centro instantáneo cuando $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{v}_B$ son paralelas.

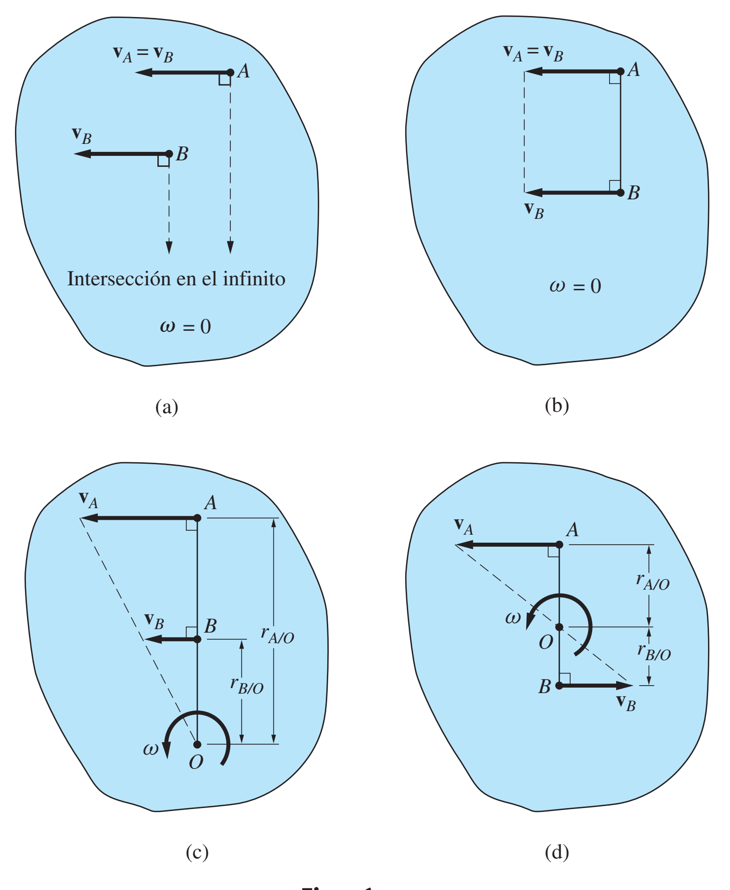


Fig. 16.11

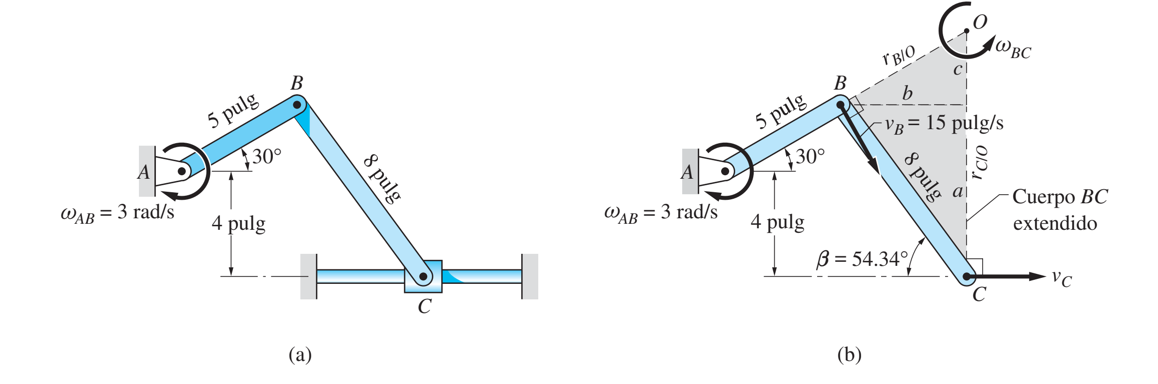
En la figura 16.11(a), las rectas perpendiculares a los vectores de velocidad son paralelas, lo que significa que el centro instantáneo está a una distancia infinita de A y B. Esto conduce a la conclusión de que $\omega = 0$; es decir, el cuerpo se traslada con $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B$.

En las partes de la (b) a la (d) de la figura 16.11, las rectas que unen A y B son perpendiculares a ambos vectores de velocidad y la construcción común para localizar el centro instantáneo no funciona. En el caso en que $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B$, como en la figura 16.11(b), el centro instantáneo está en el infinito, así que $\omega = 0$ (es decir, el cuerpo se traslada). Si las magnitudes de las velocidades no son iguales, el centro instantáneo se localiza empleando las construcciones de las partes de la (c) a la (d) de la figura 16.11, que son sólo aplicaciones de las reglas de la 1 a la 3 que se han establecido recientemente.

Surge la pregunta de si vale la pena hacer la simplificación del análisis de velocidad con base en el centro instantáneo, debido al trabajo que cuesta encontrar a este último, en primer lugar. Una regla general es iniciar por marcar el centro instantáneo sobre un esquema del cuerpo. Si es fácil calcular las distancias entre los puntos de importancia cinemática del cuerpo (o cuerpo extendido) y el centro instantáneo, el análisis es adecuado para el uso del centro instantáneo. Sin embargo, si se requiere una cantidad de trigonometría prohibitiva para calcular la ubicación de dicho centro, sería preferible emplear como solución el método de la velocidad relativa del apartado anterior. Por supuesto, existen muchos problemas que necesitan la misma cantidad de trabajo usando otros métodos, en cuyo caso la preferencia personal le indicará cuál de ellos aplicar.

Problema de ejemplo 16.7

Cuando el mecanismo de la figura (a) está en la posición que se muestra, la velocidad angular de la barra AB es $\omega_{AB} = 3$ rad/s, en sentido negativo. Utilizando los centros instantáneos para las velocidades, calcule la velocidad angular de la barra BC y la velocidad del deslizador C para esta posición. (Este problema se ha resuelto antes como el de ejemplo 16.5 con el método de la velocidad relativa.)



Solución

Primero es preciso localizar los centros instantáneos de los dos cuerpos rígidos AB y BC. Debido a que A es un punto fijo, es evidentemente el centro instantáneo de la barra AB. El centro instantáneo de BC, que se ha marcado como O en la figura (b), se localiza en el punto de intersección de las rectas que son perpendiculares a los vectores velocidad de B y C. Observe que $\mathbf{v}_B$ es perpendicular a AB y $\mathbf{v}_C$ es horizontal. Por tanto, O se ubica en la intersección de la recta AB y la recta vertical que pasa por C.

De la geometría en la figura (b) se observa que 5 sen 30º + 4 = 8 sen β, de donde $\beta = 54.34$º. Por tanto, las distancias a, b y c son

$$a = 8 \operatorname{sen} 54.34° = 6.500 \text{ pulg}$$

$$b = 8 \cos 54.34° = 4.664 \text{ pulg}$$

$$c = b \tan 30° = 4.664 \tan 30° = 2.693 \text{ pulg}$$

Las distancias desde O a B y C son

$$r_{B/O} = c/\operatorname{sen} 30° = 2.693/\operatorname{sen} 30° = 5.386 \text{ pulg}$$

$$r_{C/O} = a + c = 6.500 + 2.693 = 9.193 \text{ pulg}$$

Ahora que se ha encontrado el centro instantáneo para cada barra es posible calcular las velocidades solicitadas.

Si se considera el movimiento de AB (su centro instantáneo está en A), se encuentra que $v_B = r_{B/A}\omega_{AB} = 5(3) = 15$ pulg/s, dirigida como se muestra en la figura (b). El análisis de movimiento de BC (su centro instantáneo está en O) da

$$\omega_{BC} = \frac{v_B}{r_{B/O}} = \frac{15}{5.386} = 2.785 \text{ rad/s}$$

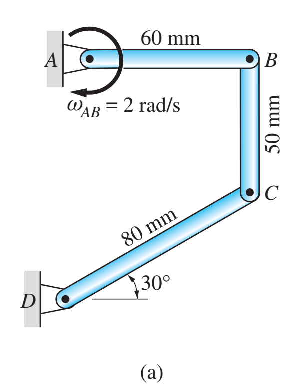
$$\boldsymbol{\omega}_{BC} = 2.79 \text{ rad/s} \circlearrowleft$$ *Respuesta*

y

$$v_C = r_{C/O}\omega_{BC} = 9.193(2.785) = 25.60 \text{ pulg/s}$$

$$\mathbf{v}_C = 25.6 \text{ pulg/s} \rightarrow \qquad \textit{Respuesta}$$

Problema de ejemplo **16.8**

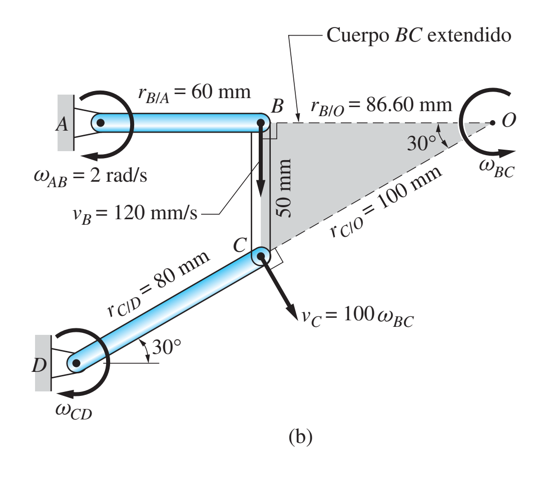


(a)

En la figura (a), cuando la conexión articulada está en la posición que se muestra, la velocidad angular de la barra *AB* es $\omega_{AB} = 2$ rad/s, en sentido negativo. Para esta posición, utilice los centros instantáneos para las velocidades y determine las velocidades angulares de las barras *BC* y *CD,* y la velocidad de *C*. (Este problema se resolvió como el de ejemplo 16.6 con el método de la velocidad relativa.)

Solución

Debido a que los puntos *A* y *D* son fijos, son los centros instantáneos para las barras *AB* y *CD*, respectivamente. El centro instantáneo para la barra *BC*, que se ha marcado como *O* en la figura (b), se localiza en el punto de intersección de las rectas que son perpendiculares a los vectores de velocidad de *B* y *C*. Ya que los vectores $\mathbf{v}_B$ y $\mathbf{v}_C$ son perpendiculares a *AB* y *CD*, respectivamente, el centro instantáneo se encuentra en la intersección de esas dos rectas. Observe que el cuerpo *BC* debe "extenderse" para incluir al punto *O*.



(b)

Las distancias desde *O* a *B* y *C*, que se han encontrado a partir del triángulo *OBC*, son

$$r_{B/O} = 50/\tan 30^\circ = 86.60 \text{ mm}$$

$$r_{C/O} = 50/\text{sen } 30^\circ = 100 \text{ mm}$$

Ahora los centros instantáneos *A*, *O* y *D* pueden utilizarse para calcular, directamente de la figura (b), las velocidades angulares solicitadas.

Al considerar el movimiento de AB (su centro instantáneo está en A), se encuentra que $v_B = r_{B/A}\omega_{AB} = 60(2) = 120$ mm/s, dirigida como se muestra en la figura (b). Cuando se analiza el movimiento de BC (su centro instantáneo se encuentra en O) resulta

$$\omega_{BC} = \frac{v_B}{r_{B/O}} = \frac{120}{86.60} = 1.386 \text{ rad/s}$$

$$\boldsymbol{\omega}_{BC} = 1.386 \text{ rad/s} \circlearrowleft$$ *Respuesta*

y

$$v_C = r_{C/O}\omega_{BC} = 100(1.386) = 138.6 \text{ mm/s}$$

$$\mathbf{v}_C = 138.6 \text{ mm/s} \quad 30°$$ *Respuesta*

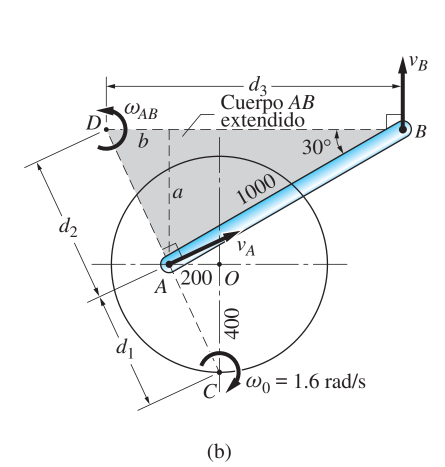
Ya que el punto C también está sobre la barra CD (su centro instantáneo se encuentra en D), la velocidad angular de la barra CD es

$$\omega_{CD} = \frac{v_C}{r_{C/D}} = \frac{138.6}{80} = 1.733 \text{ rad/s}$$

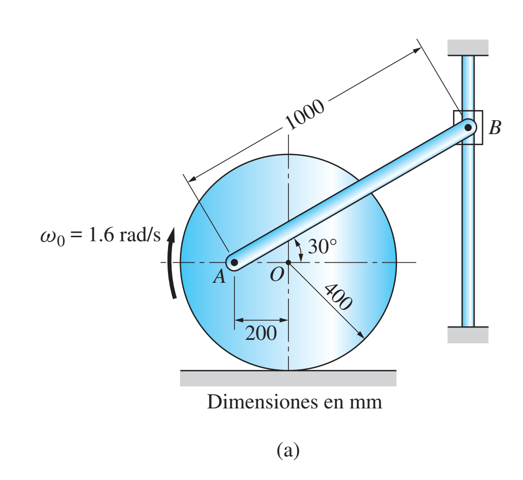
$$\boldsymbol{\omega}_{CD} = 1.733 \text{ rad/s} \circlearrowleft$$ *Respuesta*

Problema de ejemplo 16.9

En la figura (a), la rueda gira sin deslizarse con velocidad angular constante $\omega_0 = 1.6$ rad/s, en sentido negativo. Calcule la velocidad angular de la barra AB y la velocidad del deslizador B cuando el mecanismo está en la posición que se muestra. Utilice los centros instantáneos para las velocidades.



(b)



(a)

Solución

En la figura (b) se muestran los vectores de velocidad, las distancias y los puntos requeridos para resolver este problema.

Puesto que la rueda gira sin deslizarse, su centro instantáneo está en el punto de contacto C. Por tanto, $\mathbf{v}_A$ es perpendicular a la recta AC. Observe que la pendiente de AC es igual a $\overline{OC}/\overline{AO} = 400/200 = 2$.

El centro instantáneo de la barra AB, que se ha etiquetado como D en la figura (b), se localiza en la intersección de las rectas que son perpendiculares a $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{v}_B$. Ya que $\mathbf{v}_A$ es perpendicular a AC, entonces D también está sobre AC. La recta BD, que se dibuja perpendicular a $\mathbf{v}_B$, es horizontal porque $\mathbf{v}_B$ es vertical (aquí no es necesario saber que el sentido de $\mathbf{v}_B$ es hacia arriba).

Al consultar la figura (b), las distancias de interés se calculan como sigue

$$d_1 = \sqrt{\overline{AO}^2 + \overline{OC}^2} = \sqrt{200^2 + 400^2} = 447.2 \text{ mm}$$

$$a = 1000 \operatorname{sen} 30° = 500 \text{ mm}$$

$$b = a/2 = 250 \text{ mm} \quad \text{(la pendiente de la recta } AC \text{ es 2)}$$

$$d_2 = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{500^2 + 250^2} = 559.0 \text{ mm}$$

$$d_3 = 1000 \cos 30° + b = 1000 \cos 30° + 250 = 1116 \text{ mm}$$

Al utilizar las distancias d_1, d_2 y d_3, y $\omega_0 = 1.6$ rad/s, se encuentra que

$$v_A = d_1\omega_0 = 447.2(1.6) = 715.5 \text{ mm/s}$$

$$\mathbf{v}_A = 716 \text{ mm/s} \quad \text{(pendiente 1:2)}$$ *Respuesta*

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{d_2} = \frac{715.5}{559.0} = 1.280 \text{ rad/s}$$

$$\boldsymbol{\omega}_{AB} = 1.280 \text{ rad/s} \circlearrowleft$$ *Respuesta*

$$v_B = d_3\omega_{AB} = 1116(1.280) = 1428 \text{ mm/s}$$

$$\mathbf{v}_B = 1428 \text{ mm/s} \uparrow$$ *Respuesta*

El sentido de $\mathbf{v}_A$ se encontró al considerar que la velocidad angular de la rueda va en sentido negativo y que su centro instantáneo está en C. La dirección positiva de ω_{AB} se dedujo al observar el sentido de $\mathbf{v}_A$ y la ubicación del centro instantáneo D. La dirección de ω_{AB} y la localización de B relativa a D determinan que el sentido de $\mathbf{v}_B$ sea hacia arriba.

Con frecuencia es conveniente mostrar en el mismo esquema los centros instantáneos de más de un cuerpo, como en la figura (b). Sin embargo, es preciso tener cuidado al utilizar el centro instantáneo apropiado cuando se analiza la velocidad de un punto en particular. Por ejemplo, un error común al consultar la figura (b) sería escribir $v_C = (d_1 + d_2)\omega_{AB}$, que es incorrecto porque D es el centro instantáneo de la barra AB, que no incluye el punto C.

Problemas

Nota: los siguientes problemas deben resolverse empleando los centros instantáneos para las velocidades.

16.40 El extremo de la cuerda enrollada alrededor del centro de la rueda se jala hacia la derecha con la velocidad v_0 = 28 pulg/s. Encuentre la velocidad angular de la rueda, suponiendo que no se desliza.

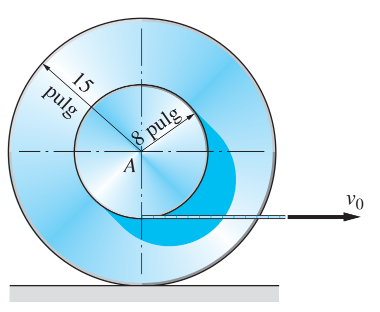


Fig. P16.40

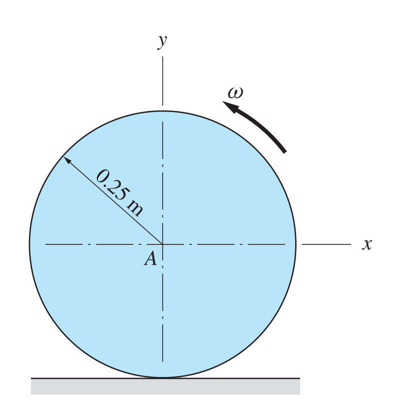


Fig. P16.41

16.41 La rueda gira sin deslizarse con la velocidad angular ω = 8 rad/s. Determine las coordenadas de un punto B sobre la rueda para el que el vector de velocidad es $\mathbf{v}_B = -2.4\mathbf{i} + 0.7\mathbf{j}$ m/s.

16.42 La rueda desbalanceada gira y se desliza sobre un plano horizontal. En el instante que se muestra, se indican la velocidad angular ω de la rueda y la velocidad v_0 de su centro. Encuentre la magnitud y dirección de la velocidad de G en este instante.

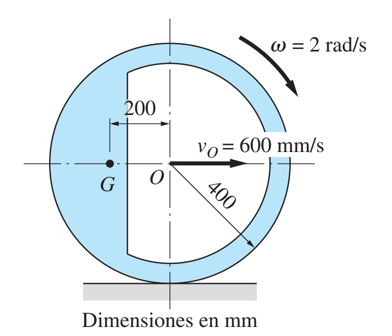


Fig. P16.42

16.43 Una rueda de 500 mm de diámetro gira y se desliza sobre un plano horizontal. La velocidad angular de la rueda es ω = 12 rad/s (en sentido positivo) y la velocidad del centro de la rueda es 1.8 m/s hacia la izquierda. (a) Determine el centro instantáneo para las velocidades de la rueda. (b) Calcule la velocidad del punto sobre la rueda que está en contacto con el plano.

16.44 Determine las coordenadas del centro instantáneo para las velocidades de la barra AB en (a) y (b).

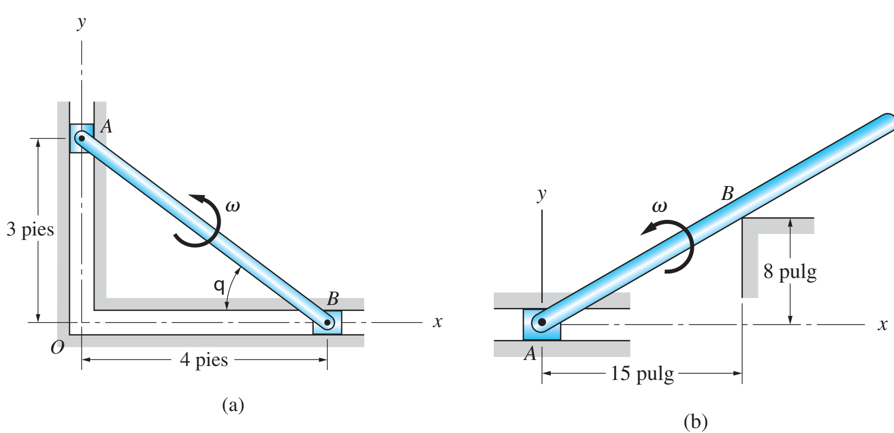


Fig. P16.44

16.45 Encuentre las coordenadas del centro instantáneo para las velocidades de la barra AB en (a) y (b).

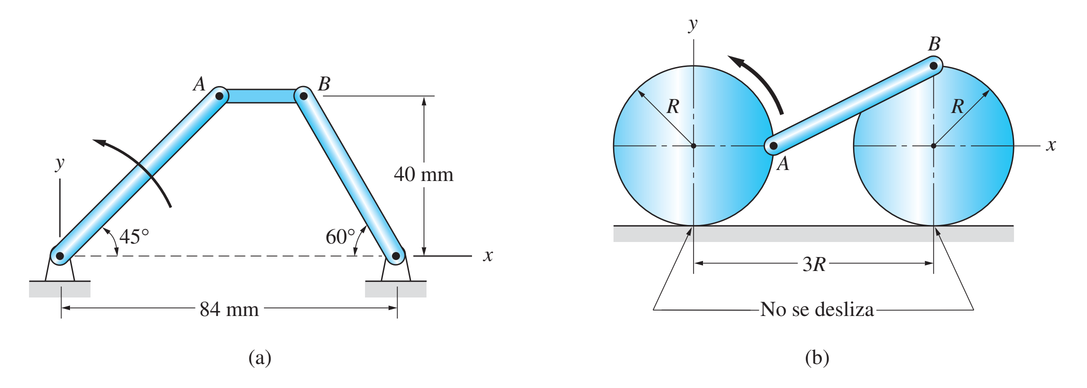


Fig. P16.45

16.46 El brazo que une los centros de los engranes A y B rota en sentido positivo con la velocidad angular de 4.8 rad/s. Al mismo tiempo, A rota a 24 rad/s, también en sentido positivo. Determine la velocidad angular de B.

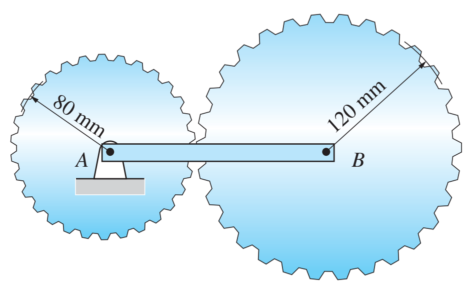


Fig. P16.46

16.47 El piñón engrana con las dos cremalleras. Si éstos se mueven con las velocidades que se muestran, obtenga la velocidad angular del piñón y la velocidad de su centro C. (*Nota:* este problema se resolvió como el 16.22 con el método de la velocidad relativa.)

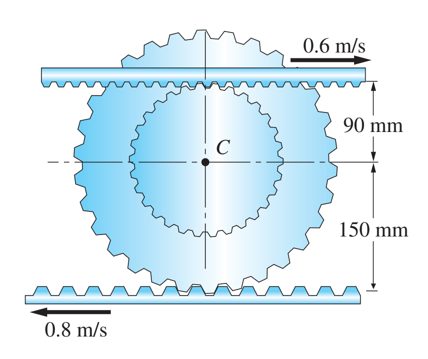


Fig. P16.47

16.48 La barra AB rota en sentido positivo con la velocidad angular constante de 6 rad/s. Determine la velocidad angular de la barra CD cuando el mecanismo está en la posición que se indica.

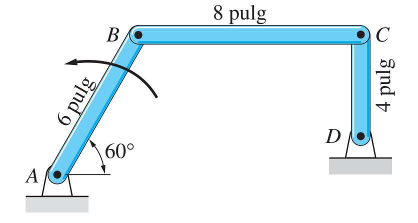


Fig. P16.48

16.49 Dibuje el esquema del lugar geométrico del centro instantáneo de las velocidades de la barra AB en la figura P16.44(a) conforme θ varía de 0 a 90º. (Esta curva se llama *centrodo espacial*.)

16.50 La tabla de madera de 8 pies rota conforme cae en el plano vertical. Cuando la tabla está en una posición horizontal, las velocidades de los extremos A y B son como se indica en la figura. Para esta posición, obtenga la ubicación del centro

instantáneo para las velocidades, la velocidad angular de la tabla y la velocidad del punto medio G.

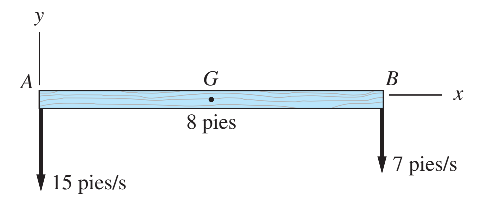


Fig. P16.50

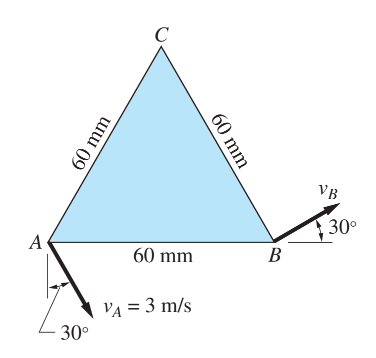


Fig. P16.51

16.51 Para una placa triangular que efectúa movimiento en un plano, se conocen $\mathbf{v}_A$ y la dirección de $\mathbf{v}_B$. Calcule la rapidez angular de la placa y las velocidades de los vértices B y C.

16.52 En el instante que se muestra, la velocidad angular del cilindro, que rueda sin deslizarse, es 2 rad/s, en sentido positivo. Encuentre la velocidad del extremo B de la varilla que está sujeta al cilindro en A.

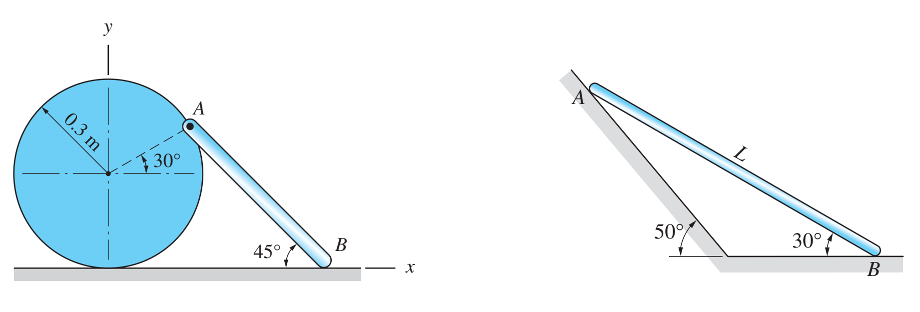


Fig. P16.52

Fig. P16.53

16.53 Cuando la barra AB está en la posición que se indica, el extremo B se desliza hacia la derecha con una velocidad de 0.8 m/s. Determine la velocidad del extremo A en esta posición.

16.54 El deslizador C del mecanismo tiene una velocidad descendente constante de 30 pulg/s. Obtenga la velocidad angular de la manivela AB en la posición que se muestra.

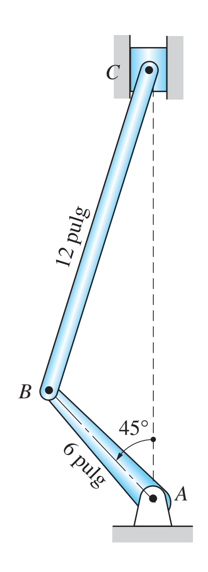


Fig. P16.54

16.55 La barra BC de la conexión articulada se desliza en el collar D. Si la barra AB rota con velocidad angular de 12 rad/s, en sentido negativo, determine la velocidad angular de BC cuando se encuentra en la posición horizontal que se indica.

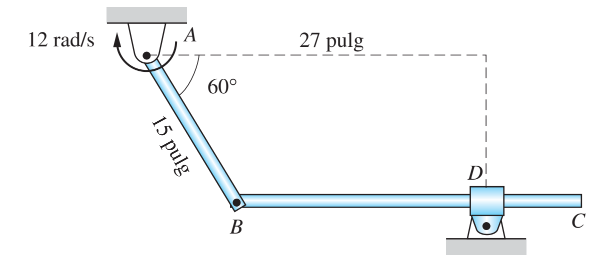


Fig. P16.55

16.56 La barra *BC* de la conexión articulada se desliza en el collar *D*. Si la barra *AB* rota con velocidad angular constante de 12 rad/s, en sentido negativo obtenga la velocidad angular de la barra *BC* en la posición que se muestra.

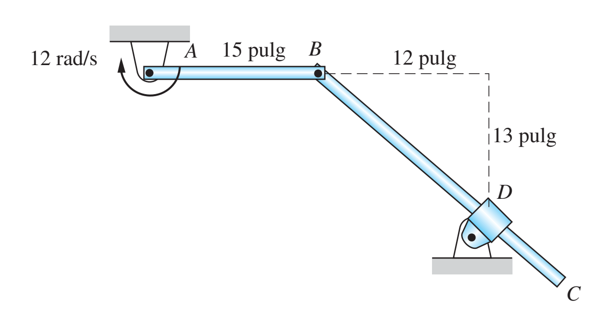


Fig. P16.56

16.57 Cuando el mecanismo está en la posición que se presenta, la velocidad angular de la barra *AB* es de 72 rad/s, en sentido negativo. Para esta posición, calcule la velocidad angular de la placa *BCD* y la velocidad del vértice *D*.

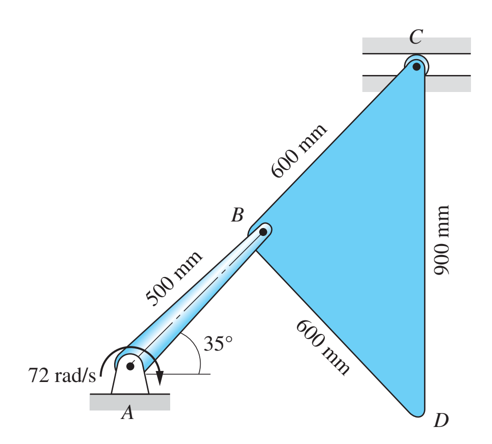


Fig. P16.57

16.58 La manivela *AB* del mecanismo rota a 8 rad/s, en sentido positivo. Calcule las velocidades de los deslizadores *C* y *D* en el instante que se muestra.

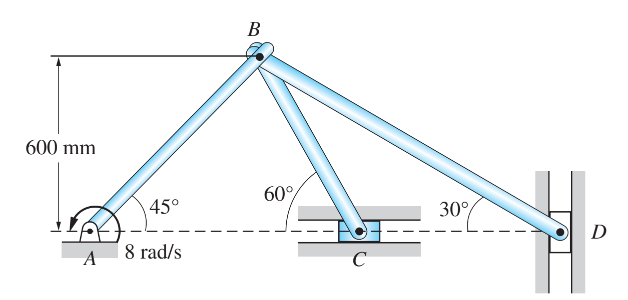


Fig. P16.58

16.59 La barra AB del mecanismo rota con velocidad angular ω_0, en sentido negativo. Calcule las velocidades angulares de las barras BD y DE para la posición que se muestra.

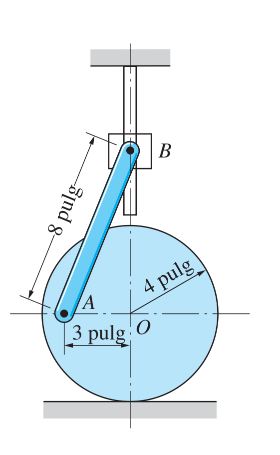


Fig. P16.60

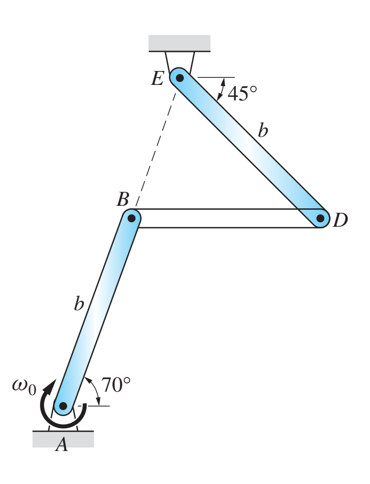


Fig. P16.59

16.60 Cuando el mecanismo está en la posición que se indica, la velocidad del centro O del disco es de 16 pulg/s hacia la derecha. Suponiendo que el disco rueda sin deslizarse, calcule la velocidad del collar B en esta posición.

16.7 Método de la aceleración relativa

En los apartados 16.5 y 16.6, se analizaron las velocidades de los puntos en un cuerpo rígido que efectúan movimiento en un plano. Se presentaron dos métodos: el de la velocidad relativa y el de los centros instantáneos para las velocidades. En este apartado se presenta el *método de la aceleración relativa*, que utiliza la ecuación $\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$ para dos puntos en el mismo cuerpo rígido.

La figura 16.21(a) muestra un cuerpo rígido que realiza un movimiento general en un plano. Los vectores de velocidad y aceleración angulares del cuerpo son ω y α, respectivamente. Sean A y B dos puntos en el cuerpo, la aceleración de B respecto de A es, de acuerdo con las ecuaciones (16.8),

$$\mathbf{a}_{B/A} = (\mathbf{a}_{B/A})_n + (\mathbf{a}_{B/A})_t \qquad (16.14a)$$

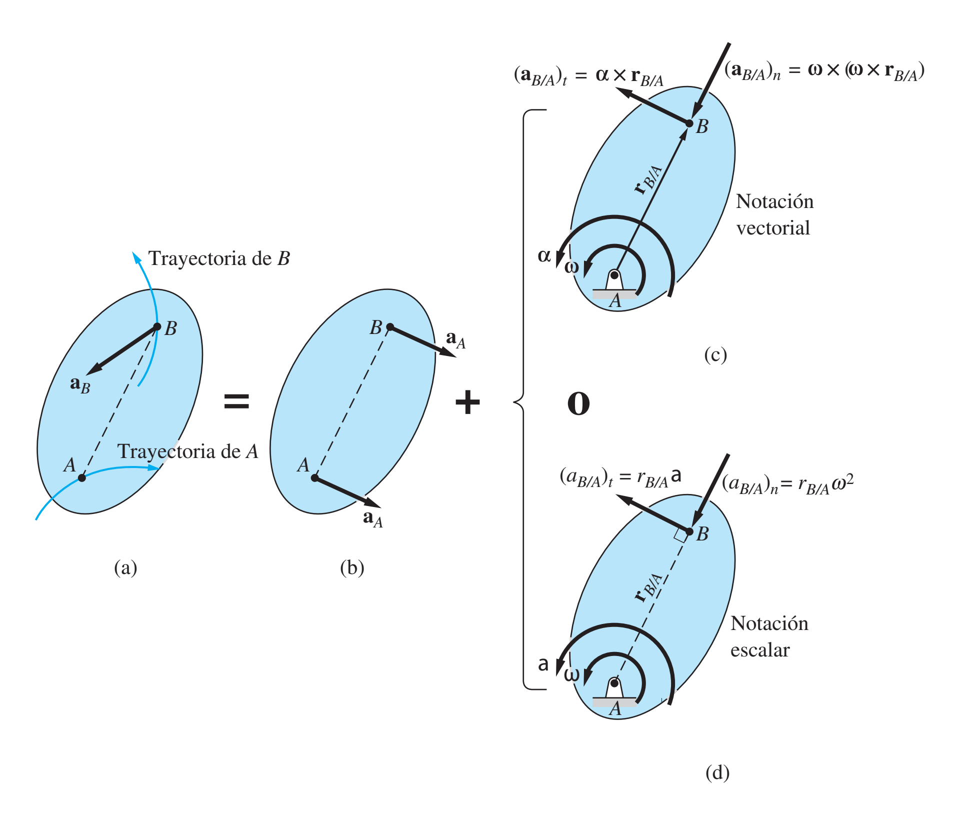
donde las componentes normal y tangencial de la aceleración relativa son

$$(\mathbf{a}_{B/A})_n = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}) \qquad [(a_{B/A})_n = r_{B/A}\omega^2] \qquad (16.14b)$$

$$(\mathbf{a}_{B/A})_t = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A} \qquad [(a_{B/A})_t = r_{B/A}\alpha] \qquad (16.14c)$$

Al sustituir las ecuaciones (16.14) en $\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$ se obtiene

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}) + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A} \qquad (16.15)$$



Movimiento en un plano = Traslación + Rotación respecto de *A*

Fig. P16.58

En la figura 16.12 se ilustra la interpretación física de la ecuación (16.15). En ella se muestra que el movimiento general en un plano es equivalente a la superposición de dos movimientos más sencillos (esta equivalencia también formó la base para el análisis de la velocidad relativa):

1. Una traslación del cuerpo rígido, donde la aceleración de cada punto es igual a la aceleración del punto de referencia *A* ($\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A$), como se muestra en la figura 16.12(b).
2. En las figuras 16.12(c) o (d) se muestra una rotación del cuerpo rígido respecto a un eje fijo en *A* [$\mathbf{a}_{B/A} = (\mathbf{a}_{B/A})_n + (\mathbf{a}_{B/A})_t$]. La indicación de un apoyo articulado en *A* refuerza el concepto de que *A* se considera fijo en el instante en que se estudia el movimiento.

La contribución de la rotación del cuerpo a la aceleración de B puede calcularse con la notación vectorial indicada en la figura 16.12(c) o la notación escalar indicada en la 16.12(d). La elección de la notación es un asunto de preferencia personal. Cuando utilice la notación escalar recuerde que: 1. $(\mathbf{a}_{B/A})_n$ siempre se dirige hacia el punto de referencia *A*, y 2. $(\boldsymbol{a}_{B/A})_t$ es perpendicular a *AB* y su sentido está determinado por la dirección de la aceleración angular α del cuerpo (recuerde que α es una propiedad de este último y que es independiente de la elección del punto de referencia).

El método de la aceleración relativa consiste en escribir la ecuación $\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}_{B/A}) + \alpha \times \mathbf{r}_{B/A}$ para dos puntos en el *mismo cuerpo rígido* y después resolverla para las incógnitas. Para el movimiento en un plano, la ecuación (16.15) es equivalente a dos ecuaciones escalares (por ejemplo, las que resultan de igualar las componentes horizontales y verticales de ambos lados de la ecuación vectorial). El número de variables que se presentan en la (16.15) es seis (suponiendo que se conoce $\mathbf{r}_{B/A}$):

$\mathbf{a}_B$: dos variables (magnitud y dirección, o componentes horizontal y vertical)
$\mathbf{a}_A$: dos variables (magnitud y dirección, o componentes horizontal y vertical)
ω: una variable (magnitud ω de la velocidad angular)
α: una variable (magnitud α de la aceleración angular)

La ecuación (16.15) tiene solución sólo si cuatro de las seis variables mencionadas se conocen de antemano. En general es posible encontrar la velocidad angular ω del cuerpo mediante el análisis de la velocidad descrito en los apartados previos, dejando así la necesidad de conocer tres variables adicionales (esta situación es similar a la que se encuentra en el análisis de la velocidad relativa). A esto le sigue que es preciso restringir la elección de A o B como puntos cuyas aceleraciones contienen menos de dos incógnitas y que se designan como *puntos con importancia cinemática para la aceleración*.

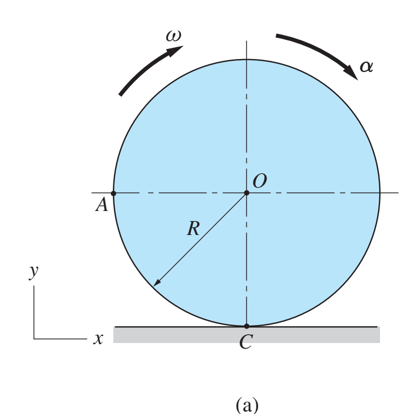
Los pasos en la aplicación del método de la aceleración relativa son:

Paso 1: Si se desconoce la velocidad angular ω, entonces encuéntrela por medio del análisis de la velocidad relativa descrito en los apartados previos.
Paso 2: Identifique dos puntos con importancia cinemática (A y B) en el mismo cuerpo rígido.
Paso 3: Escriba $\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}_{B/A}) + \alpha \times \mathbf{r}_{B/A}$, identificando las variables desconocidas (puede utilizar la notación vectorial o escalar).
Paso 4. Si el número de incógnitas es dos, resuelva la ecuación.

Si el número de incógnitas es mayor que dos, el problema puede resolverse considerando el movimiento de otros puntos con importancia cinemática.

El centro instantáneo para las aceleraciones es el punto en el cuerpo que tiene aceleración cero. En general, los centros instantáneos para las velocidades y las aceleraciones no coinciden. Se puede probar que ambos centros coinciden sólo si la velocidad angular del cuerpo es cero o si éste rota respecto a un eje fijo. En principio, es posible encontrar el centro instantáneo para las aceleraciones en el caso de cualquier cuerpo que realiza movimiento en un plano. Sin embargo, la dificultad para localizar este punto usualmente no compensa las ventajas que se obtienen con su uso. Por esta razón, en este libro no se emplea el centro instantáneo para las aceleraciones.

Problema de ejemplo 16.10



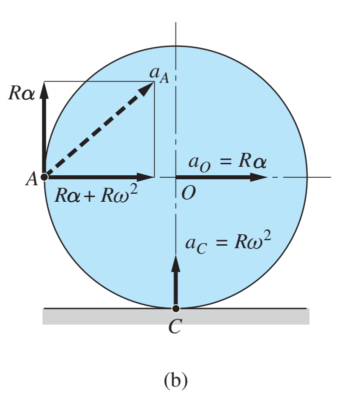
(a)

La rueda de radio R, que se muestra en la figura (a), gira sin deslizarse. En el instante que se indica, su velocidad y aceleración angulares son ω y α, ambas en sentido negativo. Determine los vectores de aceleración de: 1. C, el punto de contacto sobre la rueda, y 2. el punto A.

Solución

Comentarios introductorios

Este problema se resolverá empleando las notaciones escalar y vectorial. Se elige O (el centro de la rueda) como el punto de referencia, porque a partir de la ecuación (16.12a) se sabe que su aceleración es $\mathbf{a}_0 = R\alpha\mathbf{i}$, como se ilustra en la figura (b).



(b)

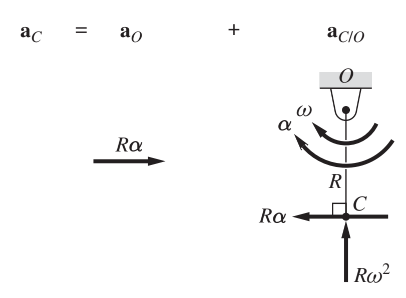


Solución I (uso de la notación escalar)

Parte 1

Cuando se usa la notación escalar para relacionar las aceleraciones de C y O, entonces $\mathbf{a}_{C/O}$ se calcula suponiendo que el punto O es fijo. Por tanto, se tiene

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_O + \mathbf{a}_{C/O}$$



que da

$$\mathbf{a}_C = R\omega^2 \uparrow \qquad \textit{Respuesta}$$

En la figura (b) se muestra este resultado. No obstante que C es el centro instantáneo para las velocidades, su aceleración no es cero. Esto tiene sentido porque la velocidad de C cambia su dirección de arriba hacia abajo conforme pasa sobre el punto de contacto con el piso. Así, la aceleración de C en el instante de contacto es diferente de cero y se dirige hacia arriba.

Parte 2

Las aceleraciones de A y O se relacionan con

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_O + \mathbf{a}_{A/O}$$

Rα — Rα, $R\omega^2$, A, R, α, ω, O

que da

$$\mathbf{a}_A = \begin{array}{l} R\alpha \\ \uparrow \\ \rightarrow R(\alpha+\omega^2) \end{array}$$ *Respuesta*

En la figura (b) también se muestra el vector de aceleración de A.

Solución II (uso de la notación vectorial)

Parte 1

Al utilizar la notación vectorial, la relación entre las aceleraciones de C y D es

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_O + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{C/O} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{C/O})$$

Cuando se sustituye $\mathbf{r}_{C/O} = -R\mathbf{j}$ [véase la figura(c)], $\omega = -\omega\mathbf{k}$ y $\alpha = -\alpha\mathbf{k}$, se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_C &= R\alpha\mathbf{i} + (-\alpha\mathbf{k}) \times (-R\mathbf{j}) + (-\omega\mathbf{k}) \times [(-\omega\mathbf{k}) \times (-R\mathbf{j})] \\ &= R\alpha\mathbf{i} - R\alpha\mathbf{i} + (-\omega\mathbf{k}) \times (-R\omega\mathbf{i}) \\ &= R\omega^2\mathbf{j} \end{aligned}$$ *Respuesta*

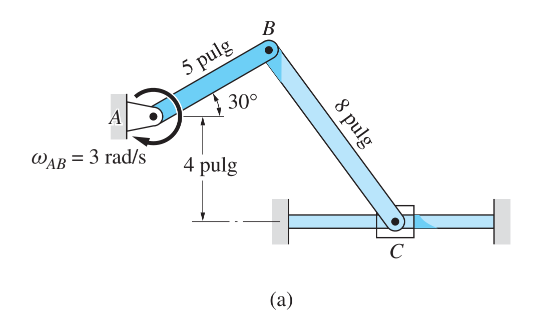
Parte 2

La relación entre las aceleraciones de A y O queda, sustituyendo $\mathbf{r}_{A/O} = -R\mathbf{i}$ [véase la figura(c)],

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_A &= \mathbf{a}_O + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{A/O} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{A/O}) \\ &= R\alpha\mathbf{i} + (-\alpha\mathbf{k}) \times (-R\mathbf{i}) + (-\omega\mathbf{k}) \times [(-\omega\mathbf{k}) \times (-R\mathbf{i})] \\ &= R\alpha\mathbf{i} + R\alpha\mathbf{j} + (-\omega\mathbf{k}) \times (R\omega\mathbf{j}) = R\alpha\mathbf{i} + R\alpha\mathbf{j} + R\omega^2\mathbf{i} \\ &= R(\alpha + \omega^2)\mathbf{i} + R\alpha\mathbf{j} \end{aligned}$$ *Respuesta*

Problema de ejemplo **16.11**

En la figura (a) la barra AB del mecanismo que se muestra rota con una velocidad angular constante de 3 rad/s, en sentido negativo. Determine la aceleración angular de la barra BC y la aceleración del deslizador C en el instante en que AB forma un ángulo de 30º con la horizontal, como se indica.

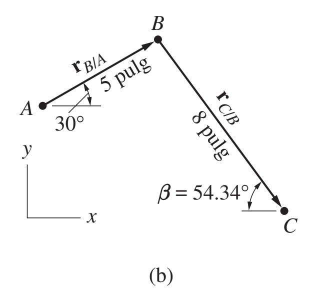


(a)

Solución

Comentarios introductorios

Este problema se resolverá con la notación escalar (Solución I) y la vectorial (Solución II). Debido a que no se ha proporcionado la velocidad angular de la barra BC, debe calcularse antes de obtener las aceleraciones. Suponga que esto ya se ha hecho, de lo que resulta que $\omega_{BC} = 2.785$ rad/s en sentido positivo.* Aún más, se supone que el valor del ángulo β que se muestra en la figura (b) se ha calculado con trigonometría.



(b)

Es evidente que B y C son los puntos de importancia cinemática sobre la barra BC: la aceleración de B puede calcularse a partir del movimiento establecido para la barra AB y de que se conoce la trayectoria del punto C. Por tanto, es posible resolver el problema al relacionar las aceleraciones de los puntos B y C.

Se supone que la aceleración de C se dirige hacia la derecha y que la aceleración angular de BC va en sentido positivo. Se ha dicho que esta última es cero.

Solución I (uso de la notación escalar)

La aceleración de C está relacionada con la de B por medio de

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{C/B} \qquad \text{(a)}$$

a_C
5 pulg
$5(3)^2 = 45$ pulg/s^2
A
B
30°
$\omega_{AB} = 3$ rad/s
$\omega_{BC} = 2.785$ rad/s
α_{BC}
8 pulg
54.34°
C
$8\alpha_{BC}$
$8(2.785)^2 = 62.05$ pulg/s^2

La observación de la ecuación (a) revela que tiene dos incógnitas: a_C y α_{BC}. Al igualar las componentes horizontal y vertical, se obtienen las dos ecuaciones escalares siguientes.

$$\xrightarrow{+} \quad a_C = -45\cos 30° + 8\alpha_{BC}\,\text{sen}\,54.34° - 62.05\cos 54.34° \qquad \text{(b)}$$

$$+\!\uparrow \quad 0 = -45\,\text{sen}\,30° + 8\alpha_{BC}\cos 54.34° + 62.05\,\text{sen}\,54.34° \qquad \text{(c)}$$

Para las cuales la solución es $a_C = -114.0$ pulg/s^2 y $a_{BC} = -5.99$ rad/s^2. Por tanto,

$$\mathbf{a}_C = 114.0 \text{ pulg/s}^2 \leftarrow \qquad \boldsymbol{\alpha}_{BC} = 5.99 \text{ rad/s}^2 \circlearrowright \qquad \textit{Respuesta}$$

Observe que si ω_{BC} no se ha determinado previamente, las ecuaciones (b) y (c) la tendrían como una tercera incógnita que impediría resolver las ecuaciones.

*Véase la solución del problema de ejemplo 16.5 (método de la velocidad relativa) o la del 16.7 (centros instantáneos).

Solución II (uso de la notación vectorial)

Los vectores de posición relativos que se muestran en la figura (b) son

$$\mathbf{r}_{B/A} = 5\cos 30°\mathbf{i} + 5\,\text{sen}\,30°\mathbf{j}$$
$$= 4.330\mathbf{i} + 2.500\mathbf{j}\ \text{pulg} \tag{d}$$

y

$$\mathbf{r}_{C/B} = 8\cos 54.34°\mathbf{i} - 8\,\text{sen}\,54.34°\mathbf{j}$$
$$= 4.664\mathbf{i} - 6.500\mathbf{j}\ \text{pulg} \tag{e}$$

La ecuación de la aceleración que resuelve el problema es

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{C/B} \tag{f}$$

Ya que la dirección de $\mathbf{a}_C$ es horizontal, se tiene

$$\mathbf{a}_C = a_C\mathbf{i} \tag{g}$$

La aceleración de B en la ecuación (f) puede determinarse observando que B se mueve sobre una trayectoria circular centrada en A. Por tanto,

$$\mathbf{a}_B = \boldsymbol{\alpha}_{AB} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\omega}_{AB} \times (\boldsymbol{\omega}_{AB} \times \mathbf{r}_{B/A})$$

Al sustituir $\boldsymbol{\alpha}_{AB} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\omega}_{AB} = -3\mathbf{k}$ rad/s y $\mathbf{r}_{B/A}$ de la ecuación (d), se obtiene

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{0} + (-3\mathbf{k}) \times [(-3\mathbf{k}) \times (4.330\mathbf{i} + 2.500\mathbf{j})]$$
$$= (-3\mathbf{k}) \times (-12.99\mathbf{j} + 7.500\mathbf{i})$$
$$= -38.97\mathbf{i} - 22.50\mathbf{j}\ \text{pulg/s}^2 \tag{h}$$

De acuerdo con la ecuación (16.15), la aceleración de C relativa a B es

$$\mathbf{a}_{C/B} = \boldsymbol{\alpha}_{BC} \times \mathbf{r}_{C/B} + \boldsymbol{\omega}_{BC} \times (\boldsymbol{\omega}_{BC} \times \mathbf{r}_{C/B})$$

Si se sustituye $\boldsymbol{\alpha}_{BC} = \alpha_{BC}\mathbf{k}$, $\omega_{BC} = 2.785\mathbf{k}$ rad/s y $\mathbf{r}_{C/B}$ de la ecuación (e) se deduce que:

$$\mathbf{a}_{C/B} = (\alpha_{BC}\mathbf{k}) \times (4.664\mathbf{i} - 6.500\mathbf{j})$$
$$+ (2.785\mathbf{k}) \times [(2.785\mathbf{k}) \times (4.664\mathbf{i} - 6.500\mathbf{j})]$$
$$= 4.664\alpha_{BC}\mathbf{j} + 6.500\alpha_{BC}\mathbf{i}$$
$$+ (2.785\mathbf{k}) \times (12.99\mathbf{j} + 18.10\mathbf{i})$$
$$= 4.664\alpha_{BC}\mathbf{j} + 6.500\alpha_{BC}\mathbf{i} - 36.18\mathbf{i} + 50.41\mathbf{j}\ \text{pulg/s}^2 \tag{i}$$

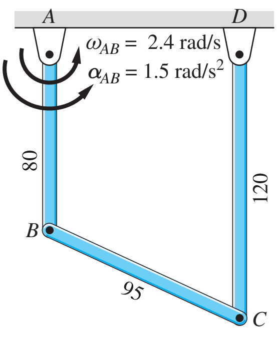
Cuando se sustituyen las ecuaciones (g), (h), e (i) en la ecuación (f), y se igualan los coeficientes de **i** y **j**, resultan las dos ecuaciones escalares siguientes.

$$a_C = -38.97 + 6.500\alpha_{BC} - 36.18 \tag{j}$$
$$0 = -22.50 + 4.664\alpha_{BC} + 50.41 \tag{k}$$

Si se resuelven de manera simultánea las ecuaciones (j) y (k), esto da $a_C = -114.0$ pulg/s^2 y $\alpha_{BC} = -5.99$ rad/s^2. Por tanto,

$$\mathbf{a}_C = -114.0\mathbf{i} \text{ pulg/s}^2 \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\alpha}_{BC} = -5.99\mathbf{k} \text{ rad/s}^2$$ *Respuesta*

Problema de ejemplo **16.12**



Dimensiones en mm

(a)

Cuando la conexión articulada en la figura (a) está en la posición que se muestra, la barra *AB* rota con velocidad angular $\omega_{AB} = 2.4$ rad/s y aceleración angular $\alpha_{AB} = 1.5$ rad/s^2, ambas en sentido positivo. Determine las aceleraciones angulares de las barras *BC* y *CD* para esta posición.

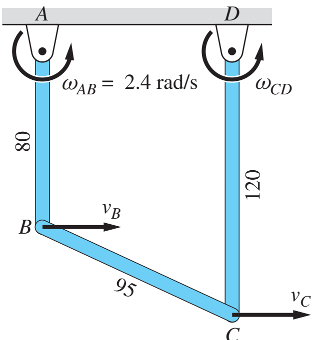
Solución

Cálculos preliminares

Este problema se resolverá al emplear la notación escalar (Solución I) y la vectorial (Solución II).

La observación de la conexión articulada de la figura (a) revela que *A*, *B*, *C* y *D* son los puntos de importancia cinemática: *A* y *D* son fijos, y se sabe que las trayectorias de *B* y *C* (que son puntos sobre la misma barra rígida *BC*) son los círculos centrados en *A* y *D*, respectivamente. La figura (c) muestra los vectores de posición relativos entre los puntos de importancia cinemática. Se encontró que el ángulo entre *BC* y la horizontal es $\theta = \text{sen}^{-1}(40/95) = 24.90°$.

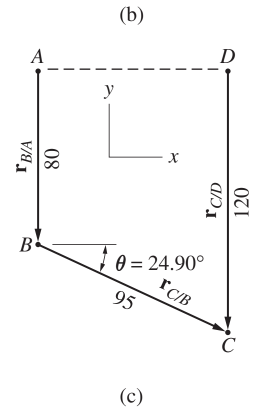
Antes de establecer las aceleraciones angulares, es preciso conocer las velocidades angulares de las barras *BC* y *CD*. Esas velocidades pueden determinarse ya sea con el método de la velocidad relativa o con el de los centros instantáneos para las velocidades, este último es más conveniente para este problema.



(b)

En la figura (b) se indica que debido a que $\mathbf{v}_B$ y $\mathbf{v}_C$ son horizontales, el centro instantáneo para la barra *BC* está en el infinito. Por tanto, en ese instante *BC* se traslada; es decir, $\omega_{BC} = 0$.

La magnitud de $\mathbf{v}_B$ es $v_B = r_{B/A}\omega_{AB} = 80(2.4) = 192.0$ mm/s, el sentido es hacia la derecha porque ω_{AB} tiene sentido positivo. Ya que la barra *BC* se traslada, resulta que $v_C = v_B = 192.0$ mm/s (todos los puntos de un cuerpo en traslación tienen la misma velocidad), también es hacia la derecha. Por tanto, $\omega_{CD} = v_C/r_{C/D} = 192.0/120 = 1.6$ rad/s en sentido positivo, como se muestra en la figura (b). Al resumir tales resultados en notación vectorial se tiene



(c)

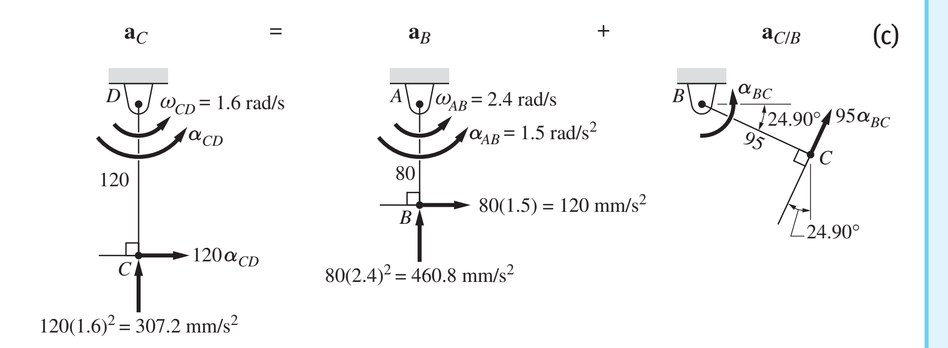
$$\boldsymbol{\omega}_{AB} = 2.4\mathbf{k} \text{ rad/s} \qquad \boldsymbol{\omega}_{BC} = \mathbf{0} \qquad \boldsymbol{\omega}_{CD} = 1.6\mathbf{k} \text{ rad/s} \tag{a}$$

Suponiendo que α_{BC} y α_{CD} tienen sentido positivo, las aceleraciones angulares de las barras son

$$\boldsymbol{\alpha}_{AB} = 1.5\mathbf{k} \text{ rad/s}^2 \qquad \boldsymbol{\alpha}_{BC} = \alpha_{BC}\mathbf{k} \text{ rad/s}^2 \qquad \boldsymbol{\alpha}_{CD} = \alpha_{CD}\mathbf{k} \text{ rad/s}^2 \tag{b}$$

Solución I (uso de la notación escalar)

Las aceleraciones de los puntos B y C se relacionan por medio de $\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{C/B}$. La expresión para la aceleración relativa $\mathbf{a}_{C/B}$ se obtiene imaginando que el punto B es fijo en el instante de interés. Las aceleraciones $\mathbf{a}_B$ y $\mathbf{a}_C$ se deducen de la rotación de las barras AB y CD respecto a los puntos fijos A y D, respectivamente. Por tanto, la relación entre las aceleraciones queda



La observación de esta ecuación revela que hay dos incógnitas: α_{BC} y α_{CD}, que pueden encontrarse al igualar las componentes horizontal y vertical de la ecuación (c):

$$\overset{+}{\longrightarrow} \quad 120\alpha_{CD} = 120 + 95\alpha_{BC} \operatorname{sen} 24.90° \qquad \text{(d)}$$

$$+\uparrow \quad 307.2 = 460.8 + 95\alpha_{BC} \cos 24.90° \qquad \text{(e)}$$

Al resolver las ecuaciones (d) y (e) se obtiene $\alpha_{BC} = -1.783$ rad/s^2 y $\alpha_{CD} = 0.406$ rad/s^2; es decir,

$$\boldsymbol{\alpha}_{BC} = 1.783 \text{ rad/s}^2 \circlearrowright \qquad \boldsymbol{\alpha}_{CD} = 0.406 \text{ rad/s}^2 \circlearrowleft \qquad \textit{Respuesta}$$

Solución II (uso de la notación vectorial)

Los vectores de posición relativos que se muestran en la figura (c) pueden escribirse en forma vectorial:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{r}_{B/A} &= -80\mathbf{j} \text{ mm} \\ \mathbf{r}_{C/B} &= 95 \cos 24.90°\mathbf{i} - 95 \operatorname{sen} 24.90°\mathbf{j} \\ &= 86.17\mathbf{i} - 40.00\mathbf{j} \text{ mm} \\ \mathbf{r}_{C/D} &= -120\mathbf{j} \text{ mm} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(f)}$$

La relación entre las aceleraciones de B y C es

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{C/B} \tag{g}$$

Debido a que la trayectoria de C es un círculo centrado en D, entonces

$$\mathbf{a}_C = \boldsymbol{\alpha}_{CD} \times \mathbf{r}_{C/D} + \boldsymbol{\omega}_{CD} \times (\boldsymbol{\omega}_{CD} \times \mathbf{r}_{C/D}) \tag{h}$$

Al sustituir los vectores en las ecuaciones (a), (b) y (f), el resultado es

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_C &= (\alpha_{CD}\mathbf{k}) \times (-120\mathbf{j}) + (1.6\mathbf{k}) \times [(1.6\mathbf{k}) \times (-120\mathbf{j})]\\ &= 120\alpha_{CD}\mathbf{i} + (1.6\mathbf{k}) \times (192.0\mathbf{i})\\ &= 120\alpha_{CD}\mathbf{i} + 307.2\mathbf{j}\ \text{mm/s}^2 \end{aligned} \tag{i}$$

Cuando se observa que B se mueve sobre una trayectoria circular centrada en A, se concluye que

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_B &= \boldsymbol{\alpha}_{AB} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\omega}_{AB} \times (\boldsymbol{\omega}_{AB} \times \mathbf{r}_{B/A})\\ &= (1.5\mathbf{k}) \times (-80\mathbf{j}) + (2.4\mathbf{k}) \times [(2.4\mathbf{k}) \times (-80\mathbf{j})]\\ &= 120\mathbf{i} + (2.4\mathbf{k}) \times (192.0\mathbf{i})\\ &= 120\mathbf{i} + 460.8\mathbf{j}\ \text{mm/s}^2 \end{aligned} \tag{j}$$

De las ecuaciones (16.13) se obtiene

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_{C/B} &= \boldsymbol{\alpha}_{BC} \times \mathbf{r}_{C/B} + \boldsymbol{\omega}_{BC} \times (\boldsymbol{\omega}_{BC} \times \mathbf{r}_{C/B})\\ &= (\alpha_{BC}\mathbf{k}) \times (86.17\mathbf{i} - 40.00\mathbf{j}) + \mathbf{0}\\ &= 86.17\alpha_{BC}\mathbf{j} + 40.00\alpha_{BC}\mathbf{i}\ \text{mm/s}^2 \end{aligned} \tag{k}$$

Al sustituir las ecuaciones de la (i) a la (k) en la ecuación (g), e igualar los coeficientes de **i** y **j**, resultan las siguientes dos ecuaciones escalares:

$$120\alpha_{CD} = 120 + 40.00\alpha_{BC} \tag{l}$$

$$307.2 = 460.8 + 86.17\alpha_{BC} \tag{m}$$

Al resolver las ecuaciones (1) y (m) resulta $\alpha_{BC} = -1.783$ rad/s^2 y $\alpha_{CD} = 0.406$ rad/s^2, o

$$\boldsymbol{\alpha}_{BC} = -1.783\mathbf{k}\ \text{rad/s}^2 \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\alpha}_{CD} = 0.406\mathbf{k}\ \text{rad/s}^2 \qquad \textit{Respuesta}$$

Problemas

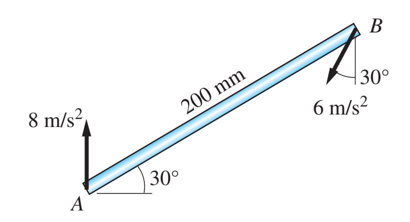


Fig. P16.61

16.61 En un instante dado, los extremos de la barra *AB* tienen las aceleraciones que se muestran. Determine la velocidad y aceleración angulares de la barra en este instante.

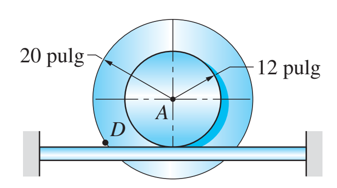


Fig. P16.62

16.62 Una rueda gira sin deslizarse sobre su cubo interior de 12 pulg. La velocidad angular de la rueda es de 3 rad/s. Obtenga la aceleración del punto *D* sobre el borde de la rueda si la aceleración angular de ésta es: (a) 6.75 rad/s², en sentido negativo y (b) 6.75 rad/s², en sentido positivo.

16.63 Una cuerda está enrollada alrededor del cubo de un carrete. Un jalón en el extremo de la cuerda hace que el carrete ruede sin deslizarse sobre el plano horizontal. En cierto instante, la velocidad y aceleración angulares del carrete son como se muestra en la figura. Para este instante, encuentre: (a) la aceleración del punto *D* sobre el carrete; (b) la aceleración de *B* y (c) la aceleración a_0 del extremo de la cuerda.

16.64 Una cuerda está enrollada alrededor del cubo de un carrete. Un jalón en el extremo de la cuerda hace que el carrete ruede y se deslice sobre el plano horizontal. En cierto instante, la velocidad y aceleración angulares del carrete son como se indica en la figura, mientras que la velocidad y aceleración del extremo de la cuerda son v_0 = 10 pulg/s y a_0 = 20 pulg/s², respectivamente. Para este instante obtenga la aceleración de: (a) el punto *D* sobre el carrete; (b) el punto *A* y (c) el punto *B*.

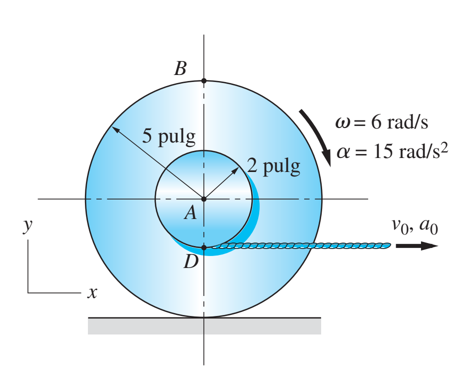


Fig. P16.63, P16.64

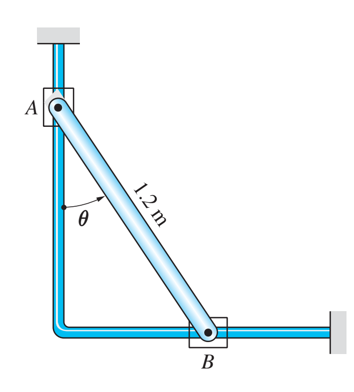


Fig. P16.65

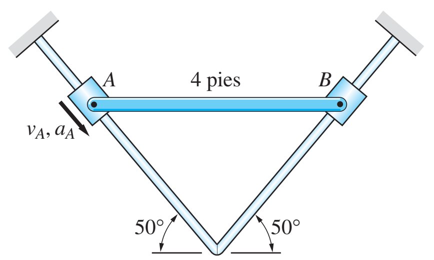


Fig. P16.66

16.65 Cuando θ = 30º, la velocidad angular de la barra es de 2 rad/s en sentido positivo y la aceleración del deslizador *B* es de 8 m/s², dirigida hacia la derecha. Calcule la aceleración del deslizador *A* en este instante.

16.66 Cuando la varilla *AB* está en la posición horizontal que se muestra, la velocidad y aceleración del collar son v_A = 5 pies/s y a_A = 14 pies/s², dirigidas como se indica. Obtenga la aceleración del collar *B* y la aceleración angular de la varilla en esta posición.

16.67 La manivela AB rota con velocidad angular constante de 20 rad/s en sentido negativo. Determine la aceleración del pistón C cuando $\theta = 90°$.

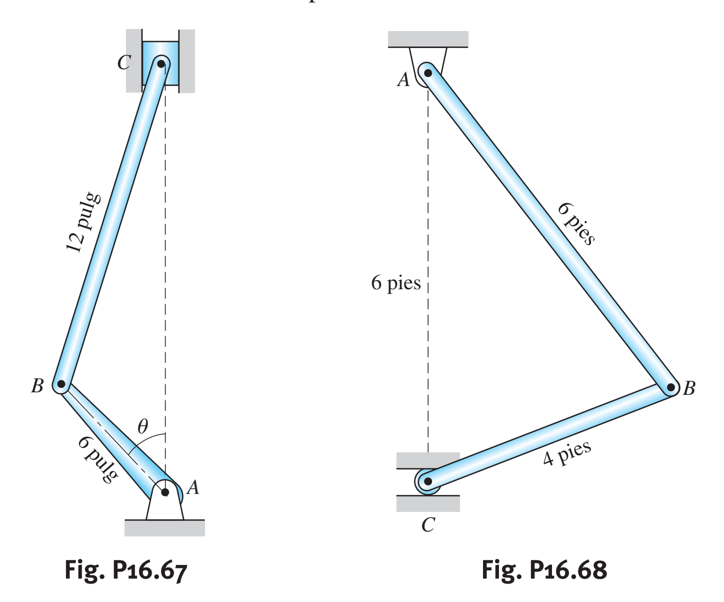


Fig. P16.67 **Fig. P16.68**

16.68 En la posición que se muestra, la velocidad y aceleración angulares de la barra AB son $\omega_{AB} = 3$ rad/s (en sentido negativo) y $\alpha_{AB} = 12$ rad/s^2 (en sentido positivo). Calcule la aceleración del rodillo C en esta posición.

16.69 Cuando el mecanismo está en la posición que se indica, la barra AB rota con la velocidad angular ω y la aceleración angular α, ambas en sentido positivo. Determine la aceleración angular de la barra BC y la aceleración del rodillo C en esta posición.

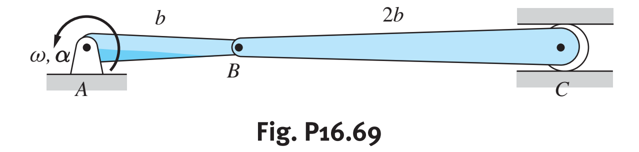


Fig. P16.69

16.70 La varilla AB del mecanismo se desliza hacia la derecha con velocidad constante de 4 m/s. Encuentre la aceleración del rodillo C en la posición que se muestra.

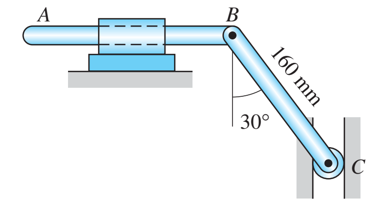
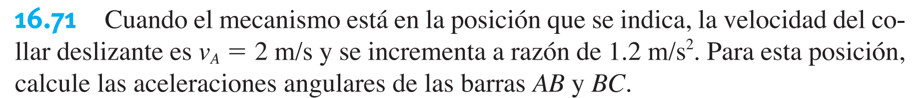


Fig. P16.70



16.71 Cuando el mecanismo está en la posición que se indica, la velocidad del collar deslizante es $v_A = 2$ m/s y se incrementa a razón de 1.2 m/s^2. Para esta posición, calcule las aceleraciones angulares de las barras AB y BC.

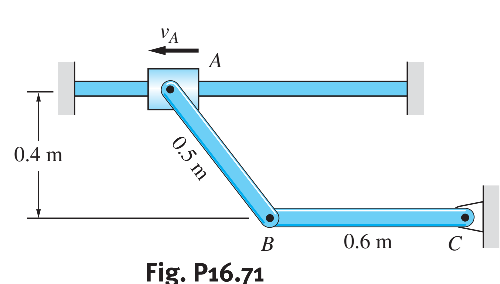


Fig. P16.71

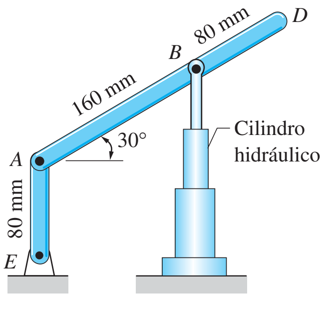


Fig. P16.72

16.72 Conforme se extiende el cilindro hidráulico, se eleva el perno *B* del mecanismo. Cuando el sistema está en la posición que se muestra, la velocidad del perno *B* es 40 mm/s hacia arriba, que se incrementa a razón de 80 mm/s^2. Para este instante, determine las aceleraciones angulares de las barras *AD* y *AE*.

16.73 La barra *AB* rota en sentido negativo con velocidad angular constante de 20 rad/s. Para la posición que se indica obtenga las aceleraciones angulares de las barras *BD* y *DE*.

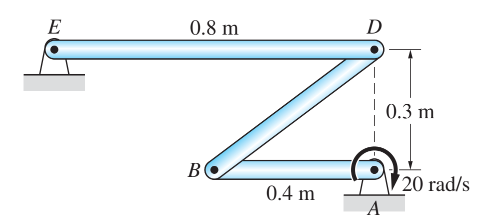


Fig. P16.73

16.74 La rueda gira sin deslizarse con velocidad angular constante de 0.8 rad/s en sentido negativo, mientras que el extremo *B* de la barra *AB* se desliza sobre el suelo. Calcule la aceleración de *B* en la posición que se muestra.

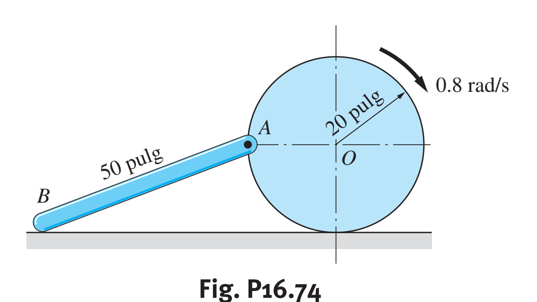


Fig. P16.74

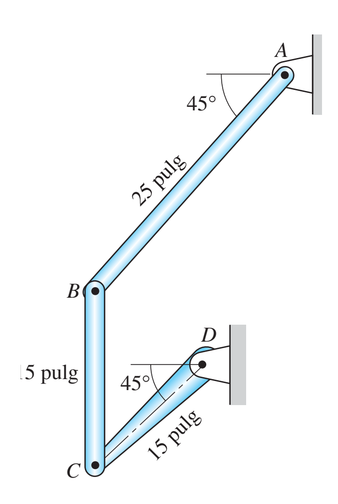


Fig. P16.76

16.75 La barra *BC* del mecanismo rota con velocidad angular constante de 24 rad/s en sentido negativo. Determine las aceleraciones angulares de las barras *AB* y *CD* en la posición que se indica.

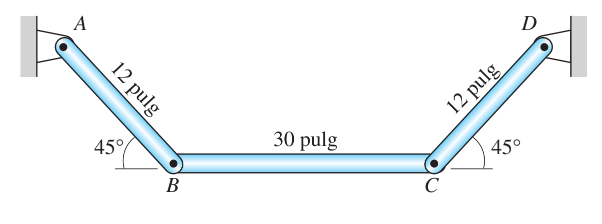


Fig. P16.75

16.76 En la posición que se muestra, la velocidad y la aceleración angulares de la barra *CD* son 6 rad/s y 20 rad/s^2, respectivamente, ambas en sentido positivo. Calcule las aceleraciones angulares de las barras *AB* y *BC* en esta posición.

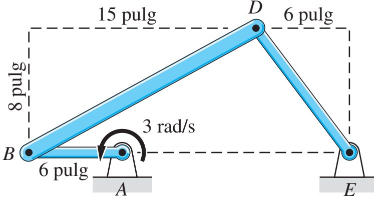


Fig. P16.77

16.77 La barra *AB* del mecanismo rota con velocidad angular constante de 3 rad/s en sentido positivo. Para la posición que se muestra, obtenga las aceleraciones angulares de las barras *BD* y *DE*.

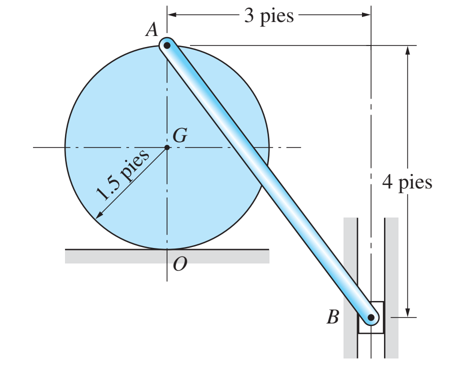


Fig. P16.78

16.78 La rueda gira sin deslizarse sobre la superficie horizontal. En la posición que se muestra, la velocidad angular de la rueda es 4 rad/s en sentido positivo y su aceleración angular es de 5 rad/s^2 en sentido negativo. Encuentre la aceleración angular de la varilla *AB* y la aceleración del deslizador *B* en esta posición.

16.79 El disco rota con velocidad angular constante de 2 rad/s en sentido positivo. Para la posición que se indica, obtenga las aceleraciones angulares de las barras *AB* y *BD*.

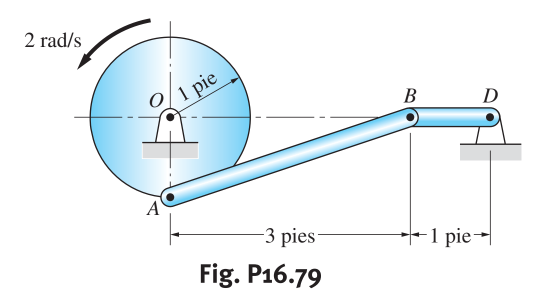


Fig. P16.79

16.80 El brazo que une las ruedas con fricción *A* y *B* rota con velocidad angular $\omega = 5$ rad/s y aceleración angular $\alpha = 12.5$ rad/s^2, ambas en sentido positivo. Suponga que la rueda *A* es estacionaria y que no existe deslizamiento, entonces determine la magnitud de la aceleración del punto del borde de *B* que está en contacto con *A*.

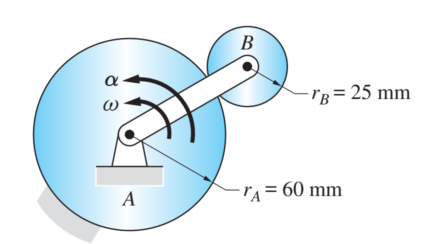


Fig. P16.80

16.81 Cuando el mecanismo está en la posición que se indica, la velocidad angular del engrane es 2 rad/s en sentido negativo y su aceleración angular es de 4 rad/s^2 en sentido positivo. Obtenga las aceleraciones angulares de las barras *AB* y *BD* en esta posición.

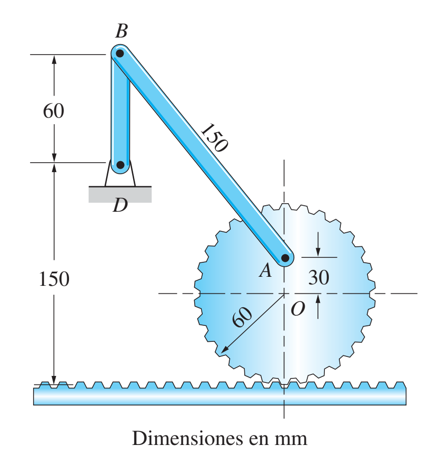


Fig. P16.81

16.82 La barra *AB* del mecanismo rota con velocidad angular constante de 1.2 rad/s en sentido negativo. Para la posición que se muestra: (a) compruebe que las velocidades angulares de las otras dos barras son $\omega_{BD} = 1.358$ rad/s en sentido positivo y $\omega_{DE} = 1.131$ rad/s en sentido negativo y (b) determine el vector de aceleración del punto *D*.

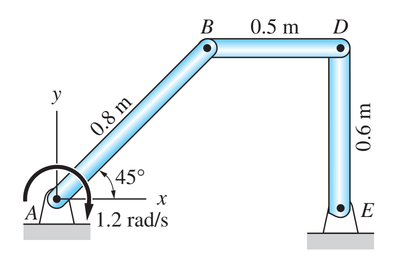


Fig. P16.82

16.8 Derivadas absolutas y relativas de vectores

a. Introducción

Hasta aquí, el análisis cinemático se ha apoyado en las fórmulas para el movimiento relativo entre puntos del *mismo cuerpo*. Al sistema de coordenadas que se ha utilizado se le permitió trasladarse pero no rotar. Sin embargo, existe una clase de problemas asociada con las conexiones deslizantes en las cuales el punto de interés no está en un cuerpo, pero se conoce su trayectoria *relativa a un cuerpo*. Para los problemas de este tipo es conveniente describir el movimiento del punto respecto a un marco de referencia que esté integrado al cuerpo. Dicho sistema de coordenadas puede rotar y trasladarse.

En el siguiente ejemplo puede verse la utilidad de un sistema de coordenadas que rota. En la figura 16.13, considere el movimiento del collar B deslizándose sobre la barra OA en rotación. Se presentan dos sistemas de coordenadas: los ejes fijos xy (con vectores base $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$) y los ejes $x'y'$ giratorios (con vectores base $\mathbf{i}'$ y $\mathbf{j}'$), que están integrados en la barra. La trayectoria *absoluta* de B (que se mide respecto a los ejes xy) será, en general, muy complicada. Sin embargo, la trayectoria relativa de B, es decir, la trayectoria en el sistema de coordenadas $x'y'$, es conocida: es una línea recta sobre el eje x'. Sean $v_{B/OA}$ y $a_{B/OA}$ la rapidez y magnitud de la aceleración de B respecto a la barra, los vectores velocidad y aceleración relativos correspondientes son simplemente $\mathbf{v}_{B/OA} = v_{B/OA}\mathbf{i}'$ y $\mathbf{a}_{B/OA} = a_{B/OA}\mathbf{i}'$.

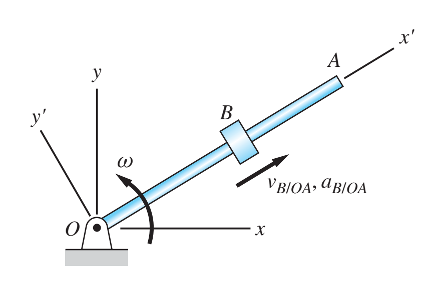


Fig. 16.13

Este ejemplo muestra que en algunos casos la descripción del movimiento se simplifica mucho cuando se usa un sistema de coordenadas en rotación. En el apartado 16.9 se mostró cómo determinar el movimiento absoluto de un punto si su movimiento relativo se da en un sistema de coordenadas en rotación. Este apartado está dedicado a la deducción de las fórmulas necesarias para este cálculo.

b. Derivadas temporales relativas y absolutas de vectores

Considere el cuerpo rígido $\mathcal{B}$ que se mueve en el plano xy, como se muestra en la figura 16.14. La figura muestra dos marcos de referencia:

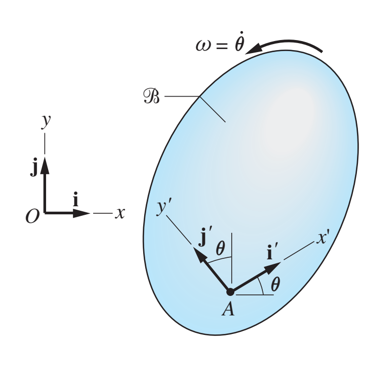


Fig. 16.14



- El marco de referencia xyz es fijo, los vectores unitarios sobre los ejes se denotan con $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$. Un vector $\mathbf{V}$ puede expresarse en términos de los ejes fijos como

$$\mathbf{V} = V_x\mathbf{i} + V_y\mathbf{j} + V_z\mathbf{k} \tag{16.16}$$

- La derivada respecto al tiempo de este vector, también conocida como *derivada absoluta*, es

$$\dot{\mathbf{V}} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \dot{V}_x\mathbf{i} + \dot{V}_y\mathbf{j} + \dot{V}_z\mathbf{k} \tag{16.17}$$

- Los ejes $x'y'z'$ están integrados al cuerpo, con vectores unitarios $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$ y $\mathbf{k}' = \mathbf{k}$. La expresión para $\mathbf{V}$ en términos de las coordenadas integradas es

$$\mathbf{V} = V_{x'}\mathbf{i}' + V_{y'}\mathbf{j}' + V_{z'}\mathbf{k}' \tag{16.18}$$

La *derivada relativa* (relativa al cuerpo $\mathcal{B}$) de $\mathbf{V}$ se define como:

$$\left(\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right)_{/\mathcal{B}} = \dot{V}_{x'}\mathbf{i}' + \dot{V}_{y'}\mathbf{j}' + \dot{V}_{z'}\mathbf{k}' \tag{16.19}$$

La ecuación (16.19) representa la razón de cambio de **V** respecto al marco de referencia $x'y'z'$; es decir, la razón de cambio de **V** vista por un observador unido al cuerpo $\mathcal{B}$. La derivada absoluta del vector en la ecuación (16.18) es

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{V}}{dt} &= \dot{V}_{x'}\mathbf{i}' + \dot{V}_{y'}\mathbf{j}' + \dot{V}_{z'}\mathbf{k}' + V_{x'}\frac{d\mathbf{i}'}{dt} + V_{y'}\frac{d\mathbf{j}'}{dt} + V_{z'}\frac{d\mathbf{k}'}{dt} \\ &= \left(\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right)_{/\mathcal{B}} + V_{x'}\frac{d\mathbf{i}'}{dt} + V_{y'}\frac{d\mathbf{j}'}{dt} + V_{z'}\frac{d\mathbf{k}'}{dt}\end{aligned} \tag{16.20}$$

Como los ejes $x'y'z'$ rotan con el cuerpo, en general las derivadas temporales de los vectores base $\mathbf{i}'$ y $\mathbf{j}'$ no valdrán cero (la traslación de $\mathcal{B}$ no afecta a las derivadas). Sin embargo, para el movimiento en un plano $d\mathbf{k}'/dt = \mathbf{0}$.

c. *Derivadas de vectores unitarios anclados*

Ahora deducimos las expresiones para las derivadas absolutas de $\mathbf{i}'$ y $\mathbf{j}'$. Al observar la figura 16.14, pueden escribirse

$$\mathbf{i}' = \cos\theta\ \mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\ \mathbf{j} \qquad \mathbf{j}' = -\operatorname{sen}\theta\ \mathbf{i} + \cos\theta\ \mathbf{j}$$

Por tanto, las derivadas absolutas de los vectores unitarios anclados son:

$$\frac{d\mathbf{i}'}{dt} = (-\operatorname{sen}\theta\ \mathbf{i} + \cos\theta\ \mathbf{j})\dot{\theta} = \omega\mathbf{j}' \qquad \frac{d\mathbf{j}'}{dt} = (-\cos\theta\ \mathbf{i} - \operatorname{sen}\theta\ \mathbf{j})\dot{\theta} = -\omega\mathbf{i}' \tag{16.21}$$

donde $\omega = \dot{\theta}$ es la velocidad angular de $\mathcal{B}$. Al incluir el vector de velocidad angular $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k}$, las derivadas absolutas también pueden escribirse como

$$\frac{d\mathbf{i}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}' \qquad \frac{d\mathbf{j}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}' \qquad \frac{d\mathbf{k}'}{dt} = \mathbf{0} \tag{16.22}$$

d. *Relaciones entre derivadas absolutas y relativas*

Al sustituir las ecuaciones (16.22) en la (16.20) se obtiene

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right)_{/\mathcal{B}} + V_{x'}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}') + V_{y'}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}') \tag{16.23}$$

Es posible comprobar fácilmente que la última ecuación es equivalente a

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right)_{/\mathcal{B}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} \tag{16.24}$$

La ecuación (16.24) es conveniente para evaluar la derivada absoluta de un vector cuando se conoce su derivada relativa.

La expresión para la segunda derivada absoluta de **V** puede obtenerse al derivar la ecuación (16.24):

$$\frac{d^2\mathbf{V}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right)_{/\mathcal{B}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}\right]$$
$$= \left(\frac{d^2\mathbf{V}}{dt^2}\right)_{/\mathcal{B}} + \boldsymbol{\omega} \times \left(\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right)_{/\mathcal{B}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \left[\left(\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right)_{/\mathcal{B}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}\right]$$

Después de simplificar, se obtiene

$$\frac{d^2\mathbf{V}}{dt^2} = \left(\frac{d^2\mathbf{V}}{dt^2}\right)_{/\mathcal{B}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \left(\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right)_{/\mathcal{B}} \qquad (16.25)$$

e. Caso especial: vector anclado en un marco de referencia en rotación

Si el vector **V** está anclado en el cuerpo $\mathcal{B}$, sus componentes $V_{x'}$, $V_{y'}$ y $V_{z'}$ permanecen constantes, así que $(d\mathbf{V}/dt)_{\mathcal{B}} = \mathbf{0}$. En consecuencia, las ecuaciones (16.24) y (16.25) quedan

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} \qquad (16.26)$$

$$\frac{d^2\mathbf{V}}{dt^2} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}) \qquad (16.27)$$

f. Nota sobre el movimiento general

Hasta ahora se ha supuesto que el movimiento ocurre en un plano. Si no es así, es posible demostrar que*

$$\frac{d\mathbf{i}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}' \quad \frac{d\mathbf{j}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}' \quad \frac{d\mathbf{k}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}' \qquad (16.28)$$

Observe que las primeras dos ecuaciones son idénticas a las (16.22). En consecuencia, la derivada absoluta de **V** en la ecuación (16.20) se convierte en

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right)_{/\mathcal{B}} + V_{x'}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}') + V_{y'}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}') + V_{z'}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}')$$

que puede escribirse exactamente en la misma forma que la ecuación (16.24):

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right)_{/\mathcal{B}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}$$

Por tanto, se concluye que las ecuaciones de la (16.24) a la (16.27) no están restringidas al movimiento en un plano.

*Véase *Principles of Dynamics*, 2a. ed., Donald T. Greenwood, Prentice Hall, 1988, p. 33.

16.9 Movimiento relativo a un marco de referencia en rotación

Ahora se aplicarán las fórmulas que relacionan las derivadas absolutas y relativas de un vector arbitrario **V**, que se dedujeron en el apartado anterior, a los vectores de velocidad y aceleración de un punto. Como se muestra en la figura 16.15, sea $\mathcal{B}$ un cuerpo rígido que ejecuta movimiento en un plano *xy*, donde el sistema de coordenadas *xyz* es fijo. Los ejes $x'y'z'$ están anclados en el cuerpo y, por tanto, rotan con la velocidad angular $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k}$ del mismo. En el análisis se tratarán los siguientes tres puntos:

- *A* es el origen del sistema de coordenadas anclado $x'y'z'$.
- *P* es un punto o una partícula que se mueve independientemente de $\mathcal{B}$.
- P' (no se muestra) es un punto *anclado* en $\mathcal{B}$ que coincide con *P* en el instante que se muestra.

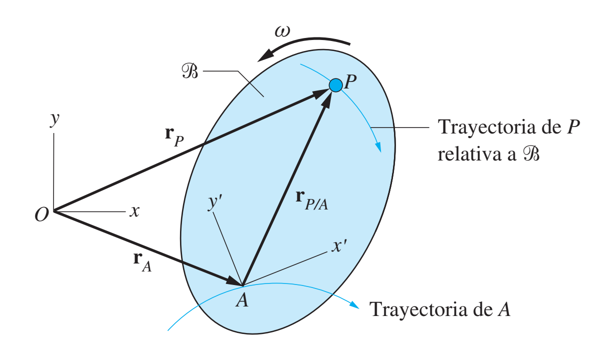


Fig. 16.15

De la figura 16.15, se tiene que $\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{P/A}$, que al derivarse respecto al tiempo queda

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{P/A} \tag{16.29}$$

donde

$$\mathbf{v}_{P/A} = \frac{d\mathbf{r}_{P/A}}{dt} \tag{16.30}$$

La velocidad en la ecuación (16.30) se mide respecto al sistema de coordenadas fijo *xyz*. Sin embargo, en muchas situaciones es más fácil describir la velocidad de *P* relativa al cuerpo $\mathcal{B}$ en movimiento. La relación entre esas dos velocidades puede encontrarse al reemplazar **V** por $\mathbf{r}_{P/A}$ en la ecuación (16.24) del apartado previo, que da

$$\frac{d\mathbf{r}_{P/A}}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{r}_{P/A}}{dt}\right)_{/\mathcal{B}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{P/A} \tag{16.31}$$

donde el subíndice "$/\mathcal{B}$" denota cantidades medidas respecto al cuerpo $\mathcal{B}$. Al incluir la notación

$$\mathbf{v}_{P/\mathcal{B}} = \left(\frac{d\mathbf{r}_{P/A}}{dt}\right)_{/\mathcal{B}} \tag{16.32}$$

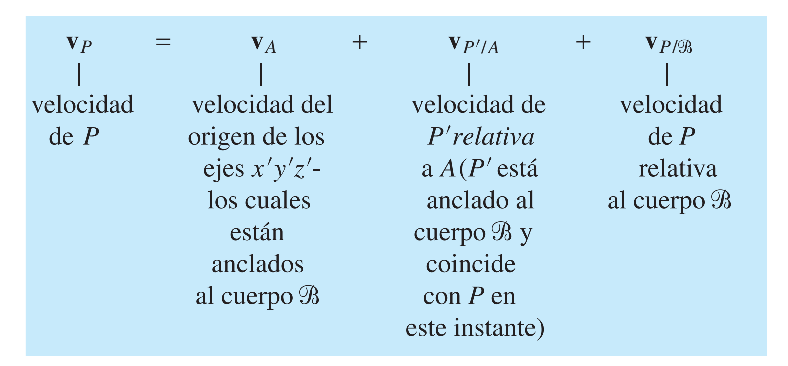
para la velocidad de P relativa a $\mathcal{B}$ y sustituir la ecuación (16.31) en la (16.29), se obtiene

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{P/A} + \mathbf{v}_{P/\mathcal{B}} \tag{16.33}$$

Como P' y A están anclados al cuerpo $\mathcal{B}$, la velocidad de P' relativa a A está dada por

$$\mathbf{v}_{P'/A} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{P/A} \tag{16.34}$$

Por tanto, la ecuación (16.33) puede escribirse en la forma



La figura 16.16 muestra los términos que aparecen en la ecuación (16.35) (se supone que la velocidad angular ω tiene sentido positivo). Observe que el movimiento se representa como una traslación y una rotación del cuerpo, más la velocidad de P relativa al mismo. La velocidad $\mathbf{v}_P$ es tangente a la trayectoria absoluta de P, mientras que $\mathbf{v}_{P/\mathcal{B}}$ es tangente a su trayectoria relativa. El término de rotación en la figura 16.16 se muestra como el producto cruz vectorial $\omega \times \mathbf{r}_{P/A}$, pero esto podría reemplazarse por la notación escalar de la figura 16.8(d).

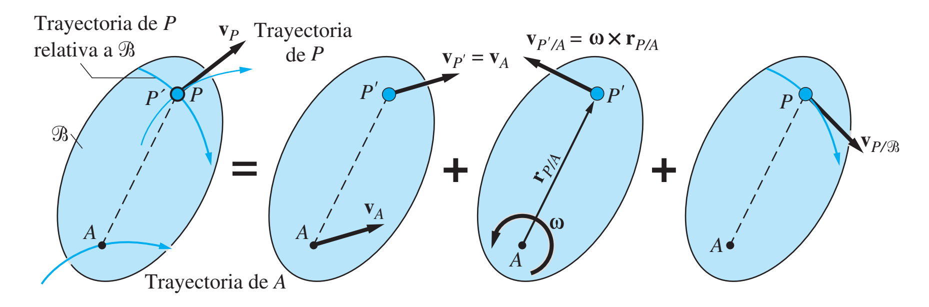


Fig. 16.16

La aceleración de P se encuentra al derivar la ecuación (16.29):

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{P/A} \tag{16.36}$$

donde la aceleración relativa es

$$\mathbf{a}_{P/A} = \frac{d\mathbf{v}_{P/A}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}_{P/A}}{dt^2} \tag{16.37}$$

Al sustituir $\mathbf{r}_{P/A}$ para $\mathbf{V}$ en la ecuación (16.25), se ve que la (16.37) puede escribirse como

$$\mathbf{a}_{P/A} = \left(\frac{d^2\mathbf{r}_{P/A}}{dt^2}\right)_{/\mathscr{B}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_{P/A} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{P/A}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{P/\mathscr{B}} \qquad (16.38)$$

El primer término de la ecuación (16.38) es la aceleración de P relativa al cuerpo $\mathscr{B}$:

$$\mathbf{a}_{P/\mathscr{B}} = \left(\frac{d^2\mathbf{r}_{P/A}}{dt^2}\right)_{/\mathscr{B}} \qquad (16.39)$$

Los siguientes dos términos en la ecuación (16.38) representan la aceleración de P' relativa a A, a saber

$$\mathbf{a}_{P'/A} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_{P/A} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{P/A}) \qquad (16.40)$$

El ultimo término en la ecuación (16.38) es la *aceleración de Coriolis* (en honor al matemático francés G. G. Coriolis), se denotará con

$$\mathbf{a}_C = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{P/\mathscr{B}} \qquad (16.41)$$

Observe que la aceleración de Coriolis representa una interacción entre la velocidad angular del cuerpo y la velocidad de P relativa al cuerpo.

Al sustituir las ecuaciones de la (16.38) a la (16.41) en la ecuación (16.36), la aceleración de P será:

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_A + \left[\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_{P/A} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{P/A})\right] + \mathbf{a}_{P/\mathscr{B}} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{P/\mathscr{B}} \qquad (16.42)$$

Esta ecuación tiene una forma con mayor significado físico:

$\mathbf{a}_P$	$=$	$\mathbf{a}_A$	$+$	$\mathbf{a}_{P'/A}$	$+$	$\mathbf{a}_{P/\mathscr{B}}$	$+$	$\mathbf{a}_C$
aceleración de P		aceleración del origen de los ejes $x'y'z'$ que están anclados al cuerpo $\mathscr{B}$		aceleración de P' relativa a A (P' está inmersa en el cuerpo $\mathscr{B}$ y coincide con P en este instante)		aceleración de P relativa al cuerpo $\mathscr{B}$		aceleración de Coriolis

(16.43)

La figura 16.17 muestra los términos que aparecen en la ecuación (16.42) (se supone que la velocidad angular ω y la aceleración angular $\dot{\omega}$ tienen sentido positivo). Observe que el movimiento se representa como una traslación y rotación del cuerpo más la aceleración relativa de P relativa al cuerpo más la aceleración de Coriolis. Los términos de rotación en la figura 16.17 se muestran usando sus representaciones vectoriales, $\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_{P/A}$ y $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{P/A})$; que pueden reemplazarse por las notaciones escalares que se representan en la figura 16.12(d). En la figura 16.17 se observa que la aceleración de Coriolis $\mathbf{a}_C$ es perpendicular tanto a $\mathbf{v}_{P/\mathcal{B}}$ como a ω. Cuando se utiliza la representación escalar, la magnitud de $\mathbf{a}_C$ es $2\omega v_{P/\mathcal{B}}$ y su dirección se determina al fijar la cola de $\mathbf{v}_{P/\mathcal{B}}$ y rotar 90º a este vector en la dirección de ω.

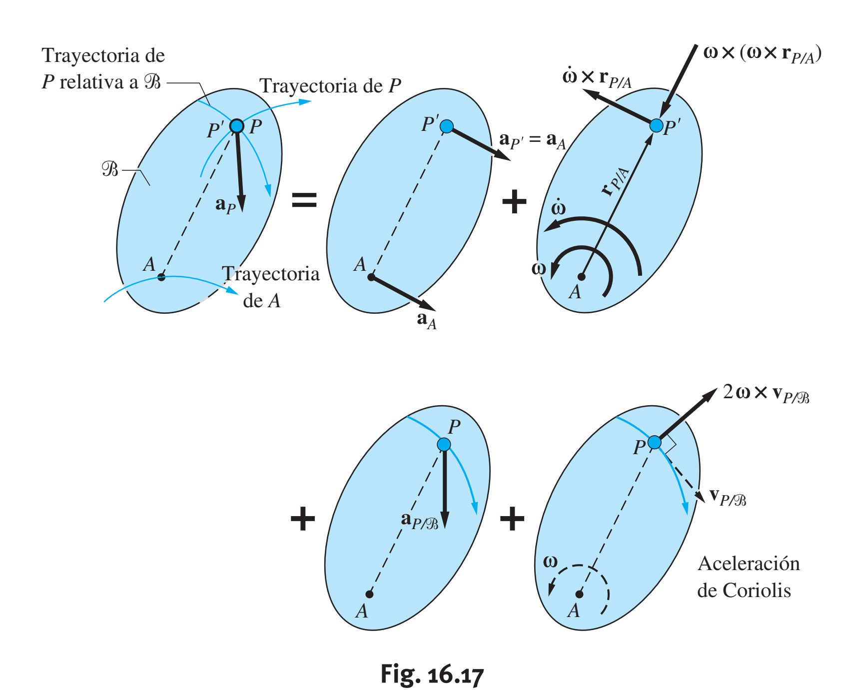
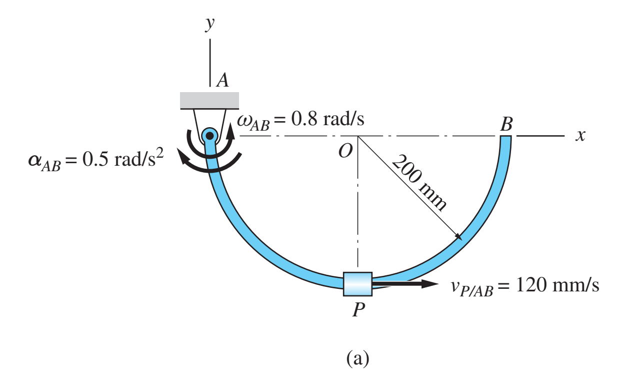


Fig. 16.17

Problema de ejemplo 16.13

Como se muestra en la figura(a), el collar P se desliza desde A hacia B sobre una varilla semicircular AB cuyo radio es de 200 mm. La varilla rota respecto al perno en A y la rapidez constante de P relativa a la varilla es de 120 mm/s. Cuando el sistema está en la posición que se muestra, la velocidad y la aceleración angulares de la varilla son $\omega_{AB} = 0.8$ rad/s en sentido positivo y $\alpha_{AB} = 0.5$ rad/s^2 en sentido negativo. Para esta posición, determine los vectores de velocidad y aceleración de P.



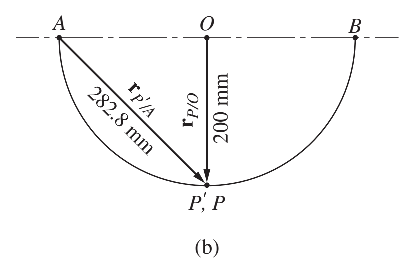
(a)

Solución

Comentarios preliminares

Este problema se resolverá con la notación escalar (Solución I) y con la notación vectorial (Solución II). En ambas se utiliza el punto P', que se identifica como el punto sobre AB que coincide con P en el instante de interés. En la figura (b) se presentan los vectores de posición relativos requeridos en las soluciones.

Observe que: 1. la trayectoria absoluta de P' es un círculo centrado en el punto fijo A, y 2. la trayectoria de P relativa a AB es un círculo centrado en el punto O.

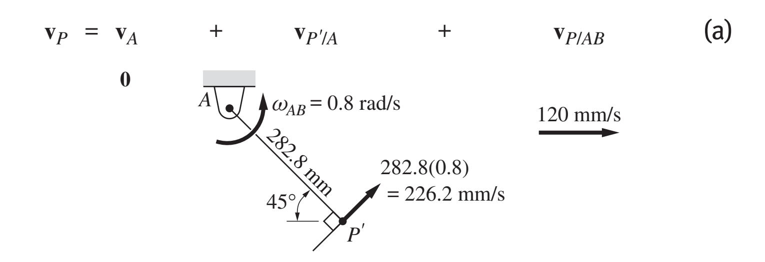


(b)

Solución I (uso de la notación escalar)

Al establecer en la ecuación (16.35) que el cuerpo $\mathscr{B}$ es la varilla AB, entonces la velocidad de P se convierte en

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{P'/A} + \mathbf{v}_{P/AB} \qquad \text{(a)}$$



de lo que se encuentra que

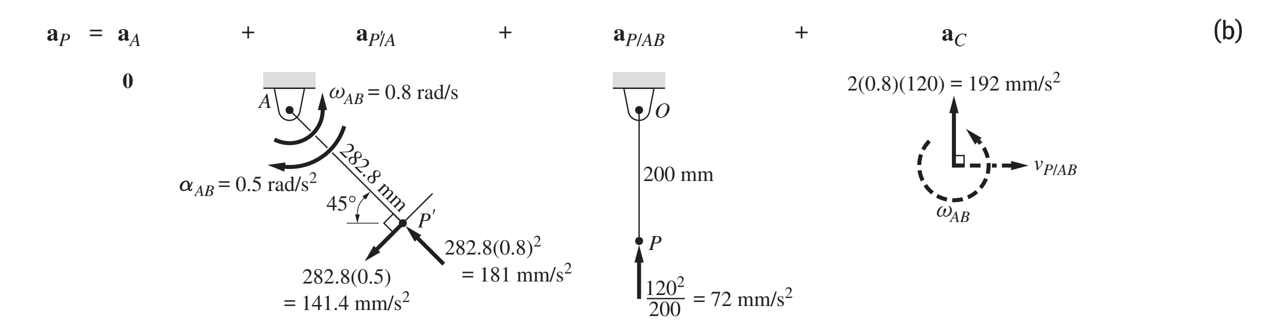
$$(v_P)_x = 226.2 \operatorname{sen} 45^\circ + 120 = 280 \text{ mm/s}$$

$$(v_P)_y = 226.2 \cos 45^\circ = 160 \text{ mm/s}$$

o

$\mathbf{v}_P$ = 160 / 322 mm/s / 280 *Respuesta*

Al utilizar la ecuación (16.43), la aceleración de P es



Observe que en la ecuación (b) la dirección de la aceleración de Coriolis $\mathbf{a}_C$ se encuentra al fijar la cola de $\mathbf{v}_{P/AB}$ y después rotar este vector 90° en la dirección de ω_{AB}. Aún más, observe que $\mathbf{a}_{P/AB}$ sólo contiene la componente normal de $v^2_{P/AB}/r_{P/O}$ porque la magnitud de $\mathbf{v}_{P/AB}$ es constante. Al evaluar las componentes de la ecuación (b) resulta

$$(a_P)_x = -181 \cos 45° - 141.4 \operatorname{sen} 45° = -228 \text{ mm/s}^2$$

$$(a_P)_y = 181 \operatorname{sen} 45° - 141.4 \cos 45° + 72 + 192 = 292 \text{ mm/s}^2$$

o

$\mathbf{a}_P$ = 370 mm/s² / 292 / 228 *Respuesta*

Solución II (uso de la notación vectorial)

De la ecuación (16.35), la velocidad de P es

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{P'/A} + \mathbf{v}_{P/AB} \tag{c}$$

Ya que A es un punto fijo, se tiene

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{0} \tag{d}$$

Al notar que P', siendo un punto anclado en la varilla AB, viaja sobre una trayectoria circular centrada en A, se obtiene

$$\mathbf{v}_{P'/A} = \boldsymbol{\omega}_{AB} \times \mathbf{r}_{P'/A} = (0.8\mathbf{k}) \times (200\mathbf{i} - 200\mathbf{j}) = 160\mathbf{j} + 160\mathbf{i} \text{ mm/s} \tag{e}$$

La velocidad de P relativa a la barra AB está dada igual a

$$\mathbf{v}_{P/AB} = 120\mathbf{i} \text{ mm/s} \tag{f}$$

Al sustituir las ecuaciones de la (d) a la (f) en la ecuación (c), la velocidad de P queda

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_P &= \mathbf{0} + (160\mathbf{j} + 160\mathbf{i}) + (120\mathbf{i})\\ &= 280\mathbf{i} + 160\mathbf{j} \text{ mm/s}\end{aligned}$$ *Respuesta*

La aceleración de P es, de acuerdo con la ecuación (16.42),

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{P'/A} + \mathbf{a}_{P/AB} + \mathbf{a}_C \tag{g}$$

Ya que A es un punto fijo, se tiene

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{0} \tag{h}$$

Si se observa que la trayectoria de P' es un círculo con centro en A, la aceleración de P' relativa a A (que también es la aceleración absoluta de P', considerando que A es un punto fijo) es

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_{P'/A} &= \boldsymbol{\alpha}_{AB} \times \mathbf{r}_{P'/A} + \boldsymbol{\omega}_{AB} \times (\boldsymbol{\omega}_{AB} \times \mathbf{r}_{P'/A})\\ &= (-0.5\mathbf{k}) \times (200\mathbf{i} - 200\mathbf{j}) + (0.8\mathbf{k}) \times (160\mathbf{i} + 160\mathbf{j})\\ &= (-100\mathbf{j} - 100\mathbf{i}) + (128\mathbf{j} - 128\mathbf{i})\\ &= -228\mathbf{i} + 28\mathbf{j} \text{ mm/s}^2\end{aligned} \tag{i}$$

La aceleración de P relativa a AB sólo tiene una componente normal porque $v_{P/AB}$ es constante. Como la componente normal de la aceleración relativa se dirige hacia el centro de la curvatura de la trayectoria relativa (es decir, hacia el punto O), se encuentra que

$$\mathbf{a}_{P/AB} = (\mathbf{a}_{P/AB})_n = \frac{v_{P/AB}^2}{r_{P/O}}\mathbf{j} = \frac{(120)^2}{200}\mathbf{j} = 72\mathbf{j} \text{ mm/s}^2 \tag{j}$$

La aceleración de Coriolis a partir de la ecuación (16.41) es

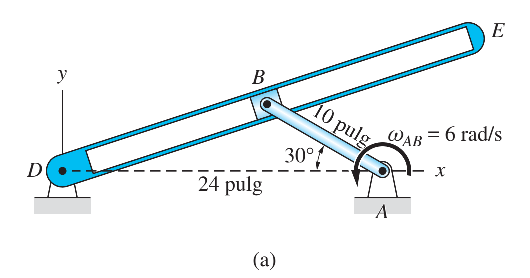
$$\mathbf{a}_C = 2\boldsymbol{\omega}_{AB} \times \mathbf{v}_{P/AB} = 2(0.8\mathbf{k}) \times (120\mathbf{i}) = 192\mathbf{j} \text{ mm/s}^2 \tag{k}$$

Al sustituir las ecuaciones de la (h) a la (k) en la ecuación (g), resulta

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_P &= 0 + (-228\mathbf{i} + 28\mathbf{j}) + 72\mathbf{j} + 192\mathbf{j}\\ &= -228\mathbf{i} + 292\mathbf{j} \text{ mm/s}^2\end{aligned}$$ *Respuesta*

Problema de ejemplo 16.14

En la figura(a), la manivela *AB* del mecanismo de retorno rápido rota con velocidad angular constante $\omega_{AB} = 6$ rad/s en sentido positivo. Cuando el mecanismo está en la posición que se muestra, calcule la velocidad y la aceleración del deslizador *B* relativas al brazo *DE*, y la velocidad angular y la aceleración de este último.



(a)

Solución

Comentarios introductorios

Observe que la trayectoria del deslizador *B* relativa al brazo *DE* es la ranura en este último. Ya que esta trayectoria relativa es una línea recta, $\mathbf{v}_{B/DE}$ y $\mathbf{a}_{B/DE}$ (la velocidad y la aceleración de *B* relativas al brazo *DE*) se dirigen a lo largo de la ranura.

Sea B' el punto sobre *DE* que coincide con *B* en el instante de interés. La velocidad y la aceleración de *B* a partir de las ecuaciones (16.35) y (16.43), respectivamente, son $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_D + \mathbf{v}_{B'/D} + \mathbf{v}_{B/DE}$ y $\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_D + \mathbf{a}_{B'/D} + \mathbf{a}_{B/DE} + \mathbf{a}_C$, donde $\mathbf{a}_C$ es la aceleración de Coriolis. Si se observa que *D* es un punto fijo ($\mathbf{v}_D = \mathbf{0}$ y $\mathbf{a}_D = \mathbf{0}$), las ecuaciones de velocidad y aceleración quedan

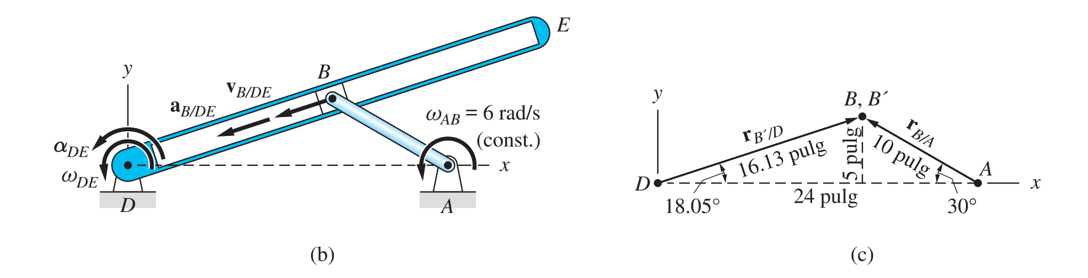
$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_{B'/D} + \mathbf{v}_{B/DE} \tag{a}$$

y

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_{B'/D} + \mathbf{a}_{B/DE} + \mathbf{a}_C \tag{b}$$

Esas ecuaciones se analizarán con la notación escalar (Solución I) y la vectorial (Solución II).

Durante el análisis es preciso considerar que las trayectorias de B y B' son círculos centrados en A y D, respectivamente. Suponga que ω_{DE} y α_{DE} van en sentido positivo y que $\mathbf{v}_{B/DE}$ y $\mathbf{a}_{B/DE}$ se dirigen hacia D, como se indica en la figura (b). La figura (c) muestra los vectores de posición relativos que se requieren para el análisis. La distancia $\overline{DB}$ y el ángulo entre DE y el eje x se determinaron por medio de la trigonometría.



(b)

(c)

Los siguientes vectores se incluyen en las ecuaciones (a) y (b):

$$\mathbf{r}_{B/A} = 10(-\cos 30°\mathbf{i} + \operatorname{sen} 30°\mathbf{j}) = -8.660\mathbf{i} + 5.00\mathbf{j} \text{ pulg} \quad \text{(c)}$$

$$\mathbf{r}_{B'/D} = 16.13(\cos 18.05°\mathbf{i} + \operatorname{sen} 18.05°\mathbf{j}) = 15.34\mathbf{i} + 5.00\mathbf{j} \text{ pulg} \quad \text{(d)}$$

$$\boldsymbol{\omega}_{AB} = 6\mathbf{k} \text{ rad/s} \qquad \boldsymbol{\alpha}_{AB} = \mathbf{0} \quad \text{(e)}$$

$$\boldsymbol{\omega}_{DE} = \omega_{DE}\mathbf{k} \text{ rad/s} \qquad \boldsymbol{\alpha}_{DE} = \alpha_{DE}\mathbf{k} \text{ rad/s}^2 \quad \text{(f)}$$

$$\mathbf{v}_{B/DE} = v_{B/DE} \;\; \swarrow 18.05°$$

$$= v_{B/DE}(-\cos 18.05°\mathbf{i} - \operatorname{sen} 18.05°\mathbf{j}) \text{ pulg/s} \quad \text{(g)}$$

$$\mathbf{a}_{B/DE} = a_{B/DE} \;\; \swarrow 18.05°$$

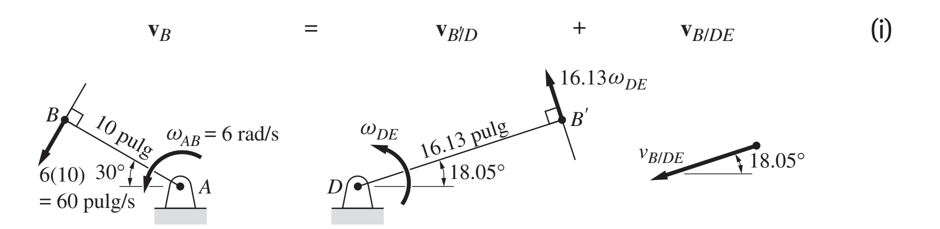
$$= a_{B/DE}(-\cos 18.05°\mathbf{i} - \operatorname{sen} 18.05°\mathbf{j}) \text{ pulg/s}^2 \quad \text{(h)}$$

Solución I (uso de la notación escalar)

Velocidad

La ecuación (a) es

$$\mathbf{v}_B \quad = \quad \mathbf{v}_{B'/D} \quad + \quad \mathbf{v}_{B/DE} \quad \text{(i)}$$



Una inspección de la ecuación (i) revela que hay dos incógnitas, ω_{DE} y $v_{B/DE}$, que pueden encontrarse resolviendo las dos ecuaciones escalares equivalentes.

Al igualar las componentes horizontal y vertical de ambos lados de la ecuación (i) resulta

$$\xrightarrow{+} \quad -60 \operatorname{sen} 30° = -16.13\omega_{DE} \operatorname{sen} 18.05° - v_{B/DE} \cos 18.05° \qquad \text{(j)}$$

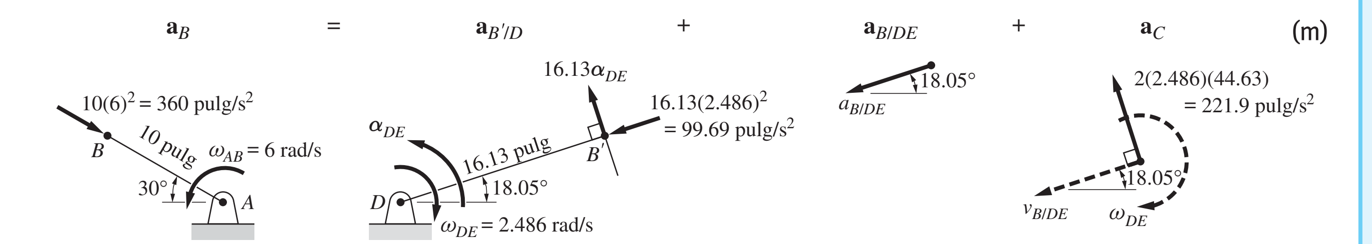
$$+\uparrow \quad -60 \cos 30° = 16.13\omega_{DE} \cos 18.05° - v_{B/DE} \operatorname{sen} 18.05° \qquad \text{(k)}$$

Al resolver las ecuaciones (j) y (k) resulta que $\omega_{DE} = -2.486$ rad/s y $v_{B/DE} =$ 44.63 pulg/s, de donde se encuentran los valores

$$\boldsymbol{\omega}_{DE} = 2.486 \text{ rad/s} \circlearrowleft \qquad \mathbf{v}_{B/DE} = 44.63 \text{ pulg/s} \;\; \swarrow 18.05° \qquad \textit{Respuesta} \qquad \text{(l)}$$

Aceleración

La ecuación (b) es



Observe que en la ecuación (m) la magnitud de la fuerza de Coriolis es $a_C = 2\omega_{DE}v_{B/DE}$ y su dirección se encuentra al fijar la cola de $\mathbf{v}_{B/DE}$ y rotar este vector 90º en la dirección de ω_{DE}. En la ecuación (m) las incógnitas son α_{DE} y $a_{B/DE}$, que pueden resolverse por medio de la igualación de las componentes horizontal y vertical

$$\xrightarrow{+} \quad 360 \cos 30° = -16.13\alpha_{DE} \operatorname{sen} 18.05° - 99.69 \cos 18.05° - a_{B/DE} \cos 18.05° - 221.9 \operatorname{sen} 18.05° \qquad \text{(n)}$$

$$+\uparrow \quad -360 \operatorname{sen} 30° = 16.13\alpha_{DE} \cos 18.05° - 99.69 \operatorname{sen} 18.05° - a_{B/DE} \operatorname{sen} 18.05° + 221.9 \cos 18.05° \qquad \text{(o)}$$

Al resolver las ecuaciones (n) y (o) de manera simultánea resulta $\alpha_{DE} = -30.35$ rad/s^2 y $a_{B/DE} = -340.3$ pulg/s^2. Por tanto, los resultados son

$$\boldsymbol{\alpha}_{DE} = 30.35 \text{ rad/s}^2 \circlearrowleft \quad \text{y} \quad \mathbf{a}_{B/DE} = 340 \text{ pulg/s}^2 \;\; \nearrow 18.05° \qquad \textit{Respuesta}$$

Solución II (uso de la notación vectorial)

Velocidad

Primero se calculan los tres términos que aparecen en la ecuación (a).

Ya que B es un punto sobre AB, se tiene

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_B &= \boldsymbol{\omega}_{AB} \times \mathbf{r}_{B/A}\\ &= (6\mathbf{k}) \times (-8.660\mathbf{i} + 5.00\mathbf{j})\\ &= -51.96\mathbf{j} - 30.00\mathbf{i} \text{ pulg/s}\end{aligned} \tag{p}$$

Utilizando el hecho de que B' es un punto sobre DE, se tiene

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{B'/D} &= \boldsymbol{\omega}_{DE} \times \mathbf{r}_{B'/D}\\ &= (\omega_{DE}\mathbf{k}) \times (15.34\mathbf{i} + 5.00\mathbf{j})\\ &= 15.34\omega_{DE}\mathbf{j} - 5.00\omega_{DE}\mathbf{i} \text{ pulg/s}\end{aligned} \tag{q}$$

El vector de la velocidad relativa $\mathbf{v}_{B/DE}$ se encontró en la ecuación (g):

$$\mathbf{v}_{B/DE} = v_{B/DE}(-\cos 18.05°\mathbf{i} - \text{sen } 18.05°\mathbf{j}) \text{ pulg/s} \tag{r}$$

Al sustituir las ecuaciones de la (p) a la (r) en la ecuación (a) e igualar los coeficientes de $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$, respectivamente, se tiene

$$-30.00 = -5.00\omega_{DE} - v_{B/DE} \cos 18.05° \tag{s}$$

$$-51.96 = 15.34\omega_{DE} - v_{B/DE} \text{ sen } 18.05° \tag{t}$$

Cuando se resuelven las ecuaciones (s) y (t) simultáneamente se obtiene que $\omega_{DE} = -2.486$ rad/s y $v_{B/DE} = 44.64$ pulg/s, de donde

$$\boldsymbol{\omega}_{DE} = -2.486\mathbf{k} \text{ rad/s}$$ *Respuesta*

y

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{B/DE} &= 44.64(-\cos 18.05°\mathbf{i} - \text{sen } 18.05°\mathbf{j})\\ &= -42.44\mathbf{i} - 13.83\mathbf{j} \text{ pulg/s}\end{aligned}$$ *Respuesta*

Aceleración

Ahora se calcularán los términos de la ecuación (b).

Ya que B es un punto sobre AB, la aceleración de B queda como

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_B &= \boldsymbol{\omega}_{AB} \times (\boldsymbol{\omega}_{AB} \times \mathbf{r}_{B/A})\\ &= (6\mathbf{k}) \times (-51.96\mathbf{j} - 30.00\mathbf{i})\\ &= 311.8\mathbf{i} - 180\mathbf{j} \text{ pulg/s}^2\end{aligned} \tag{u}$$

Ya que B' es un punto sobre el brazo DE, se obtiene

$$\mathbf{a}_{B'/D} = \boldsymbol{\alpha}_{DE} \times \mathbf{r}_{B'/D} + \boldsymbol{\omega}_{DE} \times (\boldsymbol{\omega}_{DE} \times \mathbf{r}_{B'/D})$$

$$= (\alpha_{DE}\mathbf{k}) \times (15.34\mathbf{i} + 5.00\mathbf{j})$$
$$+ (-2.486\mathbf{k}) \times [(-2.486\mathbf{k}) \times (15.34\mathbf{i} + 5.00\mathbf{j})]$$

$$= 15.34\alpha_{DE}\mathbf{j} - 5.00\alpha_{DE}\mathbf{i}$$
$$+ (-2.486\mathbf{k}) \times (-38.14\mathbf{j} + 12.43\mathbf{i})$$

$$= 15.34\alpha_{DE}\mathbf{j} - 5.00\alpha_{DE}\mathbf{i} - 94.82\mathbf{i} - 30.90\mathbf{j} \text{ pulg/s}^2 \quad \text{(v)}$$

El vector de aceleración de B relativo al brazo DE se dio en la ecuación (h) como:

$$\mathbf{a}_{B/DE} = a_{B/DE}(-\cos 18.05°\mathbf{i} - \text{sen } 18.05°\mathbf{j}) \text{ pulg/s}^2 \quad \text{(w)}$$

De la ecuación (16.41), la aceleración de Coriolis será

$$\mathbf{a}_C = 2\boldsymbol{\omega}_{DE} \times \mathbf{v}_{B/DE}$$

$$= 2(-2.486\mathbf{k}) \times (-42.44\mathbf{i} - 13.83\mathbf{j})$$

$$= 211.0\mathbf{j} - 68.76\mathbf{i} \text{ pulg/s}^2 \quad \text{(x)}$$

Al sustituir las ecuaciones de la (u) a la (x) en la ecuación (b) e igualar los coeficientes de **i** y **j**, respectivamente, resulta

$$311.8 = -5.00\alpha_{DE} - 94.82 - a_{B/DE} \cos 18.05° - 68.76 \quad \text{(y)}$$

$$-180 = 15.34\alpha_{DE} - 30.90 - a_{B/DE} \text{ sen } 18.05° + 211.0 \quad \text{(z)}$$

Cuando se resuelven las ecuaciones (y) y (z) simultáneamente se deduce que $\alpha_{DE} = -30.35 \text{ rad/s}^2$ y $a_{B/DE} = -340.3 \text{ pulg/s}^2$. Por tanto, los resultados escritos en notación vectorial son

$$\boldsymbol{\alpha}_{DE} = -30.35\mathbf{k} \text{ rad/s}^2$$ *Respuesta*

y

$$\mathbf{a}_{B/DE} = 340.3(\cos 18.05°\mathbf{i} + \text{sen } 18.05°\mathbf{j})$$

$$= 323.6\mathbf{i} + 105.4\mathbf{j} \text{ pulg/s}^2$$ *Respuesta*

Problemas

16.83 La varilla *OB* rota en sentido positivo con velocidad angular constante de 30 rev/min. Al mismo tiempo, el collar *A* se desliza hacia *B* con la rapidez constante de 3 pies/s relativa a la varilla. Utilizando un marco de referencia giratorio anclado a *OB*, calcule la aceleración del collar cuando $R = 0.6$ pies y $\theta = 0$. (Este problema también podría resolverse empleando coordenadas polares, véase el problema 13.33.)

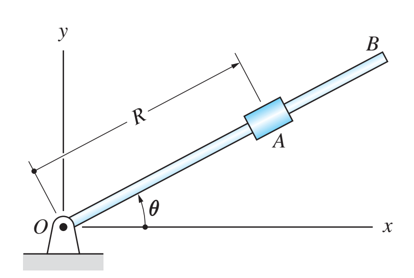


Fig. P16.83

16.84 Los marcos triangulares $\mathcal{B}$ en las figuras (a) y (b) rotan respecto de *A* con una velocidad angular constante de 2 rad/s. Al mismo tiempo, el deslizador *P* se mueve hacia la derecha con la rapidez constante de 0.2 m/s relativa al marco. Determine la aceleración de *P* en las posiciones que se muestran.

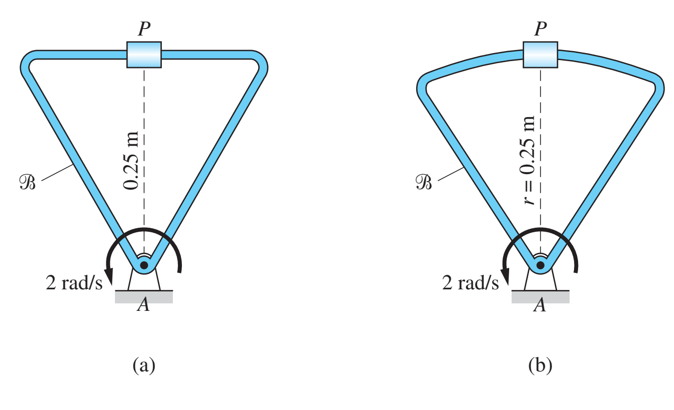


Fig. P16.84

16.85 La varilla *OAB* rota con velocidad angular constante $\omega = 5$ rad/s en sentido positivo. En la posición que se muestra, el collar *P* se desliza hacia *A* con una rapidez constante de 0.8 m/s, incrementándose a razón de 8 m/s^2, ambas medidas relativas a la varilla. Obtenga la aceleración de *P* en esta posición.

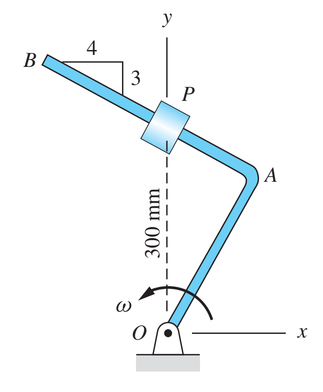


Fig. P16.85

16.86 En la posición que se muestra, la placa ranurada $\mathcal{B}$ rota respecto al perno *A* con velocidad angular de $\omega = 3$ rad/s (sentido positivo) y aceleración angular de $\alpha = 6$ rad/s^2 (sentido negativo). El deslizador *P* se mueve sobre la ranura con rapidez constante de 36 pulg/s relativa a la placa, en la dirección que se indica. Calcule los vectores de velocidad y aceleración de *P* en este instante.

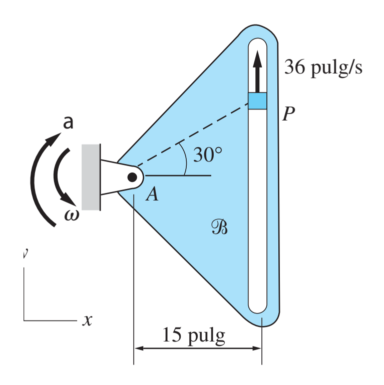


Fig. P16.86

16.87 La varilla telescópica AB se extiende a razón constante de 2 m/s conforme rota respecto de A con velocidad angular constante ω en sentido positivo. En el instante que se muestra, el vector de velocidad del extremo B se dirige hacia donde se indica. Encuentre ω y el vector de aceleración de B en este instante.

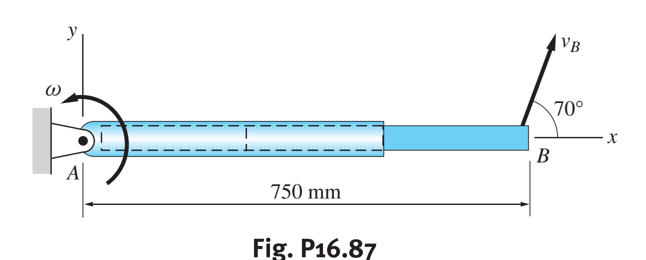


Fig. P16.87

16.88 El collar P se desliza sobre la varilla guía semicircular. Un perno unido al collar mantiene la ranura en el brazo rotatorio AB. Cuando $\theta = 45°$, la velocidad y la aceleración angulares de AB son $\omega = 4$ rad/s y $\alpha = 12$ rad/s^2, ambas en sentido positivo. Determine la rapidez y el vector de aceleración del collar P en este instante.

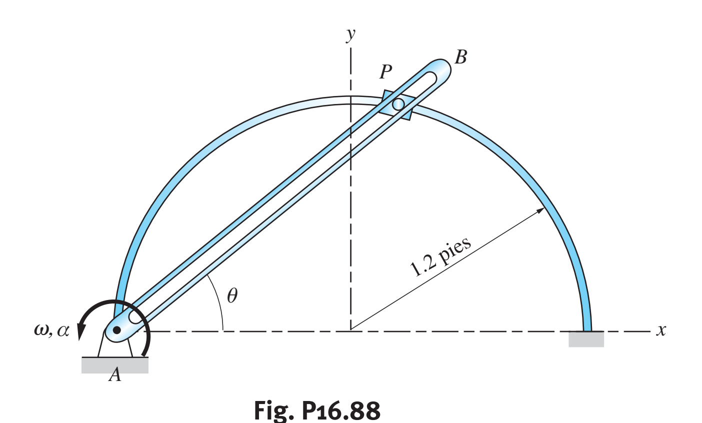


Fig. P16.88

16.89 El perno P, unido a la varilla deslizante PD, mantiene una ranura en el brazo giratorio AB. La varilla PD se desliza hacia la izquierda con velocidad constante de 1.2 m/s. Determine la velocidad y la aceleración angulares de AB cuando $\theta = 60°$.

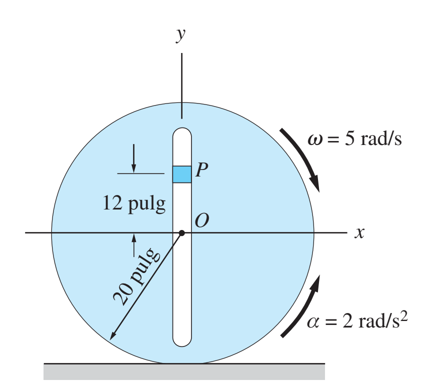


Fig. P16.90

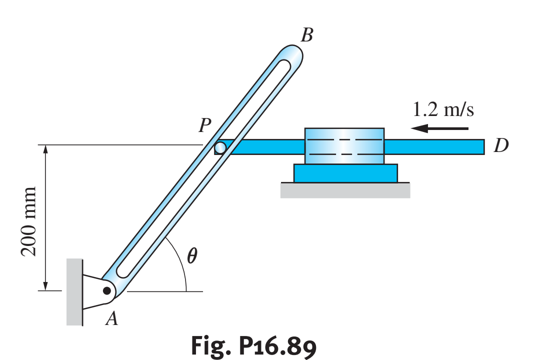


Fig. P16.89

16.90 El disco ranurado rueda sin deslizarse. En la posición que se muestra, la velocidad angular del disco es de 5 rad/s en sentido negativo y la aceleración angular

es de 2 rad/s^2 en sentido positivo. En la misma posición, la velocidad y la aceleración del deslizador P relativas a la rueda son de 6 pies/s y 28 pies/s^2, respectivamente, ambas se dirigen hacia abajo. Encuentre la aceleración de P en esta posición.

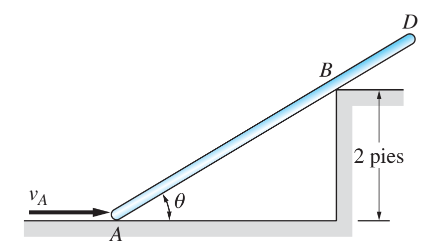


Fig. P16.91

***16.91** El extremo A de la barra ABD se empuja hacia la derecha con la rapidez constante de 2 pies/s. Cuando $\theta = 30°$, determine: (a) la velocidad angular de la barra, y (b) las componentes del vector de aceleración del punto B que son paralela y perpendiculares a la barra.

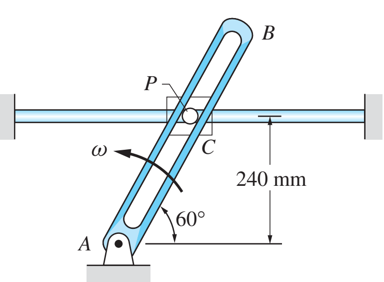


Fig. P16.92

16.92 El collar C se empuja sobre la barra horizontal con el perno P que se desliza en el brazo ranurado AB. El brazo rota con velocidad angular constante de $\omega = 4$ rad/s en sentido positivo. En la posición que se muestra obtenga: (a) la velocidad de P relativa a AB, y (b) la aceleración de P relativa a AB.

16.93 La manivela AD rota con velocidad angular constante de 8 rad/s en sentido negativo. Para la posición que se indica, determine la rapidez angular de la varilla BE y la velocidad del deslizador D relativa a BE.

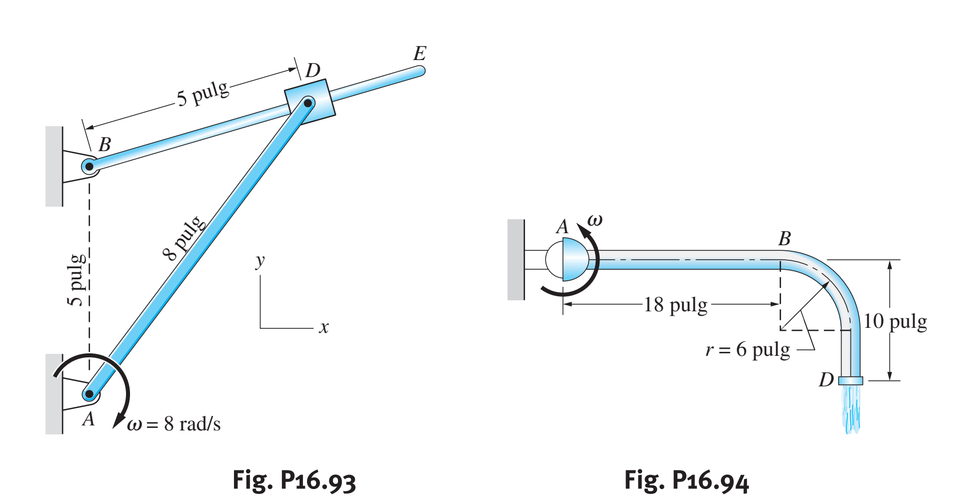


Fig. P16.93 **Fig. P16.94**

16.94 El agua que entra al tubo doblado en A se descarga en D. El tubo rota respecto de A con la velocidad angular constante $\omega = 10$ rad/s y el agua tiene una rapidez constante de 12 pies/s relativa al tubo. Encuentre la aceleración del agua: (a) inmediatamente después de entrar al doblez en B, y (b) justo antes de que se descargue en D.

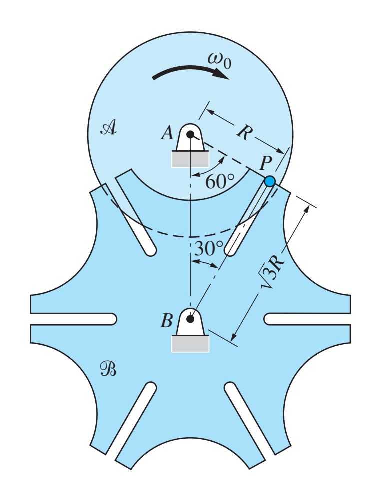


Fig. P16.95

16.95 En la figura se muestra un mecanismo, llamado tope Ginebra, que convierte la velocidad angular constante del disco $\mathscr{A}$ en un movimiento de “parar y avanzar” del disco ranurado $\mathscr{B}$. En la posición que se muestra, el perno P, que está unido a $\mathscr{A}$, acaba de entrar a la ranura en el disco $\mathscr{B}$. Calcule la aceleración angular de $\mathscr{B}$ para esta posición. (Observe que su velocidad angular es cero en este instante.)

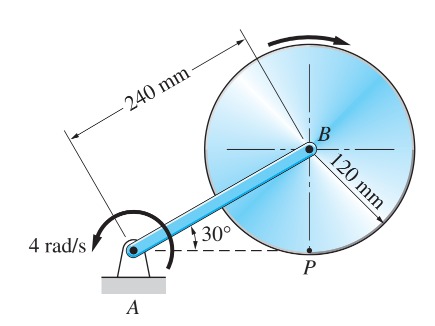


Fig. P16.96

16.96 El brazo AB rota con rapidez angular constante de 4 rad/s en sentido positivo. Al mismo tiempo, el disco gira con rapidez angular de 8 rad/s relativa a AB en sentido negativo. Determine la aceleración del punto P sobre el borde del disco: (a) considerando que (a) es AB un marco de referencia en rotación, y (b) empleando el método de la aceleración relativa del apartado 16.7.

16.97 El disco rueda sin deslizarse sobre la superficie horizontal con velocidad angular constante de 2 rad/s en sentido positivo. El perno *P*, unido al borde del disco, mantiene la ranura en el brazo *AB* giratorio. Calcule la velocidad y la aceleración angulares de *AB* cuando el sistema está en la posición que se muestra.

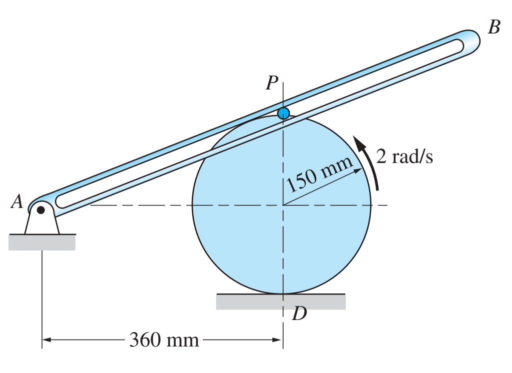


Fig. P16.97

16.98 La varilla *AB* del mecanismo rota con rapidez angular constante de 8 rad/s en sentido negativo. Para la posición que se muestra, calcule la velocidad angular de la varilla *BE*.

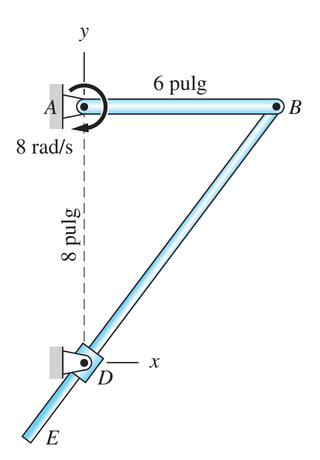


Fig. P16.98

*16.10 *Método de las restricciones*

En el apartado 15.3, se demostró cómo las ecuaciones de restricción y sus derivadas temporales pueden utilizarse para resolver los problemas de la cinemática de partículas. Esta técnica también se aplica a la cinemática de los cuerpos rígidos. Entonces, primero se extenderá a estos últimos la terminología que se presentó en el apartado 15.3:

- *Restricciones cinemáticas*: son las restricciones geométricas impuestas sobre el movimiento de los puntos en los cuerpos.
- *Ecuaciones de restricción*: expresiones matemáticas que describen las restricciones cinemáticas en términos de las coordenadas de posición.

- *Coordenadas cinemáticamente independientes*: son las coordenadas de posición que no están sujetas a las restricciones cinemáticas.
- *Número de grados de libertad:* el número de coordenadas cinemáticamente independientes que se requieren para una completa descripción de la configuración de un cuerpo o un sistema de cuerpos.

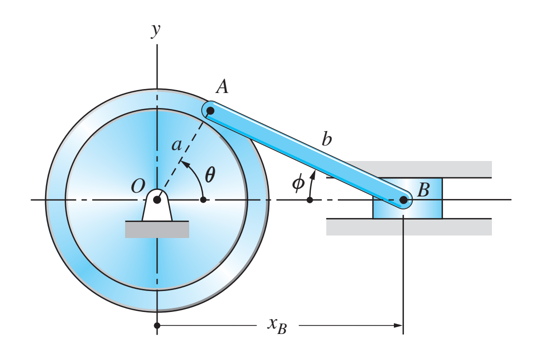


Fig. 16.18

El término "coordenada de posición" puede referirse a la coordenada de un punto o a la de la posición angular de una recta. Como ejemplo, considere el sistema que se muestra en la figura 16.18. Ésta presenta tres coordenadas de posición:

1. El ángulo θ es la coordenada de posición angular de la recta *OA* sobre el disco.
2. El ángulo ϕ es la coordenada de posición angular de la biela *AB*.
3. La distancia x_B es la coordenada de posición rectilínea del deslizador *B*.

Debido a que el punto *A* es común al disco y a la biela, las coordenadas *x* y *y* de *A* sobre el disco son iguales a las de *A* sobre la biela; es decir,

$$a\cos\theta = x_B - b\cos\phi \qquad \text{(a)}$$

$$a\,\text{sen}\,\theta = b\,\text{sen}\,\phi \qquad \text{(b)}$$

(a) y (b) son las ecuaciones de restricción para el sistema. Observe que, debido a la conexión en *A*, el *sistema* sólo tiene un grado de libertad; es decir, sólo una de las coordenadas (θ, ϕ o x_B) es cinemáticamente independiente. Por ejemplo, si se da θ, las ecuaciones de restricción determinan ϕ y x_B.

Las relaciones entre las velocidades se obtienen al derivar las ecuaciones de restricción respecto al tiempo:

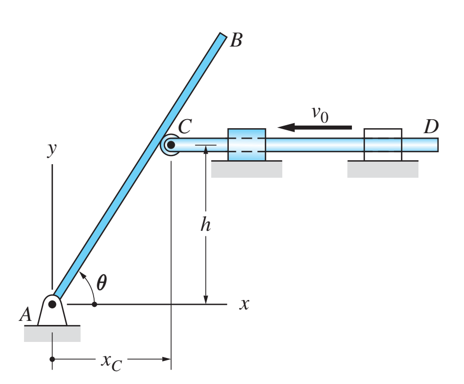
$$-a\,\text{sen}\,\theta\cdot\dot{\theta} = \dot{x}_B + b\,\text{sen}\,\phi\cdot\dot{\phi} \qquad \text{(c)}$$

$$a\cos\theta\cdot\dot{\theta} = b\cos\phi\cdot\dot{\phi} \qquad \text{(d)}$$

donde $\dot{\phi}$ y $\dot{\theta}$ son las velocidades angulares del disco y la biela, respectivamente, y $\dot{x}_B$ es la rapidez del punto *B*. Si se necesitan las aceleraciones, entonces las ecuaciones (c) y (d) pueden derivarse otra vez respecto al tiempo.

Problema de ejemplo 16.15

La posición angular de la barra AB está controlada por la varilla deslizante CD. Si la velocidad constante de CD es v_0 en la dirección que se indica, determine la velocidad y la aceleración angulares de AB como funciones del ángulo θ.



Solución

La figura muestra dos coordenadas de posición: la de posición angular θ de la barra AB y la x_C del punto C en la varilla deslizante. Sin embargo, como C siempre está en contacto con la barra AB (véase la figura), las dos coordenadas están sujetas a la restricción:

$$x_C = h \cot\theta \qquad \text{(a)}$$

Así el sistema sólo tiene un grado de libertad.

Al derivar la ecuación (a) respecto al tiempo resulta:

$$\dot{x}_C = -h\dot{\theta}\,\mathrm{cosec}^2\theta$$

Al sustituir $\dot{x}_C = -v_0$ y despejar a $\dot{\theta}$, se obtiene la velocidad angular de la barra AB

$$\omega = \dot{\theta} = \frac{v_0}{h}\,\mathrm{sen}^2\,\theta \qquad \textit{Respuesta}$$

La aceleración angular de AB se deduce al derivar su velocidad angular:

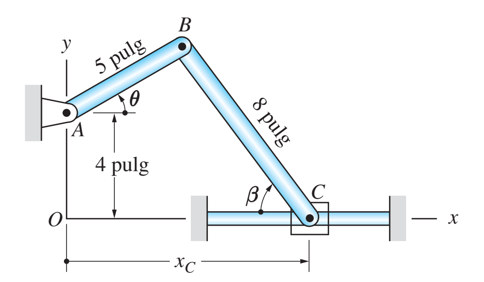
$$\alpha = \ddot{\theta} = \frac{v_0}{h}(2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta)\dot{\theta}$$

La sustitución para $\dot{\theta}$ resulta

$$\alpha = \frac{v_0}{h}(2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta)\left(\frac{v_0}{h}\,\mathrm{sen}^2\,\theta\right) = \frac{2v_0^2}{h^2}\,\mathrm{sen}^3\,\theta\cos\theta \qquad \textit{Respuesta}$$

Problema de ejemplo 16.16

La barra *AB* rota con rapidez angular constante de 3 rad/s en sentido negativo. Cuando $\theta = 30°$, determine: 1. la velocidad y la aceleración angulares de la barra *BC*, y 2. la velocidad y aceleración del collar deslizante *C*. (Nota: este problema se presentó antes como los de ejemplo 16.5, 16.7 y 16.11).



Solución

Cálculos preliminares

Las posiciones de las barras *AB* y *BC* están definidas por las tres coordenadas (θ, β, x_C) que se muestran en la figura. Sin embargo, el mecanismo sólo tiene un grado de libertad porque existen dos ecuaciones de restricción debido a la conexión en el perno *B*. Al igualar las coordenadas del punto *B* en las barras *AB* y *BC*, se obtiene

$$5 \cos \theta = x_C - 8 \cos \beta \tag{a}$$

$$4 + 5 \operatorname{sen} \theta = 8 \operatorname{sen} \beta \tag{b}$$

Cuando $\theta = 30°$, la ecuación (b) da

$$\beta = \operatorname{sen}^{-1} \frac{4 + 5 \operatorname{sen} 30°}{8} = 54.34°$$

Parte 1

Cuando se deriva la ecuación (b) respecto al tiempo, se tiene

$$5 \cos \theta \cdot \dot{\theta} = 8 \cos \beta \cdot \dot{\beta} \tag{c}$$

o

$$\dot{\beta} = \frac{5 \cos \theta}{8 \cos \beta} \dot{\theta}$$

Al sustituir $\theta = 30°$, $\beta = 54.34°$ y $\dot{\theta}$ (el signo menos indica que θ y $\dot{\theta}$ tienen sentidos opuestos), se deduce que

$$\dot{\beta} = \frac{5 \cos 30°}{8 \cos 54.34°}(-3) = -2.785 \text{ rad/s}$$

De este modo, la velocidad angular de la barra BC es

$$\omega_{BC} = 2.79 \text{ rad/s (sentido positivo)}$$ *Respuesta*

Cuando se deriva la ecuación (c) respecto al tiempo se obtiene

$$5(\cos\theta \cdot \ddot{\theta} - \operatorname{sen}\theta \cdot \dot{\theta}^2) = 8(\cos\beta \cdot \ddot{\beta} - \operatorname{sen}\beta \cdot \dot{\beta}^2)$$

Por tanto,

$$\ddot{\beta} = \frac{5(\cos\theta \cdot \ddot{\theta} - \operatorname{sen}\theta \cdot \dot{\theta}^2) + 8\operatorname{sen}\beta \cdot \dot{\beta}^2}{8\cos\beta}$$

En $\theta = 30^\circ$, se tiene

$$\ddot{\beta} = \frac{5[0 - \operatorname{sen}30^\circ(-3)^2] + 8\operatorname{sen}54.34^\circ(-2.785)^2}{8\cos 54.34^\circ} = 5.985 \text{ rad/s}^2$$

Entonces la aceleración angular de BC es

$$\alpha_{BC} = 5.99 \text{ rad/s}^2 \text{ (sentido negativo)}$$ *Respuesta*

Parte 2

Al derivar respecto al tiempo la ecuación (a) da:

$$-5\operatorname{sen}\theta \cdot \dot{\theta} = \dot{x}_C + 8\operatorname{sen}\beta \cdot \dot{\beta}$$

Cuando se despeja a $\dot{x}_C$ resulta

$$\dot{x}_C = -(5\operatorname{sen}\theta \cdot \dot{\theta} + 8\operatorname{sen}\beta \cdot \dot{\beta}) \tag{d}$$

En $\theta = 30^\circ$, esto implica

$$\dot{x}_C = -[(5\operatorname{sen}30^\circ)(-3) + (8\operatorname{sen}54.34^\circ)(-2.785)] = 25.60 \text{ pulg/s}$$

Por tanto, la velocidad de C es

$$v_C = 25.6 \text{ pulg/s} \rightarrow$$ *Respuesta*

La aceleración de C se obtiene al derivar la ecuación (d):

$$\ddot{x}_C = -5(\operatorname{sen}\theta \cdot \ddot{\theta} + \cos\theta \cdot \dot{\theta}^2) - 8(\operatorname{sen}\beta \cdot \ddot{\beta} + \cos\beta \cdot \dot{\beta}^2)$$

que en $\theta = 30^\circ$ resulta:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_C &= -5[0 + \cos 30^\circ(-3)^2] - 8[\operatorname{sen}54.34^\circ(5.985) + \cos 54.34^\circ(-2.785)^2] \\ &= -114.0 \text{ pulg/s}^2\end{aligned}$$

Por tanto, la aceleración de C es:

$$a_C = 114.0 \text{ pulg/s}^2 \quad \leftarrow$$ *Respuesta*

Problemas

Nota: los siguientes problemas deben resolverse derivando la ecuación de restricción.

16.99 Cuando la manivela *AB* de la yunta escocesa está en la posición $\theta = 40°$, su velocidad angular es de 8 rad/s y su aceleración angular de 140 rad/s^2, ambas en sentido negativo. Calcule la velocidad y la aceleración de la varilla deslizante *D* en esta posición.

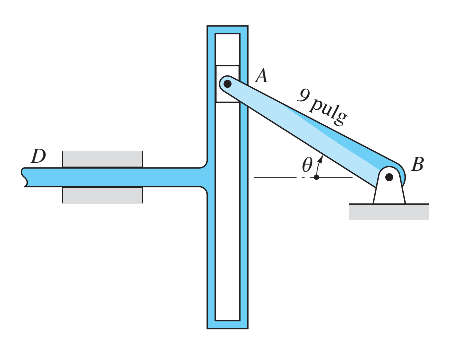


Fig. P16.99

16.100 El collar *B* se desliza hacia la derecha con rapidez constante de 1.4 m/s. Cuando la barra *AB* está en la posición $\theta = 20°$, determine: (a) la velocidad del collar *A*; y (b) la aceleración de *A*. La longitud de la barra es $L = 1.8$ m.

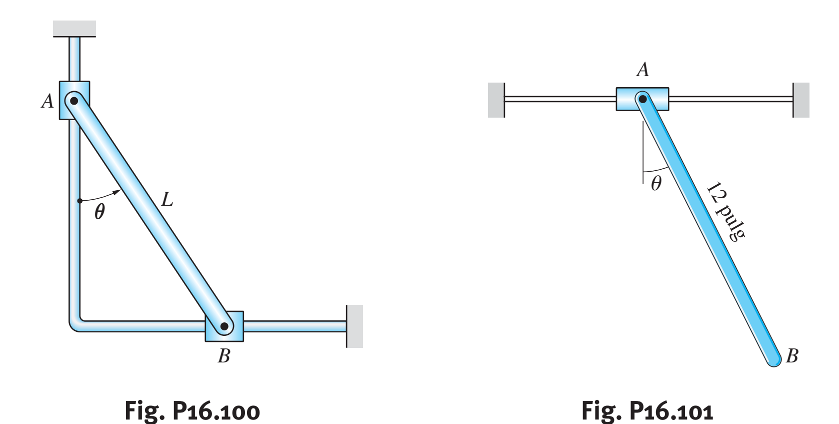


Fig. P16.100 **Fig. P16.101**

16.101 En la posición $\theta = 25°$, el collar *A* se desliza hacia la izquierda y su rapidez disminuye a razón de 36 pulg/s^2. Si la aceleración del extremo *B* de la varilla *AB* es cero en esta posición, obtenga la velocidad y la aceleración angulares de *AB*.

16.102 Cuando $\theta = 60°$, la varilla *AB* del mecanismo se desliza hacia la izquierda con una rapidez de 1.2 m/s. Encuentre la velocidad angular de la barra *CD* en esta posición.

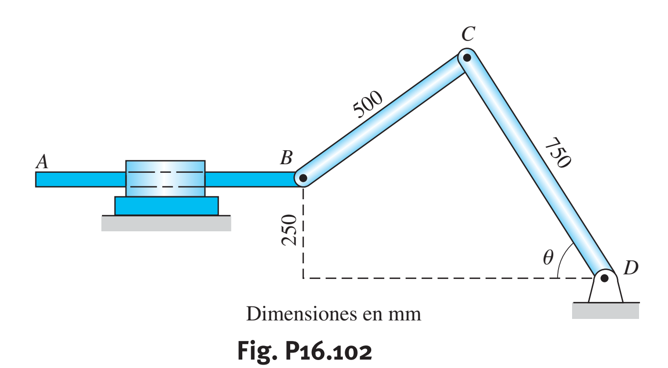


Fig. P16.102

16.103 La conexión articulada *OA* del brazo del robot rota con la velocidad angular constante $\dot{\theta} = 0.8$ rad/s. Al mismo tiempo, el extremo *B* del brazo *AB* traza la recta vertical $x = 0.8$ m. Determine la velocidad angular y la aceleración de la conexión articulada *AB* cuando $\theta_1 = 30°$. Suponga que $\theta_2 < 90°$.

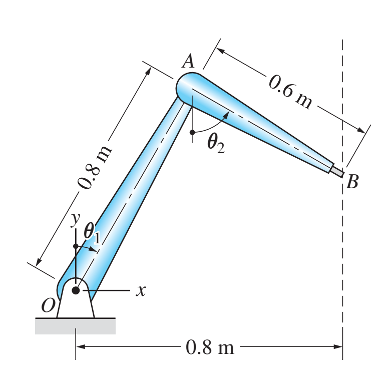


Fig. P16.103

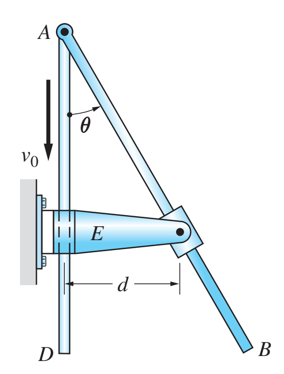


Fig. P16.104

16.104 La varilla AD se desliza en el collar fijo E con una rapidez constante v_0. Encuentre: (a) la velocidad angular, y (b) la aceleración angular de la barra AB como funciones del ángulo θ.

16.105 La varilla AD se desliza en el collar fijo E con la rapidez constante v_0. Determine: (a) la velocidad angular, y (b) la aceleración angular de la barra AB como funciones del ángulo θ. Observe que el eje del disco está unido al collar E.

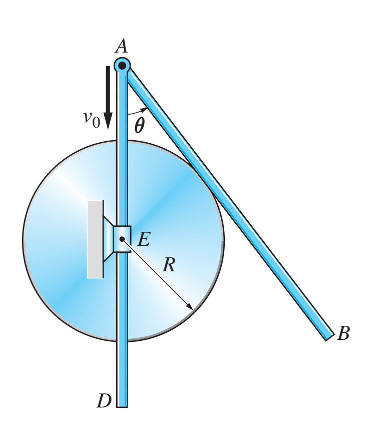


Fig. P16.105

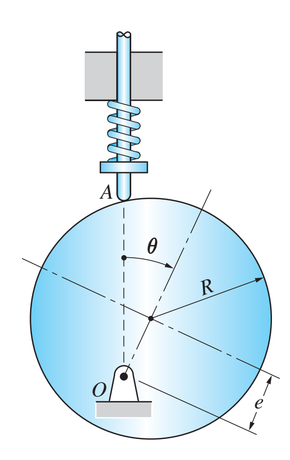


Fig. P16.106, P16.107

16.106 La leva circular tiene radio R y una excentricidad $e = R$. El seguidor A se mantiene en contacto con la superficie de la leva mediante un resorte de compresión. Suponga que la leva parte del reposo en $\theta = 0$ y acelera a razón constante $\ddot{\theta}$ y encuentre la aceleración del seguidor como una función de θ.

16.107 El radio de la leva circular es $R = 100$ mm y su excentricidad es $e = 60$ mm. Si la rapidez angular de la leva es de 1000 rev/min, calcule la velocidad del seguidor A cuando $\theta = 60^\circ$.

***16.108** El extremo libre de la cuerda unida a la barra AB se jala hacia abajo a razón de 2 pies/s. Encuentre la velocidad angular de AB cuando $\theta = 20°$.

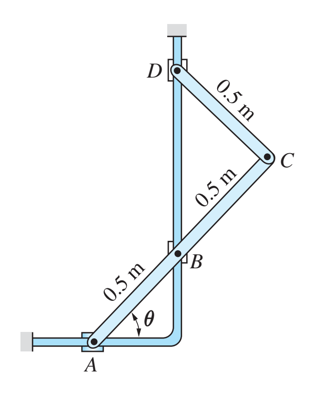


Fig. P16.109

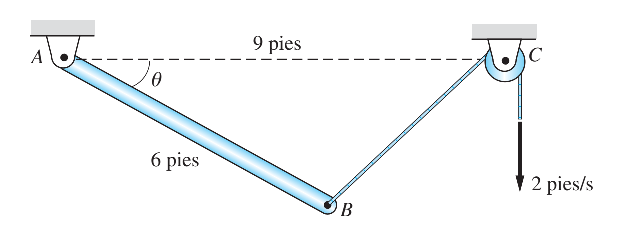


Fig. P16.108

16.109 En el instante en que $\theta = 30^\circ$, el collar D se desliza hacia arriba con una velocidad constante de 3 m/s. Obtenga la velocidad y la aceleración angulares de la barra ABC en este instante.

16.110 La varilla BC se desliza en el manguito articulado D conforme la barra AB rota con la velocidad angular constante $\dot{\theta}_1 = 0.8$ rad/s. Determine la velocidad angular de la varilla BC en las *dos posiciones* donde $\theta_2 = 30°$.

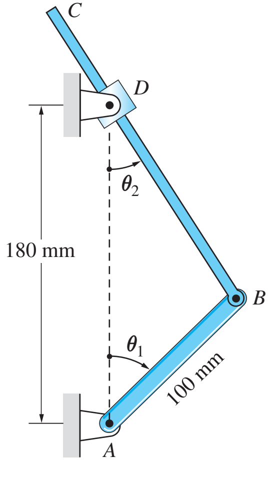


Fig. P16.110

16.111 El collar C se desliza sobre la varilla guía horizontal con la velocidad constante v_0. La varilla CD está libre para deslizarse en el manguito B, que está unido de manera rígida a la barra AB. Obtenga la velocidad y la aceleración angulares de la barra AB en términos de v_0, b y θ. (*Sugerencia:* $\omega_{AB} = \omega_{CD}$.)

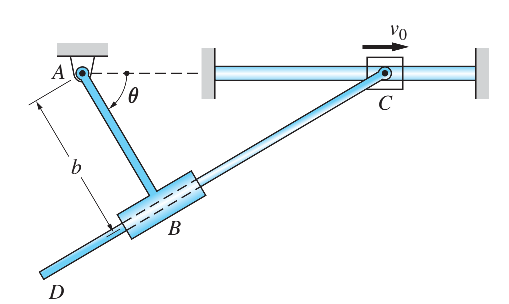


Fig. P16.111

16.112 El engrane de radio R rueda sobre la cremallera horizontal. El perno G en el centro del engrane se mantiene en una ranura en el brazo AB, que rota con velocidad angular constante $\dot{\theta}$. Determine la aceleración angular del engrane cuando $\theta = 50°$.

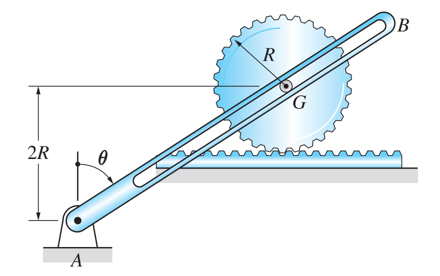


Fig. P16.112

16.113 Para el mecanismo que se muestra, encuentre la rapidez y la magnitud de la aceleración del collar C en términos de b, θ, $\dot{\theta}$ y $\ddot{\theta}$.

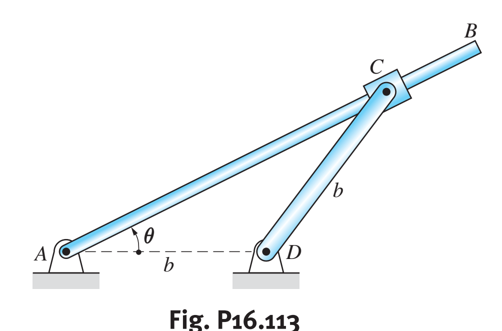


Fig. P16.113

16.114 Si la velocidad del deslizador A es constante, deduzca las expresiones para: (a) la velocidad, y (b) la aceleración del deslizador B en términos del ángulo θ.

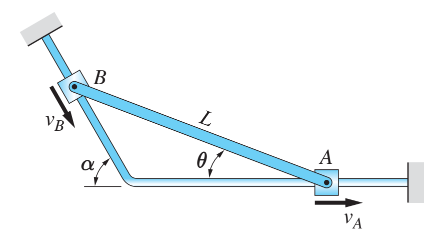


Fig. P16.114

Resumen de ecuaciones

Movimiento angular en un plano de un cuerpo rígido

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad \alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \omega\frac{d\omega}{d\theta}$$

Rotación respecto a un eje fijo La velocidad y las componentes de la aceleración de un punto en un cuerpo son:

$$v = R\omega \qquad a_n = R\omega^2 = \frac{v^2}{R} = v\omega \qquad a_t = R\alpha$$

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad \mathbf{a}_n = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad \mathbf{a}_t = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}$$

R = distancia radial a partir del eje,
$\mathbf{r}$ = vector desde cualquier punto sobre el eje hasta el punto en el cuerpo.

Movimiento relativo Los puntos A y B están en el mismo cuerpo rígido. La velocidad y aceleración relativas son:

$$v_{B/A} = r_{B/A}\omega \qquad (a_{B/A})_n = r_{B/A}\omega^2 = \frac{v_{B/A}^2}{r_{B/A}} \qquad (a_{B/A})_t = r_{B/A}\alpha$$

$$\mathbf{v}_{B/A} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A} \quad (\mathbf{a}_{B/A})_n = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{B/A} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A})$$

$$(\mathbf{a}_{B/A})_t = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A}$$

Rodamiento sin deslizamiento La velocidad y la aceleración del centro O de un disco son:

$$v_o = R\omega \quad a_o = R\alpha$$

R = radio del disco

Movimiento relativo a un marco de referencia en rotación El marco de referencia está anclado en el cuerpo $\mathcal{B}$ que rota con velocidad angular ω y aceleración angular $\dot{\boldsymbol{\omega}}$. La velocidad y la aceleración del punto P (no necesariamente en el cuerpo) son

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{P/A} + \mathbf{v}_{P/\mathcal{B}}$$

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_A + \left[\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_{P/A} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{P/A})\right] + \mathbf{a}_{P/\mathcal{B}} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{P/\mathcal{B}}$$

Problemas de repaso

16.115 En la posición que se muestra, las velocidades de los vértices A y B de la placa son $\mathbf{v}_A = 9.53\mathbf{j} - 4.0\mathbf{k}$ pies/s y $\mathbf{v}_B = u\mathbf{i} + 6.93\mathbf{k}$ pies/s, donde u es una incógnita. Si se sabe que la placa rota con una velocidad angular constante respecto a un eje que pasa por O, determine: (a) la velocidad angular de la placa, y (b) la aceleración del vértice A.

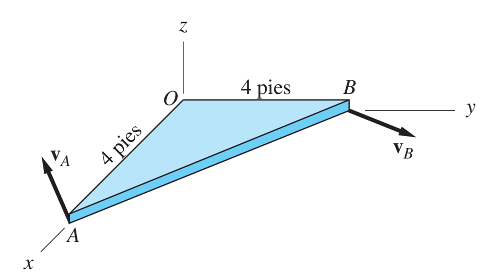


Fig. P16.115

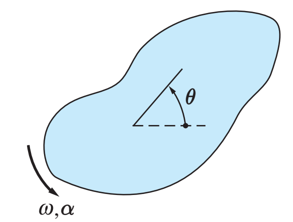


Fig. P16.116

16.116 La aceleración angular del cuerpo que efectúa movimiento en un plano es $\alpha = 6t^2 + k$ rad/s^2, donde t está en segundos y k es una constante. Cuando $t = 0$, la coordenada de posición angular del cuerpo es $\theta = -4$ rad y su velocidad angular es $\omega = 6$ rad/s. Cuando $t = 2$ s, la coordenada de posición angular es $\theta = -8$ rad. Determine la aceleración angular del cuerpo cuando $t = 3$ s.

16.117 Los puntos A y B están fijos en el disco que rota respecto al perno en O. En el instante que se muestra, la aceleración de A es $\mathbf{a}_A = -6.28\mathbf{i} - 0.72\mathbf{j}$ m/s^2. Determine el vector de aceleración de B en este instante.

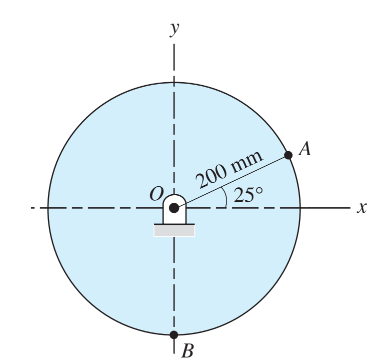


Fig. P16.117

16.118 Cuando $\theta = 30°$, la velocidad y la aceleración angulares del brazo AB son $\dot{\theta} = 2$ rad/s y $\ddot{\theta} = 1.5$ rad/s^2. Calcule la velocidad y la aceleración del punto C para esta posición.

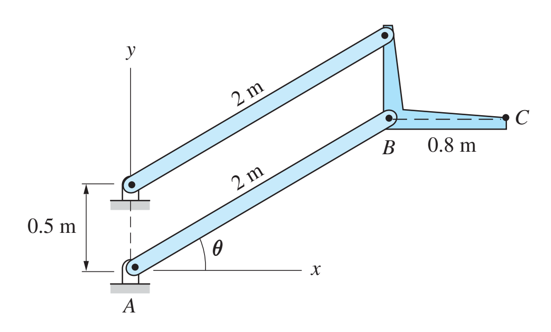


Fig. P16.118

16.119 El rodillo C se mueve sobre la ranura con la rapidez constante de 60 pulg/s. Encuentre las velocidades angulares de las barras AB y BC en la posición que se indica.

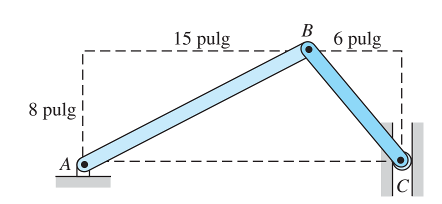


Fig. P16.119

16.120 La varilla doblada *ABC* rota respecto al eje *AB*. En la posición que se muestra, la velocidad angular y la aceleración de la varilla son $\omega = 6$ rad/s y $\dot{\omega} = -25$ rad/s. Determine la velocidad y aceleración del extremo *C* en esta posición.

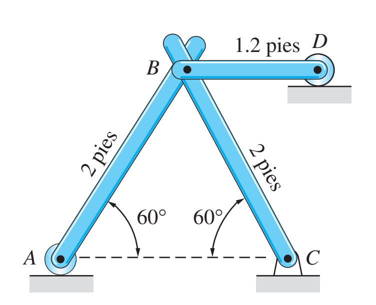


Fig. P16.121

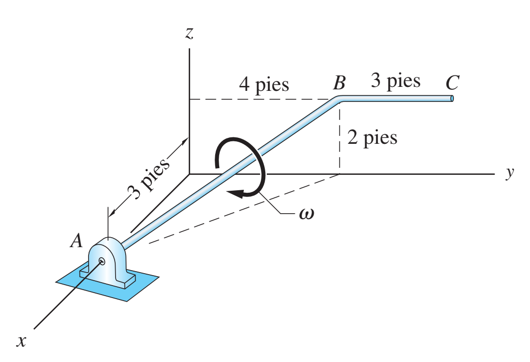


Fig. P16.120

16.121 Si se sabe que el rodillo *D* se mueve hacia la izquierda con la rapidez constante de 5 pies/s, encuentre la velocidad del rodillo *A* en la posición que se indica.

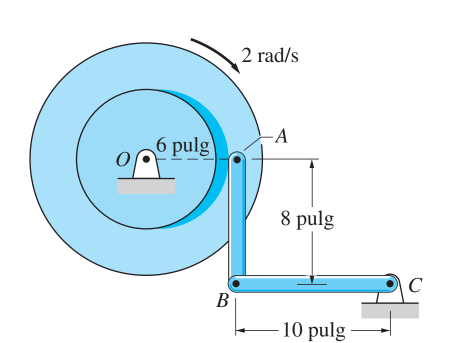


Fig. P16.122

16.122 El disco rota con velocidad angular constante de 2 rad/s en sentido negativo. Determine las aceleraciones angulares de las barras *AB* y *BC* en la posición que se muestra.

16.123 La barra *AB* del mecanismo rota con velocidad angular constante de 4.5 rad/s. Obtenga la aceleración angular de la barra *BC* y la aceleración del deslizador *C* en la posición que se indica.

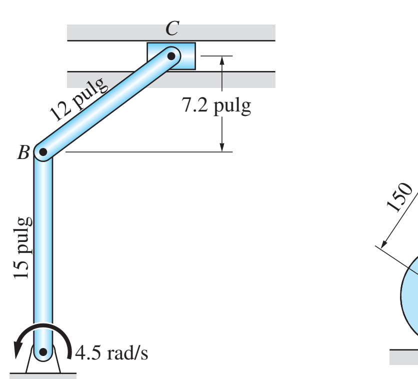


Fig. P16.123

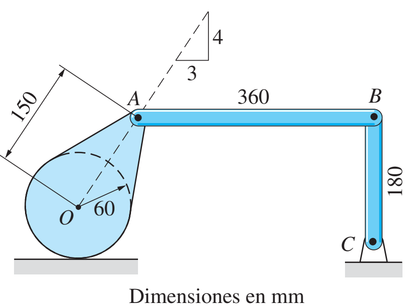


Fig. P16.124

16.124 El balancín *OA* rueda sin deslizarse sobre la superficie horizontal. En la posición que se muestra, la velocidad angular del balancín es de 7 rad/s en sentido negativo. Determine la velocidad angular de la conexión articulada *BC* en esta posición.

Dimensiones en mm

Fig. P16.125

16.125 La barra *AB* rota con una velocidad angular constante de 3 rad/s en sentido positivo. (a) Compruebe que en la posición que se muestra las velocidades angulares de las barras *BC* y *CD* son 1.2 rad/s (sentido positivo) y 3 rad/s (sentido negativo), respectivamente. (b) Encuentre las aceleraciones angulares de las barras *BC* y *CD* en la misma posición.

16.126 La barra *AB* rota con velocidad angular constante de 72 rad/s en sentido negativo. Cuando el mecanismo está en la posición que se muestra, determine la velocidad angular de la placa *BCD* y la magnitud de la velocidad del vértice *D*.

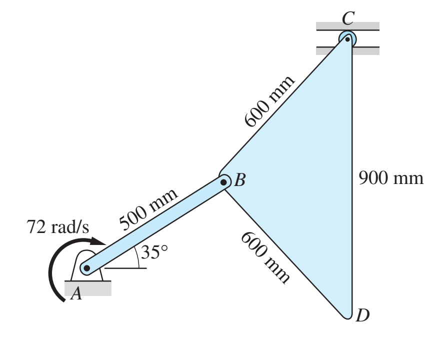


Fig. P16.126

16.127 En la posición que se indica, la varilla doblada *AB* rota respecto de *A* con la velocidad angular $\omega = 6$ rad/s y la aceleración angular $\dot{\omega} = 18$ rad/s^2. Al mismo tiempo, el collar *D* se desliza sobre la varilla con la velocidad $v = 3$ pies/s y con aceleración $\dot{v} = -4$ pies/s^2 (medida respecto a la varilla). Obtenga la aceleración del collar *D* en esta posición.

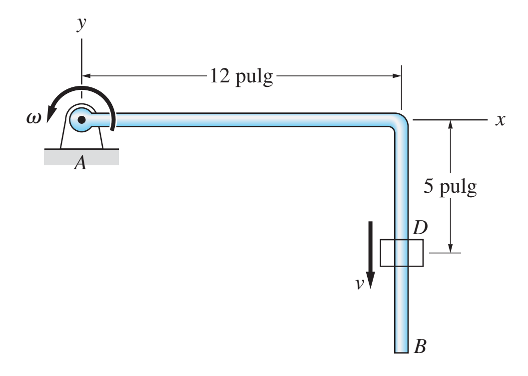


Fig. P16.127

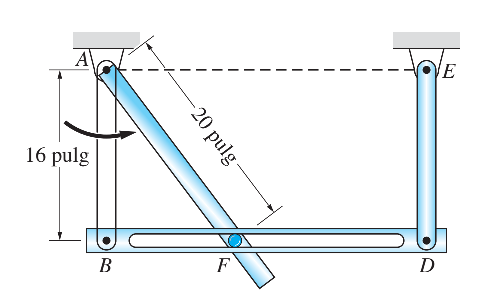


Fig. P16.128

16.128 El perno *F*, que está unido a la varilla *AF*, se mantiene en una ranura en la barra *BD* de la conexión en forma de paralelogramo *ABDE*. La barra *AB* de dicha conexión tiene una velocidad angular constante de 15 rad/s en sentido positivo. Para la posición que se muestra, determine la aceleración angular de la varilla *AF* y la aceleración del perno *F* relativa a la barra *BD*.

16.129 La barra *AB* de la conexión rota con velocidad angular constante de 10 rad/s. Para la posición que se muestra, determine: (a) las velocidades angulares de las barras *BC* y *CD*, y (b) las aceleraciones angulares de las barras *BC* y *CD*.

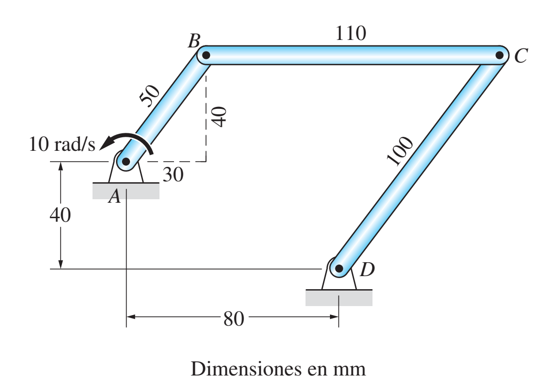


Fig. P16.129

16.130 En la posición que se muestra, la velocidad y la aceleración angulares de la varilla *AB* son 6 rad/s y 8 rad/s^2, respectivamente, ambas en sentido positivo. Para esta posición, calcule: (a) la velocidad del collar *A*, y (b) la aceleración del collar *A*.

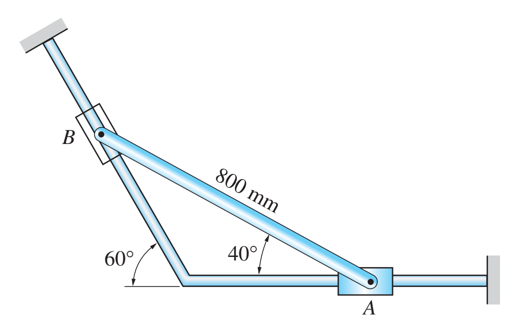


Fig. P16.130

16.131 La barra curva esbelta *OC* rota respecto de *O*. En el instante que se muestra, la velocidad angular de *OC* es de 2 rad/s y su aceleración angular es cero. Encuentre la aceleración angular de la barra *AB* en este instante.

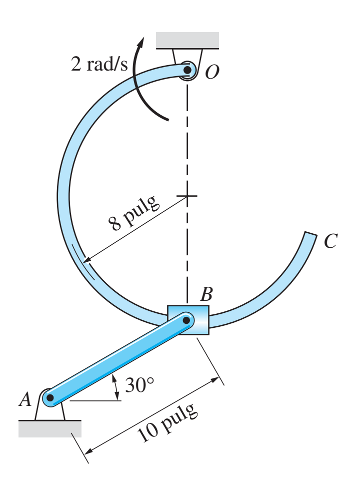


Fig. P16.131

17

Cinética plana de cuerpos rígidos: método de fuerza-masa-aceleración





Si la aceleración es suficientemente grande, el neumático delantero de la motocicleta se levantará del suelo y así el vehículo sólo se apoyará en el neumático trasero. Esto se investiga en el problema 17.18. (© iStockphoto.com/Bernhard Weber)

17.1 Introducción

Este capítulo presenta el método de fuerza-masa-aceleración (FMA) del análisis cinético para los cuerpos rígidos con movimiento en un plano. Las ecuaciones de movimiento, que son la base del método, pueden obtenerse de los resultados para los sistemas de partículas del capítulo 15, considerando a un cuerpo rígido como un conjunto de partículas en el que las distancias entre éstas permanecen constantes. Las ecuaciones resultantes se conocen como *leyes del movimiento de Euler*. La primera ley gobierna el movimiento del centro de masa del cuerpo; es idéntica a la ecuación de movimiento del centro de masa de un sistema de partículas. La segunda ley, que rige el movimiento de rotación del cuerpo, es la relación momento-cantidad de movimiento angular para un sistema de partículas. Cuando esta ley se especializa en un cuerpo rígido, da origen al concepto de *momento de inercia de*

masa, que es el tema del próximo apartado. Los apartados subsecuentes deducen la expresión para la cantidad de movimiento angular de un cuerpo rígido y analizan las ecuaciones de movimiento y su aplicación empleando diagramas de cuerpo libre y de masa-aceleración. En la conclusión del capítulo se muestra cómo la historia del movimiento puede determinarse al integrar las ecuaciones de movimiento.

17.2 Momento de inercia de masa; cuerpos compuestos

En este apartado se presenta el momento de inercia de masa de un cuerpo respecto a un eje. El apéndice F contiene un análisis más amplio del momento de inercia de masa, incluyendo su cálculo por medio de la integración.

a. Momento de inercia de masa

La figura 17.1 muestra un cuerpo de masa m que ocupa la región $\mathcal{V}$; r es la distancia perpendicular del eje a a la diferencial de masa dm del cuerpo. El momento de inercia de masa del cuerpo respecto al eje a se define como

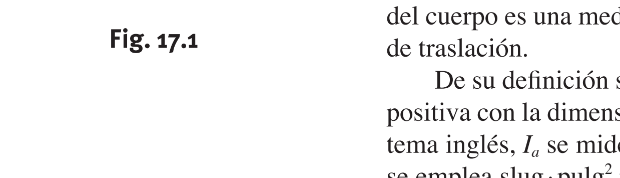


Fig. 17.1

$$I_a = \int_{\mathcal{V}} r^2 \, dm \tag{17.1}$$

En breve se verá que esta integral es una medida de la habilidad del cuerpo para resistir un cambio en su movimiento angular respecto al eje a, justo como la masa del cuerpo es una medida de su capacidad para resistir un cambio en su movimiento de traslación.

De su definición se observa que el momento de inercia de masa es una cantidad positiva con la dimensión $[ML^2]$. En unidades del SI, I_a se mide en kg · m^2. En el sistema inglés, I_a se mide en slug · pie^2, o de manera equivalente, en lb · pie · s^2. (Nunca se emplea slug · pulg^2 porque las unidades de longitud serían inconsistentes, un slug equivale a 1 lb · s^2/pie.)

b. Radio de giro

El radio de giro k_a del cuerpo respecto al eje a se define como

$$I_a = mk_a^2 \quad \text{o} \quad k_a = \sqrt{\frac{I_a}{m}} \tag{17.2}$$

No obstante que la unidad del radio de giro es de longitud (por ejemplo, pies, metros), no es una distancia que pueda medirse físicamente. En lugar de ello, sólo es posible obtener su valor con la ecuación (17.2). El radio de giro nos permite comparar las resistencias de rotación de los cuerpos cuya masa es igual.

c. Teorema de los ejes paralelos

Considere los dos ejes paralelos que se muestran en la figura 17.2. La ubicación del eje a es arbitraria. El otro, que pasa por el centro de masa G del cuerpo, es el *eje central a*.*

Si d es la distancia entre los dos ejes, entonces el teorema de los ejes paralelos establece que

$$I_a = \bar{I}_a + md^2 \tag{17.3}$$

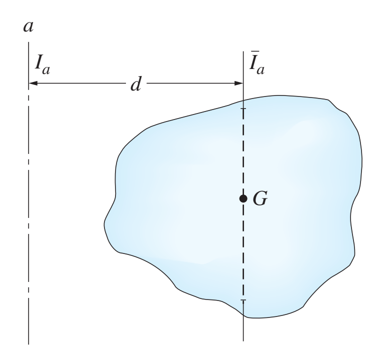


Fig. 17.2

donde m es la masa del cuerpo, I_a es el momento de inercia del cuerpo respecto al eje a, e $\bar{I}_a$ es su momento de inercia respecto al eje central a. Observe que si se conoce el momento de inercia respecto a un eje central, entonces el teorema de los ejes paralelos puede utilizarse para calcular el momento de inercia respecto a cualquier eje paralelo sin necesidad de recurrir a la integración. La tabla 17.1 enlista los momentos de inercia respecto a los ejes centrales para algunos cuerpos homogéneos.

Precaución El teorema de los ejes paralelos sólo se aplica si uno de ellos es un eje *central*.

Prueba

Para probar el teorema de los ejes paralelos, considere el cuerpo de masa m que ocupa la región $\mathcal{V}$ que se muestra en la figura 17.3. El origen O de los ejes xyz es arbitrario, pero $x'y'z'$ son ejes centrales paralelos a los ejes xyz. Las coordenadas del centro de masa G relativas a los ejes xyz se denotan con $\bar{x}$, $\bar{y}$ y $\bar{z}$. Sea dm un elemento de masa diferencial del cuerpo, que se localiza en P. Debido a que la distancia perpendicular del eje z a P es $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$, el momento de inercia del cuerpo respecto al eje z es

$$I_z = \int_{\mathcal{V}} r^2 \, dm = \int_{\mathcal{V}} (x^2 + y^2) \, dm \tag{a}$$

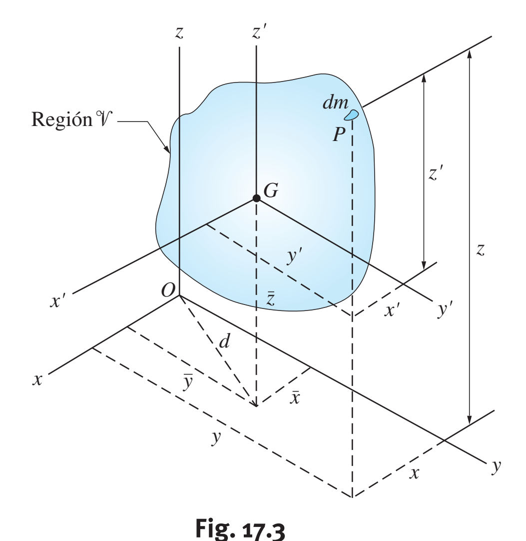


Fig. 17.3

*A cualquier eje que pase por el centro de masa le llamaremos *eje central*. El *eje central a* es el paralelo al eje a.

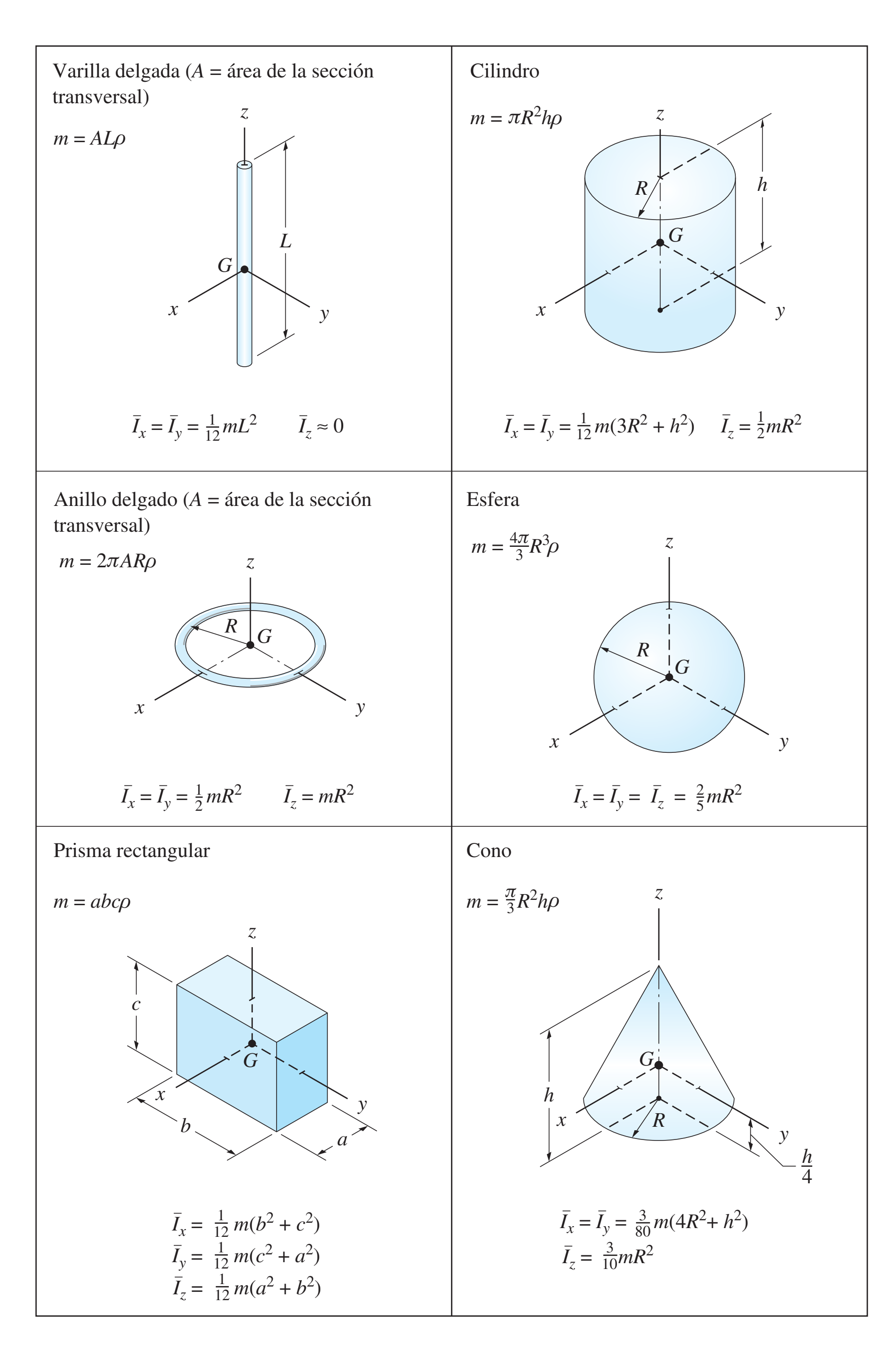


Tabla 17.1 Momentos de inercia de masa de cuerpos homogéneos (ρ = densidad)

Al sustituir $x = x' + \bar{x}$ y $y = y' + \bar{y}$ resulta

$$I_z = \int_{\mathcal{V}} \left[(x' + \bar{x})^2 + (y' + \bar{y})^2 \right] dm \qquad \text{(b)}$$

Cuando se expanden y reacomodan los términos se obtiene

$$I_z = \int_{\mathcal{V}} (x'^2 + y'^2)\, dm + \int_{\mathcal{V}} (\bar{x}^2 + \bar{y}^2)\, dm + 2\bar{x} \int_{\mathcal{V}} x'\, dm + 2\bar{y} \int_{\mathcal{V}} y'\, dm \qquad \text{(c)}$$

Ahora considere cada una de las integrales que aparecen en esta ecuación. La primera es igual a $I_{z'}$, el momento de inercia respecto al eje z'. Ya que z' es un eje central (que pasa por G), este término puede escribirse como $\bar{I}_z$. Sea $d = (\bar{x}^2 + \bar{y}^2)^{1/2}$, la distancia entre los ejes z y z', la segunda integral en la ecuación (c) es igual a md^2. Las dos últimas integrales en (c) se eliminan porque $\int_{\mathcal{V}} x'\, dm = 0$ y $\int_{\mathcal{V}} y'\, dm = 0$ cuando x' y y' son ejes centrales. Por tanto, la ecuación (c) queda

$$I_z = \bar{I}_z + md^2 \qquad \text{(d)}$$

Debido a que el eje z puede elegirse de manera arbitraria, la comparación de las ecuaciones (17.3) y (d) muestra que el teorema de los ejes paralelos se ha probado.

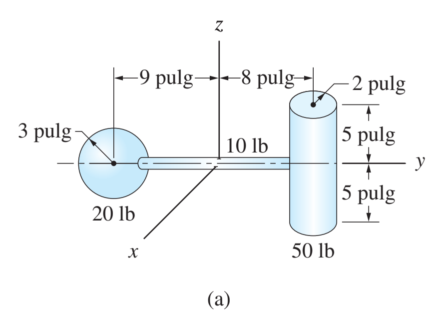
d. Método de los cuerpos compuestos

De la ecuación (17.1) se observa que el cálculo del momento de inercia de masa requiere que se efectúe una integración sobre todo el cuerpo. En el apéndice F se analizan varias técnicas de integración. Aquí sólo se considerará el *método de los cuerpos compuestos*, que resulta directamente de la propiedad de las integrales definidas:

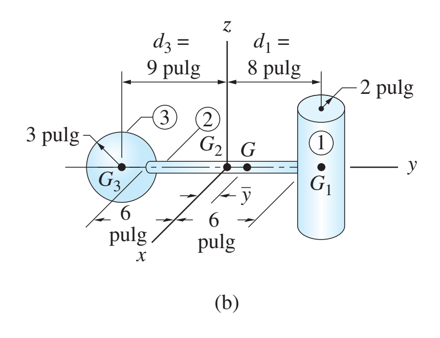
*La integral de una suma es igual a la suma de las integrales.**

Al emplear esta propiedad es posible demostrar que si un cuerpo se divide en partes, el momento de inercia del cuerpo respecto a un eje dado es igual a la suma de los momentos de inercia de sus partes respecto a ese eje. Los siguientes problemas de ejemplo muestran la aplicación de este método.

*Esta propiedad también formó la base para el método de formas compuestas que se analizó en el capítulo 8.



(a)



(b)

Problema de ejemplo **17.1**

En la figura (a), el montaje está compuesto de tres cuerpos homogéneos: el cilindro de 50 lb, la varilla delgada de 10 lb y la esfera de 20 lb. Para este montaje, calcule: 1. I_x, el momento de inercia de masa respecto al eje x y 2. $\bar{I}_x$ y $\bar{k}_x$, el momento de inercia de masa y el radio de giro respecto al eje x central del montaje.

Solución

En la figura (b) se muestran los centros de masa del cilindro (G_1), la varilla (G_2) y la esfera (G_3). Por simetría, el centro de masa del montaje (G) está sobre el eje y y debe determinarse su coordenada $\bar{y}$.

En los siguientes cálculos, la masa se calcula en slugs (o de manera equivalente en lb · s²/pie) al dividir el peso, en libras, entre $g = 32.2$ pies/s². Para mantener la consistencia en las unidades, todas las distancias se convierten de pulgadas a pies. Así, las unidades resultantes para el momento de inercia son slug · pie² (o equivalentemente, lb · pie · s²).

Parte 1

Cilindro Empleando la tabla 17.1, el momento de inercia del cilindro respecto a su propio eje central x es

$$(\bar{I}_x)_1 = \frac{1}{12}m_1(3R^2 + h^2) = \frac{1}{12}\frac{50}{32.2}\left[3\left(\frac{2}{12}\right)^2 + \left(\frac{10}{12}\right)^2\right]$$
$$= 0.1006 \text{ slug} \cdot \text{pie}^2$$

Al utilizar el teorema de los ejes paralelos, el momento de inercia del cilindro respecto al eje x queda

$$(I_x)_1 = (\bar{I}_x)_1 + m_1 d_1^2$$
$$= 0.1006 + \frac{50}{32.2}\left(\frac{8}{12}\right)^2 = 0.7908 \text{ slug} \cdot \text{pie}^2$$

Varilla delgada Ya que G_2 coincide con el origen de los ejes xyz, el momento de inercia de la varilla respecto al eje x se obtiene directamente de la tabla 17.1.

$$(I_x)_2 = (\bar{I}_x)_2 = \frac{1}{12}mL^2$$
$$= \frac{1}{12}\frac{10}{32.2}\left(\frac{12}{12}\right)^2 = 0.0259 \text{ slug} \cdot \text{pie}^2$$

Esfera De acuerdo con la tabla 17.1, el momento de inercia de la esfera respecto a su propio eje central x es

$$(\bar{I}_x)_3 = \frac{2}{5}mR^2 = \frac{2}{5}\frac{20}{32.2}\left(\frac{3}{12}\right)^2 = 0.0155 \text{ slug} \cdot \text{pie}^2$$

Al usar el teorema de los ejes paralelos, el momento de inercia respecto al eje x está dado por

$$(I_x)_3 = (\bar{I}_x)_3 + m_3 d_3^2$$
$$= 0.0155 + \frac{20}{32.2}\left(\frac{9}{12}\right)^2 = 0.3649 \text{ slug} \cdot \text{pie}^2$$

Montaje El momento de inercia del montaje respecto a un eje es igual a la suma de los momentos de inercia de sus partes respecto a dicho eje. Por tanto, al sumar los valores que se encontraron, se obtiene

$$I_x = (I_x)_1 + (I_x)_2 + (I_x)_3$$
$$= 0.7908 + 0.0259 + 0.3649$$
$$= 1.1816 \text{ slug} \cdot \text{pie}^2 \qquad \textit{Respuesta}$$

Parte 2

De acuerdo con la figura (b), la coordenada y de G es

$$\bar{y} = \frac{\Sigma_i m_i y_i}{\Sigma_i m_i} = \frac{\Sigma_i W_i \bar{y}_i}{\Sigma_i W_i} = \frac{50(8) + 10(0) - 20(9)}{50 + 20 + 10}$$
$$= \frac{220}{80} = 2.750 \text{ pulg}$$

Como $\bar{y}$ es la distancia entre el eje x y el eje x central del montaje, el momento de inercia del montaje respecto al último eje se encuentra con el teorema de los ejes paralelos:

$$\bar{I}_x = I_x - m\bar{y}^2 = 1.1816 - \frac{80}{32.2}\left(\frac{2.750}{12}\right)^2$$
$$= 1.051 \text{ slug} \cdot \text{pie}^2 \qquad \textit{Respuesta}$$

El correspondiente radio de giro es

$$\bar{k}_x = \sqrt{\frac{\bar{I}_x}{m}} = \sqrt{\frac{1.051}{80/32.2}} = 0.650 \text{ pies} \qquad \textit{Respuesta}$$

Método alternativo para calcular $\bar{I}_x$

En la solución anterior, primero se calculó I_x para el montaje sumando los valores de I_x para cada parte. Entonces $\bar{I}_x$ para el montaje se encontró al aplicar el teorema de los ejes paralelos. Un método alternativo para determinar $\bar{I}_x$ para el montaje consiste en calcular primero los momentos de inercia para cada parte respecto al eje x central del montaje y luego sumar esos valores. Con este método, se obtiene

$$\bar{I}_x = \left[(\bar{I}_x)_1 + m_1(d_1 - \bar{y})^2\right] + \left[(\bar{I}_x)_2 + m_2\bar{y}^2\right] + \left[(\bar{I}_x)_3 + m(d_3 + \bar{y})^2\right]$$

En esta ecuación, observe que $\bar{I}_x$ es el momento de inercia para el montaje completo respecto a su eje x central (el que pasa por G), mientras que $(\bar{I}_x)_1$, $(\bar{I}_x)_2$ e $(\bar{I}_x)_3$ son los

momentos de inercia de las partes respecto a sus propios ejes centrales. Las distancias entre G y el centro de masa de cada parte, a saber $(d_1 - \bar{y})$, $\bar{y}$ y $(d_3 + \bar{y})$, se encuentran en la figura (b). Al sustituir los valores numéricos se obtiene

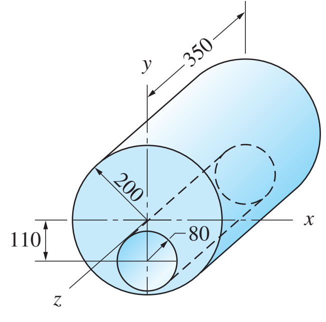
$$I_x = \left[0.1006 + \frac{50}{32.2}\left(\frac{8 - 2.750}{12}\right)^2\right] + \left[0.0259 + \frac{10}{32.2}\left(\frac{2.750}{12}\right)^2\right] + \left[0.0155 + \frac{20}{32.2}\left(\frac{9 + 2.750}{12}\right)^2\right]$$

$$= 0.3978 + 0.0422 + 0.6110 = 1.051 \text{ slug} \cdot \text{pie}^2$$ *Respuesta*

que concuerda con el resultado que se encontró antes.

Problema de ejemplo 17.2

La figura (a) muestra una parte de una máquina de 290 kg, que se fabricó haciendo un hueco excéntrico de 160 mm de diámetro, en un cilindro homogéneo de 400 mm de diámetro y 350 mm de longitud. Determine: 1. I_z (el momento de inercia de masa de la parte respecto al eje z) y 2. $\bar{k}_z$ (el radio de giro de la parte, respecto a su eje z central).



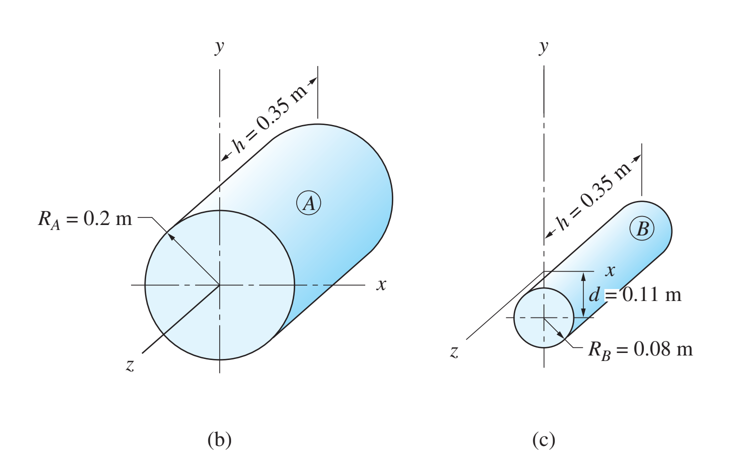
Dimensiones en mm

(a)

Solución

En la figura (a), la parte de la máquina puede considerarse como la diferencia entre los cilindros homogéneos A y B que se muestran en las figuras (b) y (c), respectivamente. La densidad de masa ρ de dicha parte es

$$\rho = \frac{m}{\pi(R_A^2 - R_B^2)h} = \frac{290}{\pi(0.20^2 - 0.08^2)(0.35)} = 7849 \text{ kg/m}^3$$



(b) (c)

En consecuencia, las masas de los cilindros A y B son

$$m_A = \rho\pi R_A^2 h = (7849)\pi(0.20)^2(0.35) = 345.2 \text{ kg}$$
$$m_B = \rho\pi R_B^2 h = (7849)\pi(0.08)^2(0.35) = 55.2 \text{ kg}$$

Como una comprobación de los cálculos, observe que $m_A - m_B = m$, como se esperaba.

Parte 1

De la tabla 17.1, el momento de inercia del cilindro A respecto al eje z, que coincide con su eje z central, es

$$(I_z)_A = (\bar{I}_z)_A = \frac{1}{2}m_A R_A^2 = \frac{1}{2}(345.2)(0.20)^2 = 6.904 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

El momento de inercia del cilindro B respecto a su eje central z es

$$(\bar{I}_z)_B = \frac{1}{2}m_B R_B^2 = \frac{1}{2}(55.2)(0.080)^2 = 0.177 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

Debido a que la distancia entre el eje z y el eje z central de B es $d = 0.11$ m, el momento de inercia de B respecto al eje z se obtiene con el teorema de los ejes paralelos:

$$(I_z)_B = (\bar{I}_z)_B + m_B d^2 = 0.177 + (55.2)(0.11)^2 = 0.845 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

Por tanto, el momento de inercia de la parte de la máquina respecto al eje z es

$$I_z = (I_z)_A - (I_z)_B = 6.904 - 0.845 = 6.059 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$ *Respuesta*

Parte 2

Por simetría, las coordenadas x y z del centro de masa de la parte de la máquina son $\bar{x} = 0$ y $\bar{z} = -0.175$ m. La coordenada y está dada por

$$\bar{y} = \frac{m_A\bar{y}_A - m_B\bar{y}_B}{m} = \frac{345.2(0) - 55.2(-0.11)}{290} = 0.020\,94 \text{ m}$$

Ahora, el momento de inercia de la parte de la máquina respecto a su eje z central puede calcularse con el teorema de los ejes paralelos:

$$\bar{I}_z = I_z - m\bar{y}^2 = 6.059 - 290(0.020\,94)^2 = 5.932 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

El radio de giro correspondiente es

$$\bar{k}_z = \sqrt{\frac{\bar{I}_z}{m}} = \sqrt{\frac{5.932}{290}} = 0.1430 \text{ m}$$ *Respuesta*

Problemas

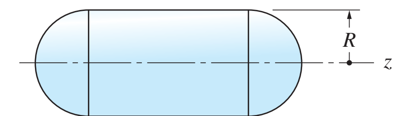


Fig. P17.1

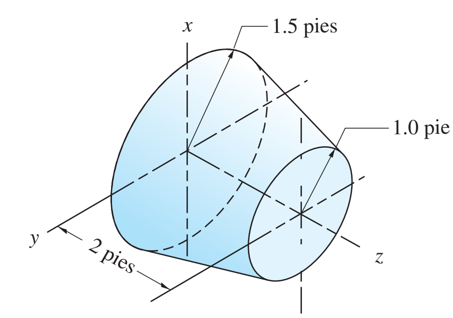


Fig. P17.2

17.1 El cuerpo homogéneo de masa total *m* consiste en un cilindro con extremos hemisféricos. Calcule el momento de inercia del cuerpo respecto al eje *z* en términos de *R* y *m*.

17.2 Determine el momento de inercia del cono truncado respecto al eje *z*. El cono es de madera y pesa 30 lb/pie^3.

17.3 Se perfora un hueco de radio R_2 en el centro del cilindro de radio R_1 y longitud *h*. Demuestre que el momento de inercia de masa del cuerpo resultante respecto al eje *z* es $I_z = m(R_1^2+R_2^2)/2$, en donde *m* es la masa del cuerpo.

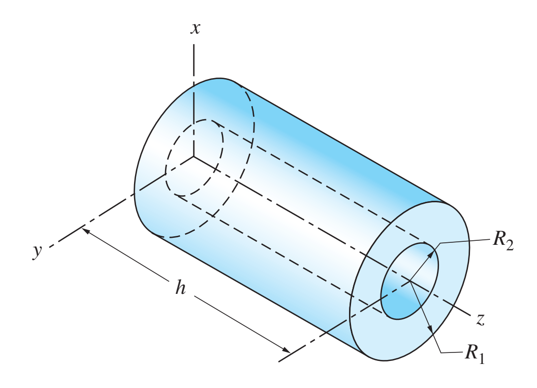


Fig. P17.3

17.4 En la figura se muestran las propiedades inerciales de un cohete de tres etapas. Observe que $\bar{k}_i$ es el radio de giro para la *i*-ésima etapa respecto al eje que es paralelo al eje *x* y que pasa por el centro de gravedad G_i de la etapa. Encuentre $\bar{z}$ e $\bar{I}_x$ del cohete.

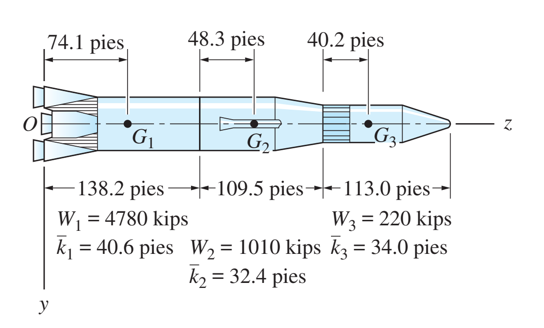


Fig. P17.4

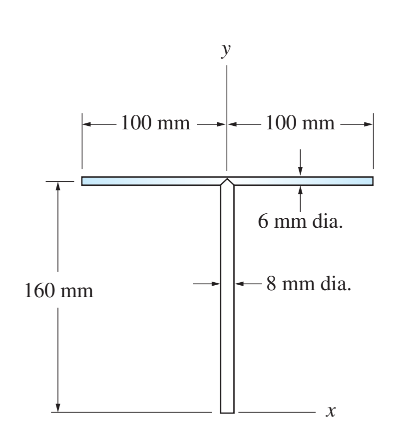


Fig. P17.5

17.5 Dos varillas de acero de diferentes diámetros están soldadas como se muestra. Localice el centro de masa del montaje y calcule $\bar{I}_z$. Para el acero, ρ = 7850 kg/m^3.

17.6 El triángulo equilátero está formado por la conexión de tres varillas delgadas idénticas. Si la masa total del triángulo es m, calcule su momento de inercia de masa respecto al eje z.

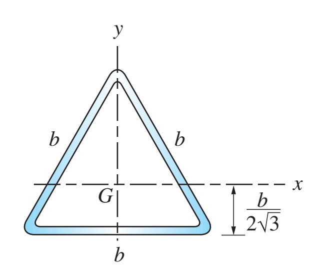


Fig. P17.6

17.7 Tres placas delgadas, cada una de espesor t, están soldadas como se muestra. Si se sabe que la masa total del montaje es m, calcule su momento de inercia de masa respecto al eje z. Suponga que $t \ll b$.



17.8 Calcule I_x e I_z para la parte de la máquina de aluminio colado. La densidad de masa del aluminio es de 2650 kg/m^3.

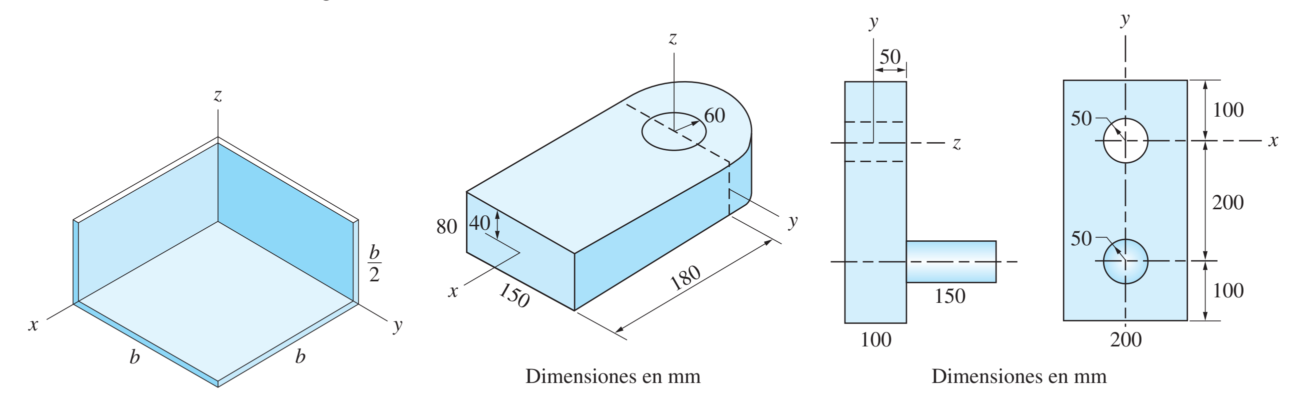


Fig. P17.7 **Fig. P17.8** **Fig. P17.9**

17.9 Un elemento de la máquina está hecho de acero con una densidad ρ = 7850 kg/m^3. Calcule I_z, el momento de inercia de masa del elemento respecto al eje z.

17.10 Calcule I_z e $\bar{I}_z$ para la varilla delgada doblada que pesa 0.6 lb.

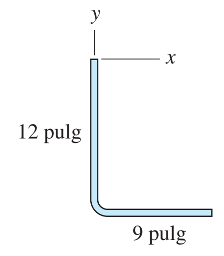


Fig. P17.10

17.11 Un cuerpo sólido consiste en un cilindro de acero y un cono de cobre. La densidad de masa del cobre es de 1.10 veces la densidad de masa del acero. Localice el centro de masa del cuerpo y determine $\bar{k}_x$.

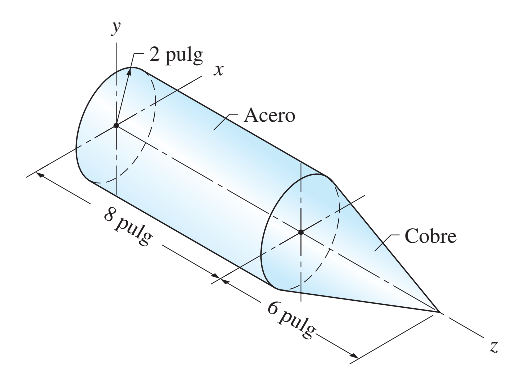


Fig. P17.11

17.12 Con referencia a la tabla 17.1, $\bar{I}_x$ para un cilindro puede aproximarse con $\bar{I}_x$ para una varilla delgada si el radio R del cilindro es suficientemente pequeño comparado con su longitud h. Determine la mayor razón R/h para la que el error relativo de esta aproximación no exceda 3 por ciento.

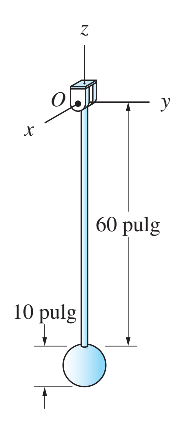


Fig. P17.13

17.13 a) Calcule I_x para el péndulo, que consiste en una esfera de 130 lb unida a una varilla delgada de 25 lb. b) Determine el error relativo en I_x si se desprecia la masa de la varilla y la esfera se aproxima como una partícula.

17.14 Se sabe que los momentos de inercia de la hélice de 120 kg del helicóptero respecto a los ejes verticales que pasan por O y C tienen los valores experimentales de 408.5 kg · m² y 145.5 kg · m², respectivamente. Determine la ubicación del centro de masa G y el momento de inercia respecto al eje vertical que pasa por G.

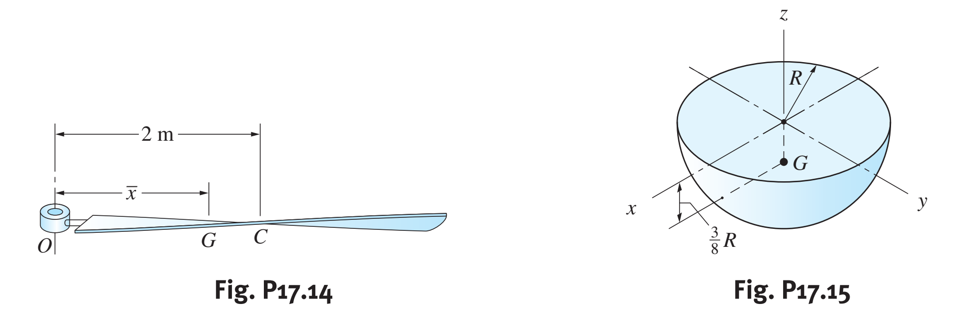


Fig. P17.14

Fig. P17.15

17.15 Utilizando las propiedades de una esfera en la tabla 17.1, deduzca la expresión para $\bar{I}_x$ del hemisferio homogéneo de masa m.

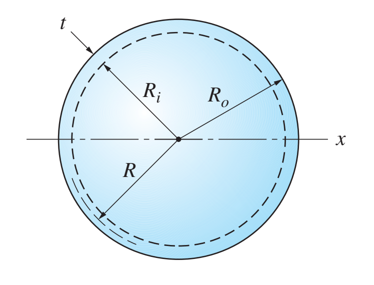


Fig. P17.16

***17.16** Si el espesor t de la pared de la esfera hueca de masa m es suficientemente pequeña, su momento de inercia puede ser aproximado por $I_x = (2/3)mR^2$. Deduzca este resultado usando las propiedades de una esfera sólida en la tabla 17.1. (*Sugerencia:* para $t \ll R$, la serie binomial proporciona la siguiente aproximación $R_0^n - R_i^n \approx nR^{n-1}t$.)

17.3 Cantidad de movimiento angular de un cuerpo rígido

La cantidad de movimiento angular de un cuerpo desempeña un papel importante en las ecuaciones de movimiento que se presentarán en el próximo apartado. Aquí se deduce la cantidad de movimiento angular para el movimiento tridimensional y después los resultados se enfocan en el movimiento en un plano.

El punto de partida de esta deducción es la cantidad de movimiento angular de una partícula de masa m respecto a un punto A, que se definió en el apartado 14.7 como el momento de su cantidad de movimiento lineal respecto a ese punto:

$$\mathbf{h}_A = \mathbf{r} \times (m\mathbf{v}) \qquad \text{(14.45 repetida)}$$

donde $\mathbf{v}$ es la velocidad de la partícula y $\mathbf{r}$ representa su vector de posición relativo a A. Al observar al cuerpo como un conjunto con un número infinito de partículas (elementos diferenciales), es posible calcular su cantidad de movimiento angular al sumar (integrar) las cantidades de movimiento angular de los elementos.

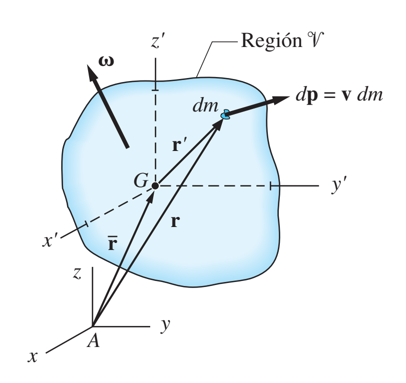


Fig. P17.4

a. Movimiento general

Cantidad de movimiento angular respecto al centro de masa Considere un cuerpo rígido de masa m que ocupa la región $\mathcal{V}$, como se muestra en la figura 17.4. El sistema de coordenadas $x'y'z'$ tiene su origen en el centro de masa G del cuerpo. La

cantidad de movimiento lineal de un elemento diferencial típico de masa *dm* que se mueve con velocidad **v** es $d\mathbf{p} = \mathbf{v}\,dm$, como se indica en la figura. La cantidad de movimiento angular de este elemento respecto a *G* es

$$d\mathbf{h}_G = \mathbf{r}' \times (\mathbf{v}\,dm) \qquad \text{(a)}$$

donde $\mathbf{r}' = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k}$ es el vector de posición del elemento relativo a *G*. Como *dm* y *G* están en el mismo cuerpo rígido, sus velocidades están relacionadas por

$$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \qquad \text{(b)}$$

donde $\bar{\mathbf{v}}$ es la velocidad de *G* y $\boldsymbol{\omega}$ es la velocidad angular del cuerpo. Al sustituir la ecuación (b) en la ecuación (a), se obtiene

$$d\mathbf{h}_G = \mathbf{r}' \times (\bar{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')\,dm$$

Por tanto, la cantidad de movimiento angular del cuerpo es

$$\mathbf{h}_G = \int_{\mathcal{V}} d\mathbf{h}_G = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r}' \times (\bar{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')\,dm$$

Al observar que $\int_{\mathcal{V}} \mathbf{r}' \times \bar{\mathbf{v}}\,dm = (\int_{\mathcal{V}} \mathbf{r}'\,dm) \times \bar{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$ (de acuerdo con la definición de centro de masa), la cantidad de movimiento angular del cuerpo respecto a *G* queda

$$\mathbf{h}_G = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r}' \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')dm \qquad \text{(17.4)}$$

Cantidad de movimiento angular respecto a un punto arbitrario La cantidad de movimiento angular del cuerpo respecto a un punto arbitrario *A* es

$$\mathbf{h}_A = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r} \times (\mathbf{v}\,dm) \qquad \text{(c)}$$

donde **r** es el vector de posición del elemento que se mide desde *A*, como se muestra en la figura 17.4. Sea $\bar{\mathbf{r}}$ el vector de posición de *G* relativo a *A*, es posible escribir $\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \bar{\mathbf{r}}$, que al sustituir en la ecuación (c) resulta

$$\mathbf{h}_A = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r}' \times (\mathbf{v}\,dm) + \bar{\mathbf{r}} \times \int_{\mathcal{V}} \mathbf{v}\,dm$$

Reconociendo que la primera integral es $\mathbf{h}_G$ y sustituyendo la ecuación (b) en la segunda integral, resulta

$$\mathbf{h}_A = \mathbf{h}_G + \bar{\mathbf{r}} \times \int_{\mathcal{V}} (\bar{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')\,dm = \mathbf{h}_G + \bar{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{v}} \int_{\mathcal{V}} dm + \bar{\mathbf{r}} \times \left(\boldsymbol{\omega} \times \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r}'dm\right)$$

Ya que $\int_{\mathcal{V}} dm = m$ y $\int_{\mathcal{V}} r'dm = 0$,

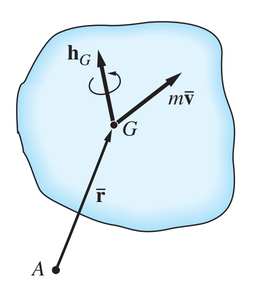


Fig. 17.5

entonces

$$\mathbf{h}_A = \mathbf{h}_G + \bar{\mathbf{r}} \times (m\bar{\mathbf{v}}) \tag{17.5}$$

En la figura 17.5 se muestra una interpretación física de la ecuación (17.5). La figura, llamada *diagrama de cantidad de movimiento*, es un esquema del cuerpo que muestra: 1. el vector de cantidad de movimiento lineal $m\bar{\mathbf{v}}$ del cuerpo que actúa en el centro de masa G, y 2. la cantidad de movimiento angular $\mathbf{h}_G$ del cuerpo respecto a G, representada como un par. De acuerdo con la ecuación (17.5), la cantidad de movimiento angular del cuerpo respecto de A es el vector de suma de $\mathbf{h}_G$ y el momento de $m\bar{\mathbf{v}}$ respecto de A (esta operación es análoga al cálculo del momento resultante de sistema de un par de fuerzas respecto a un punto).

b. Movimiento en un plano

Cantidad de movimiento angular respecto al centro de masa Si el plano del movimiento es paralelo al plano xy, entonces $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k}$. A esto sigue que $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' = \omega\mathbf{k} \times (x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k}) = \omega(-y'\mathbf{i} + x'\mathbf{j})$ y

$$\mathbf{r}' \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') = \omega \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x' & y' & z' \\ -y' & x' & 0 \end{vmatrix} = \omega\left[-x'z'\mathbf{i} - y'z'\mathbf{j} + (x'^2 + y'^2)\mathbf{k}\right]$$

En consecuencia, la cantidad de movimiento angular respecto a G en la ecuación (17.4) queda

$$\mathbf{h}_G = \omega\left[-\mathbf{i}\int_{\mathcal{V}} x'z'dm - \mathbf{j}\int_{\mathcal{V}} y'z'dm + \mathbf{k}\int_{\mathcal{V}} \left(x'^2 + y'^2\right) dm\right]$$

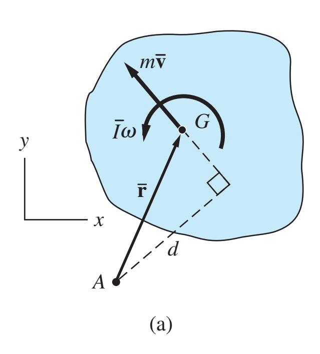
Las primeras dos integrales, llamadas *productos de inercia*, se analizan en el capítulo 19. En este capítulo se supone que el cuerpo es *simétrico* respecto al plano $x'y'$, en cuyo caso se eliminan los productos de inercia.* Esta conclusión resulta al observar que para cada elemento localizado en (x', y', z') existe uno correspondiente en $(x', y', -z')$ de manera que su contribución combinada a cada una de las primeras dos integrales es cero. La última integral es, de acuerdo con la ecuación (17.1), el momento de inercia del cuerpo respecto al eje z', que se denota con $\bar{I}$. Por tanto, la cantidad de movimiento angular de un cuerpo simétrico respecto a su centro de masa se reduce a $\mathbf{h}_G = \bar{I}\omega\mathbf{k}$, o

$$h_G = \bar{I}\omega \tag{17.6}$$

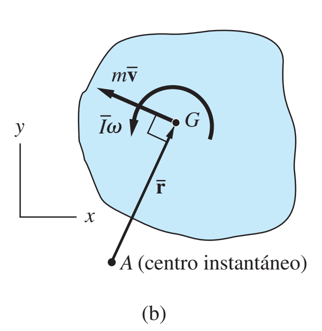
Cantidad de movimiento angular respecto a un punto arbitrario En la figura 17.6(a) se muestra el diagrama de cantidad de movimiento para el movimiento en un plano. La figura representa la sección transversal del cuerpo que contiene al centro de masa G y es paralela al plano del movimiento. Suponiendo que el punto A está sobre la misma sección transversal, el momento resultante de las cantidades de movimiento respecto a A es

$$h_A = \bar{I}\omega + m\bar{v}d \quad (A\text{: punto arbitrario}) \tag{17.7}$$

donde d es el "brazo de momento" de la cantidad de movimiento lineal respecto de A, como se indica en la figura.



(a)



(b)

Fig. 17.6

* Esta suposición es muy restrictiva. Como se explica en el capítulo 19, los productos de inercia también se eliminan cuando el eje z' es el principal eje de inercia del cuerpo.

Cantidad de movimiento angular respecto al centro instantáneo Si el punto A es el centro instantáneo para las velocidades (esto incluye el caso en que el cuerpo gira respecto a un punto fijo A), el diagrama de cantidad de movimiento toma la forma que se muestra en la figura 17.6(b). Observe que ahora $\bar{v} = \bar{r}\omega$ y $m\bar{\mathbf{v}}$ es perpendicular a $\bar{\mathbf{r}}$. El momento resultante de las cantidades de movimiento respecto de A es $h_A = \bar{I}\omega + m\bar{r}^2\omega$. Reconociendo que $\bar{I} + m\bar{r}^2 = \bar{I}_A$ por el teorema de los ejes paralelos, la cantidad de movimiento angular respecto de A puede escribirse como

$$h_A = I_A\omega \quad (A\text{: centro instantáneo}) \tag{17.8}$$

17.4 Ecuaciones de movimiento

a. Comentarios introductorios

En este apartado se investigan las ecuaciones de movimiento para un cuerpo rígido, como el que se muestra en la figura 17.7. El cuerpo se considera como un conjunto de partículas y se supone que las fuerzas internas entre éstas ocurren en pares colineales, iguales y opuestos. Por implicación, las ecuaciones de movimiento para un sistema de partículas que se dedujeron en el capítulo 15, a saber

$$\Sigma\mathbf{F} = m\bar{\mathbf{a}} \qquad (15.19\text{, repetida})$$

$$\Sigma\mathbf{M}_A = \dot{\mathbf{h}}_A + \mathbf{v}_A \times (m\bar{\mathbf{v}}) \qquad (15.34\text{, repetida})$$

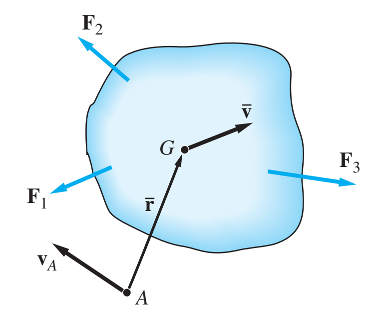


Fig. 17.7

también son aplicables a un cuerpo rígido.* En esas ecuaciones, m es la masa del cuerpo, $\Sigma\mathbf{F}$ es la fuerza externa resultante que actúa sobre el cuerpo y $\Sigma\mathbf{M}_A$ representa el momento resultante de las fuerzas externas respecto al punto A.

Como se indica en la figura 17.7, el punto de referencia A no es necesariamente fijo o uno que se encuentra en el cuerpo. Por tanto, hay que ser cuidadosos para no confundir las velocidades y aceleraciones absolutas (que se relacionan con el marco de referencia inercial) con las velocidades y aceleraciones relativas a A. Por ejemplo, $\bar{\mathbf{v}}$ denota la velocidad absoluta del centro de masa G, mientras que $\bar{\mathbf{r}}$ es el vector de posición de G relativo a A. En consecuencia, $d\bar{\mathbf{r}}/dt = \mathbf{v}_{G/A} = \bar{\mathbf{v}} - \mathbf{v}_A$.

b. Movimiento general

La primera ecuación de movimiento, la (15.19),

$$\Sigma\mathbf{F} = m\bar{\mathbf{a}} \tag{17.9}$$

que relaciona las fuerzas externas con la aceleración $\bar{\mathbf{a}}$ del centro de masa, puede emplearse sin modificación para un cuerpo rígido. Sin embargo, la segunda ecuación de movimiento, la (15.34), puede ser más útil para un cuerpo rígido si se incorporan los resultados del apartado anterior.

*No obstante que el modelo de partículas no es enteramente exacto para un cuerpo rígido, conduce a las ecuaciones de movimiento correctas. Una deducción más rigurosa basada en el concepto de esfuerzo está más allá del alcance de este libro. Desde el punto de vista histórico, las ecuaciones de movimiento para un cuerpo rígido no se dedujeron a partir de la mecánica de partículas, sino que fueron postuladas por completo. Quizá la inspiración provino del análisis de un sistema de partículas.

Se encontró que la cantidad de movimiento angular de un cuerpo rígido respecto a un punto arbitrario A es

$$\mathbf{h}_A = \mathbf{h}_G + \bar{\mathbf{r}} \times (m\bar{\mathbf{v}}) \qquad \text{(17.5, repetida)}$$

donde $\mathbf{h}_G$ es la cantidad de movimiento angular relativa al centro de masa G. Al derivar respecto al tiempo, se obtiene

$$\dot{\mathbf{h}}_A = \dot{\mathbf{h}}_G + \frac{d\bar{\mathbf{r}}}{dt} \times (m\bar{\mathbf{v}}) + \bar{\mathbf{r}} \times (m\bar{\mathbf{a}}) \qquad \text{(a)}$$

Con la sustitución $d\bar{\mathbf{r}}/dt = \bar{\mathbf{v}} - \mathbf{v}_A$ el segundo término del lado derecho de la ecuación (a) queda

$$\frac{d\bar{\mathbf{r}}}{dt} \times (m\bar{\mathbf{v}}) = (\bar{\mathbf{v}} - \mathbf{v}_A) \times (m\bar{\mathbf{v}}) = -\mathbf{v}_A \times (m\bar{\mathbf{v}})$$

Por tanto, la ecuación (a) se reduce a

$$\dot{\mathbf{h}}_A = \dot{\mathbf{h}}_G - \mathbf{v}_A \times (m\bar{\mathbf{v}}) + \bar{\mathbf{r}} \times (m\bar{\mathbf{a}}) \qquad \text{(b)}$$

que con la sustitución en la ecuación (15.34) conduce a la segunda ecuación de movimiento

$$\Sigma\mathbf{M}_A = \dot{\mathbf{h}}_G + \bar{\mathbf{r}} \times (m\bar{\mathbf{a}}) \qquad \text{(17.10)}$$

En la figura 17.8 se muestra la interpretación física de las ecuaciones de movimiento, las (17.9) y (17.10). El diagrama de cuerpo libre (DCL) representa las fuerzas externas $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots$ que actúan sobre el cuerpo. El diagrama de masa-aceleración (DMA) indica el *vector de inercia* $m\bar{\mathbf{a}}$ que actúa en el centro de masa G y el *par de inercia* $\dot{\mathbf{h}}_G$. El signo de igual entre los diagramas implica que los sistemas de fuerzas en el DCL y el DMA son *equivalentes*, es decir, ambos tienen la misma fuerza y el mismo momento resultantes respecto a cualquier punto. Es sencillo comprobar que las dos condiciones de equivalencia $(\Sigma\mathbf{F})_{\text{DCL}} = (\Sigma\mathbf{F})_{\text{DMA}}$ y $(\Sigma\mathbf{M}_A)_{\text{DCL}} = (\Sigma\mathbf{M}_A)_{\text{DMA}}$ reproducen las dos ecuaciones de movimiento.

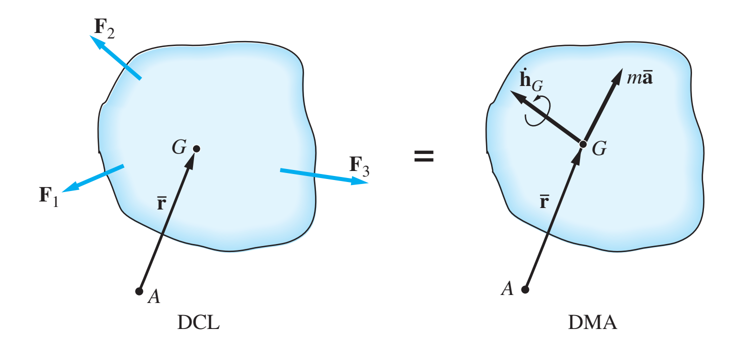


Fig. 17.8

c. *Movimiento en un plano*

La figura 17.9 muestra el DCL y el DMA para un cuerpo con movimiento en un plano sobre el plano xy. Los diagramas en efecto representan la sección transversal del cuerpo que es paralela al plano del movimiento y que contiene el centro de masa

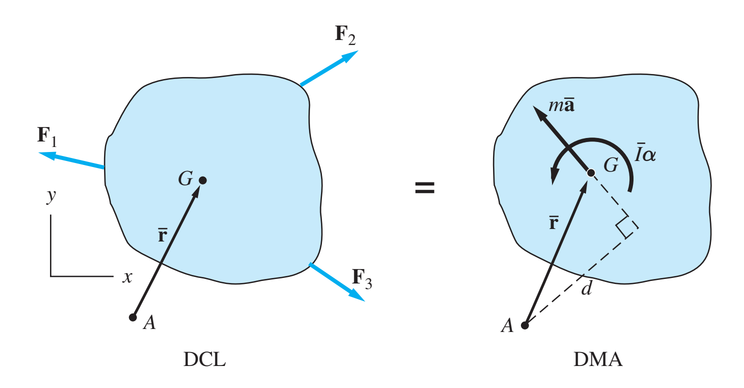


Fig. 17.9

G del cuerpo. Para obtener una formulación bidimensional del movimiento en un plano, se supone que todas las fuerzas externas $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, . . . están en el plano de la sección transversal y que ésta es un plano de simetría del cuerpo.

En el movimiento en un plano, la cantidad de movimiento angular del cuerpo respecto a G está dada por la ecuación (17.6) como $h_G = \bar{I}\omega$, donde ω es la velocidad angular del cuerpo, e $\bar{I}$ es el momento de inercia respecto a G. Así que el par de inercia que se muestra en el DMA es $\dot{h}_G = \bar{I}\alpha$, en donde $\alpha = \dot{\omega}$ es la aceleración angular del cuerpo. De la equivalencia de los sistemas de fuerzas en los dos diagramas de la figura 17.9, se obtienen las ecuaciones de movimiento

$$\Sigma \mathbf{F} = m\bar{\mathbf{a}} \tag{17.11}$$

$$\Sigma M_A = \bar{I}\alpha + m\bar{a}d \tag{17.12}$$

donde d es el brazo de momento del vector de inercia que se muestra en la figura.

Ecuación del momento respecto al centro de masa Si A coincide con el centro de masa, entonces $d = 0$ y la ecuación (17.12) queda

$$\Sigma M_G = \bar{I}\alpha \tag{17.13}$$

Ecuación de momento para la rotación respecto a un punto fijo Si el cuerpo rota respecto a un punto fijo A (es decir, A está fijo en el cuerpo y también en el marco de referencia inercial), entonces es posible usar la ecuación (17.8): $h_A = I_A\omega$. Al derivar respecto al tiempo (observe que I_A es constante porque A está fijo en el cuerpo), se obtiene que $\dot{h}_A = I_A\alpha$. Por tanto, para la rotación respecto a un punto fijo la ecuación (15.34) toma la forma

$$\Sigma M_A = I_A\alpha \quad (A\text{: fijo en el cuerpo y en el espacio}) \tag{17.14}$$

17.5 Método de fuerza-masa-aceleración: movimiento en un plano

a. Movimiento general en un plano

El *método de fuerza-masa-aceleración* (FMA) del análisis cinético se basa en las ecuaciones de movimiento para un cuerpo rígido que se dedujeron en el apartado

anterior. En éste, el análisis se limitará al movimiento en un plano; en el capítulo 19 se presentarán los problemas tridimensionales.

Existen tres ecuaciones escalares independientes para el movimiento en un plano. Un ejemplo de un conjunto independiente de ecuaciones es $\Sigma F_x = m\bar{a}_x$, $\Sigma F_y = m\bar{a}_y$ y la ecuación del momento $\Sigma M_A = \bar{I}\alpha + m\bar{a}d$. Sin embargo, como las elecciones de las direcciones de las coordenadas y el centro del momento son arbitrarias, el número disponible de ecuaciones de movimiento (pero no necesariamente independientes) es infinito. Las restricciones en las ecuaciones que garantizan su independencia son idénticas a las que se usan en estática para el equilibrio coplanar. Por ejemplo, si se utilizan tres ecuaciones de momento, entonces los centros de éste no deben ser colineales.

En general es conveniente obtener las ecuaciones de movimiento del DCL y del DMA. En esencia, el procedimiento coincide con el que se utilizó para las partículas en el apartado 12.3:

Paso 1: Dibuje el DCL del cuerpo que muestra todas las fuerzas externas y pares.

Paso 2: Si existen restricciones cinemáticas impuestas sobre el movimiento, utilice la cinemática para determinar la relación entre $\bar{\mathbf{a}}$, ω y α.

Paso 3 Dibuje un DMA del cuerpo que indique el vector de inercia $m\bar{\mathbf{a}}$ que actúa en el centro de masa y el par de inercia $\bar{I}\alpha$, con los resultados del paso 2.

Paso 4: Deduzca tres ecuaciones de movimiento independientes de la equivalencia del DCL y el DMA.

Si las incógnitas que se presentan en el DCL y el DMA son tres, entonces es posible determinarlas al resolver las ecuaciones de movimiento. Sin embargo, en algunos problemas se debe obtener información adicional a partir de la historia del movimiento. Por ejemplo, si ω aparece en el DMA, quizá sea necesario obtener su valor en el instante de interés por medio de la integración: $\omega = \int \alpha dt$.

Una ventaja de la técnica DCL-DMA es que el DCL representa las fuerzas desconocidas y el DMA las aceleraciones desconocidas. En consecuencia, hay menos probabilidades de intentar deducir y resolver las ecuaciones de movimiento antes de que las variables incógnitas se hayan identificado correctamente.

b. Traslación

La figura 17.10 muestra el DMA para un cuerpo rígido que se traslada. Ya que $\alpha = 0$, el DMA se reduce sólo al vector de inercia que pasa por G. En este diagrama se observa que el momento resultante es cero respecto a cualquier punto que esté sobre la misma recta que el vector de inercia. Para cualquier otro punto, el momento resultante es igual al momento del vector de inercia.

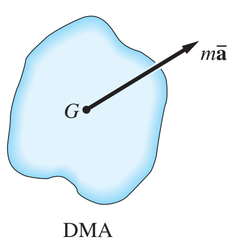


Fig. 17.10

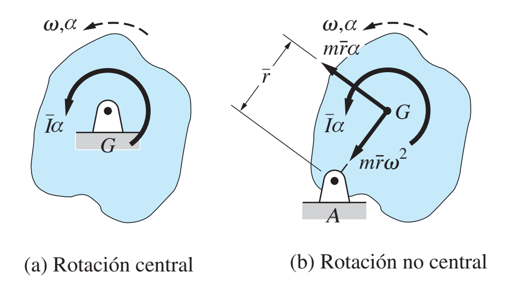
c. Rotación respecto a un eje fijo

Se distinguen dos tipos de rotación respecto a un eje fijo: rotación central y no central.*

En la *rotación central*, el eje fijo pasa por el centro de masa G. Ya que $\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{0}$, el DMA se reduce al par de inercia, como muestra la figura 17.11(a). En este caso, el vector de inercia es cero y el momento resultante respecto a cada punto es igual a $\bar{I}\alpha$.

En la *rotación no central*, el eje de rotación pasa por un punto fijo A que no es el centro de masa. Para este caso, el DMA se muestra en la figura 17.11(b), en donde las componentes de $\bar{\mathbf{a}}$ se han determinado a partir del hecho de que la trayectoria de G es un círculo centrado en A. Ya que A es un punto fijo, entonces podría utilizarse el caso especial de la ecuación de momento $\Sigma M_A = I_A\alpha$. Sin embargo, la misma ecuación se obtiene al igualar los momentos resultantes respecto de A para el DCL y el DMA:

$$\circlearrowleft{+} \quad \Sigma M_A = \bar{I}\alpha + (m\bar{r}\alpha)\bar{r} = (\bar{I} + m\bar{r}^2)\alpha = I_A\alpha$$



(a) Rotación central (b) Rotación no central

Fig. 17.11

d. Sistemas de cuerpos rígidos conectados

Cuando se analiza el movimiento de un sistema de cuerpos rígidos conectados, es posible dibujar un DCL y un DMA para cada cuerpo componente, porque cada uno debe satisfacer por separado el conjunto de las tres ecuaciones de movimiento. Por tanto, un sistema que contiene N cuerpos rígidos debe satisfacer $3N$ ecuaciones de movimiento independientes.

Con frecuencia es conveniente emplear el DCL y el DMA del montaje, porque entonces las fuerzas internas no aparecen en el DCL. Por esta razón, éste y el DMA para todo el sistema son una buena elección para iniciar el análisis.

Para los sistemas de cuerpos conectados, las restricciones cinemáticas requieren que se ponga especial atención al DMA. La figura 17.12 muestra el DMA para un sistema que consiste en una barra delgada AB que está anclada en B a un disco C (el

*Algunas veces los tipos de rotación se identifican como rotación *centroidal* y *no centroidal*. Aquí se evitó usar el término “centroide” para eliminar la confusión que con frecuencia existe entre centroides, que son propiedades de formas geométricas y centros de masa, asociadas con la masa.

DMA para el sistema es la superposición de los DMA para los respectivos cuerpos). En esta figura las propiedades (masas, aceleraciones, momentos de inercia y centros de masa) de la barra y el disco son identificadas por los subíndices 1 y 2, respectivamente. Observe que α_1 no necesariamente es igual a α_2 debido al perno en B. Sin embargo, $\bar{\mathbf{a}}_1$, $\bar{\mathbf{a}}_2$, α_1 y α_2 están relacionadas desde el punto de vista cinemático por la ecuación de restricción $\bar{\mathbf{a}}_B = \bar{\mathbf{a}}_1 + \mathbf{a}_{B/G_1} = \bar{\mathbf{a}}_2 + \mathbf{a}_{B/G_2}$ que expresa que B es un punto en ambos cuerpos.

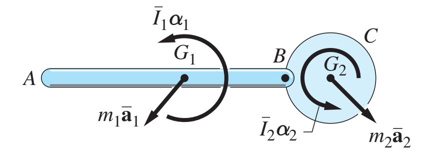


Fig. 17.12

La figura 17.13(a) muestra el DMA cuando la barra y el disco están conectados de manera rígida en B. En este caso, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$. Aún más, $\bar{\mathbf{a}}_1$ y $\bar{\mathbf{a}}_2$ están relacionados por $\bar{\mathbf{a}}_2 = \bar{\mathbf{a}}_1 + \mathbf{a}_{G_2/G_1}$ porque G_1 y G_2 están sobre el mismo cuerpo rígido.

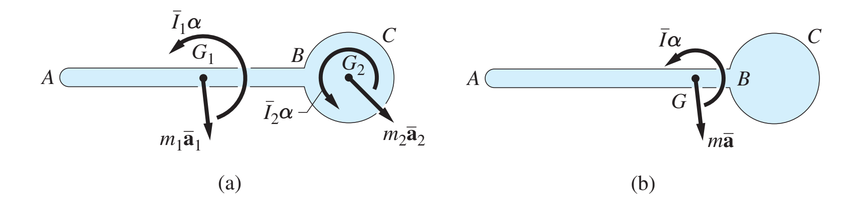
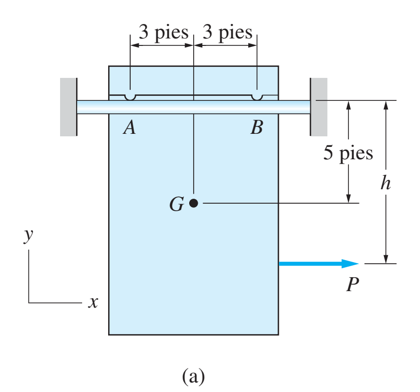


Fig. 17.13

La figura 17.13(b) representa una forma alternativa del DMA para el cuerpo rígido de la figura 17.13(a). Aquí, $m\bar{\mathbf{a}}$ e $\bar{I}\alpha$ son el vector de inercia y el par de inercia, respectivamente, para el cuerpo entero y G es su centro de masa. Si se utiliza el DMA de la figura 17.13 partes (a) o (b) es cuestión de preferencia personal, porque con cualquier diagrama el análisis implica la misma cantidad de cálculos.

Problema de ejemplo 17.3

En la figura (a), el centro de masa de la puerta corrediza de 400 lb se localiza en G. La puerta se apoya en un riel horizontal mediante las guías A y B. El coeficiente de fricción estática y cinética en A y B es 0.4 y 0.3, respectivamente. La puerta estaba en reposo antes de que se aplicara la fuerza horizontal $P = 200$ lb: 1. encuentre el valor máximo de h para el que la puerta se deslizará hacia la derecha sin inclinarse y también la aceleración correspondiente de la puerta; 2. si $h = 5$ pies, obtenga todas las fuerzas que actúan sobre la puerta y calcule su aceleración.



(a)

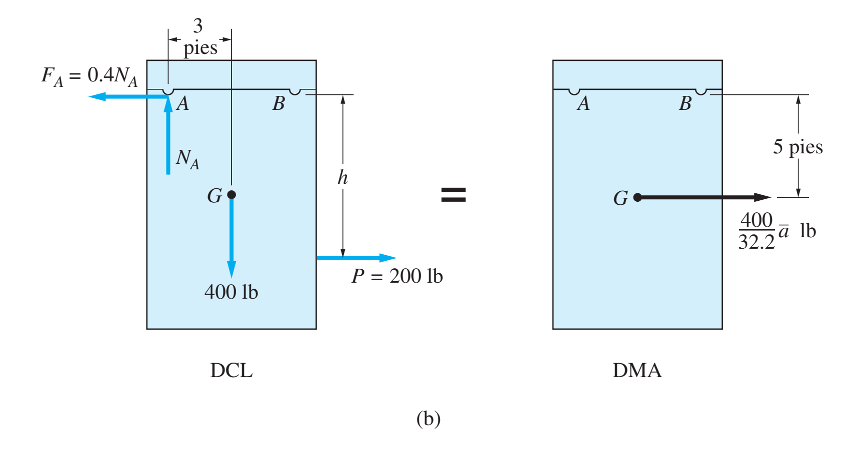
Solución

Parte 1

Los diagramas de cuerpo libre y de masa-aceleración para la puerta se muestran en la figura (b) y a continuación se describen con detalle.

Diagrama de cuerpo libre El diagrama de cuerpo libre (DCL) contiene las siguientes fuerzas: el peso de 400 lb que actúa en G, la fuerza aplicada P, y la fuerza normal N_A, y la fuerza de fricción $F_A = \mu_A N_A = 0.4N_A$. Debido a que la puerta parte del reposo, su velocidad se dirigirá hacia la derecha (es decir, en la misma dirección que la aceleración), que significa que F_A va hacia la izquierda. No existe fuerza normal y, por tanto, no hay fricción en B, porque el enunciado del problema implica que la puerta se desliza hacia la derecha en un estado próximo a inclinarse respecto de A.

Diagrama de masa-aceleración El diagrama de masa-aceleración (DMA) sólo contiene el vector de inercia de magnitud $m\bar{a}$ que actúa en G. No existe un par de inercia porque la puerta se traslada ($\alpha = 0$).



(b)

El análisis de la figura (b) revela que las incógnitas son N_A y h sobre el DCL y $\bar{a}$ en el DMA. Esas tres incógnitas pueden calcularse al deducir y resolver cualesquiera tres ecuaciones de movimiento independiente. Cuando se usa la técnica del DCL-DMA, recuerde que: 1. la fuerza resultante sobre el DCL puede igualarse con el vector de inercia $m\bar{\mathbf{a}}$ del DMA, y 2. es posible igualar el momento resultante respecto a cualquier punto sobre el DCL con el momento resultante respecto al mismo punto en el DMA.

Al igualar las componentes x y y de las fuerzas en el DCL con las componentes correspondientes del vector de inercia, se obtiene

$$\Sigma F_y = m\bar{a}_y \quad +\uparrow \quad N_A - 400 = 0$$
$$N_A = 400 \text{ lb}$$

y

$$\Sigma F_x = m\bar{a}_x \quad \xrightarrow{+} \quad 200 - 0.4N_A = \frac{400}{32.2}\bar{a}$$
$$200 - 0.4(400) = \frac{400}{32.2}\bar{a}$$

que da

$$\bar{a} = 3.22 \text{ pies/s}^2$$ *Respuesta*

La tercera ecuación independiente es una del momento respecto a cualquier punto. Si el punto A se selecciona como el centro de momento, el momento resultante en el DCL se iguala con el momento resultante en el DMA:

$$(\Sigma M_A)_{\text{DCL}} = (\Sigma M_A)_{\text{DMA}} \quad \circlearrowleft + \quad 200h - 400(3) = \left(\frac{400}{32.2}\bar{a}\right)5$$

Con $\bar{a} = 3.22$ pies/s², se obtiene

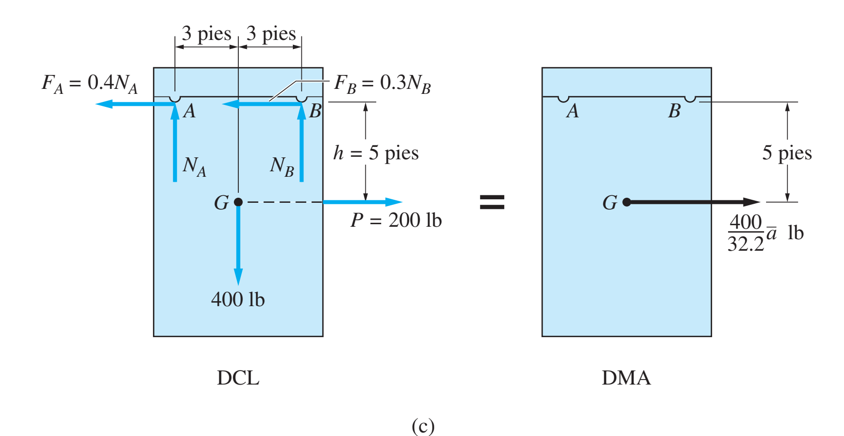
$$h = 7.00 \text{ pies}$$ *Respuesta*

Parte 2

En la figura (c) se muestran el DCL y el DMA para $h = 5$ pies. Los detalles sobre esos diagramas son como sigue.

Diagrama de cuerpo libre El DCL contiene el peso de 400 lb, la fuerza aplicada $P = 200$ lb que pasa por G, las fuerzas normales N_A y N_B, y las de fricción F_A y F_B. De la solución de la parte 1 se sabe que la puerta se deslizará hacia la derecha mientras mantiene contacto en A y B. Las fuerzas de fricción, determinadas por los coeficientes cinéticos de fricción, se dirigen hacia la izquierda, es decir, se oponen al movimiento.

Diagrama de masa-aceleración Debido a que la puerta se desliza hacia la derecha sin rotación, el DMA sólo contiene el vector de inercia que actúa a través de G.



(c)

Las incógnitas en el DCL y DMA son tres: N_A, N_B y $\bar{a}$, que pueden encontrarse a partir de cualesquiera tres ecuaciones de movimiento independientes. A continuación se presenta uno de dichos conjuntos de ecuaciones; es posible determinar su validez al referirse al DCL y el DMA de la figura (c).

$$\Sigma F_y = m\bar{a}_y \quad +\uparrow \quad N_A + N_B - 400 = 0 \tag{a}$$

$$\Sigma M_G = 0 \quad \circlearrowleft+ \quad N_B(3) + 0.3N_B(5) - N_A(3) + 0.4N_A(5) = 0 \tag{b}$$

$$\Sigma F_x = m\bar{a}_x \quad \xrightarrow{+} \quad 200 - 0.4N_A - 0.3N_B = \frac{400}{32.2}\bar{a} \tag{c}$$

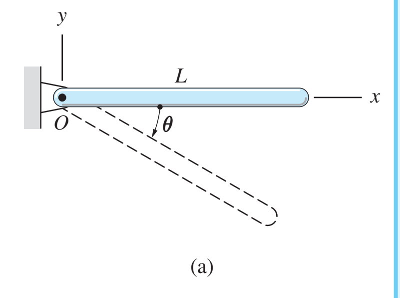
Al resolver las ecuaciones (a), (b) y (c) resulta

$$N_A = 327.3 \text{ lb} \qquad N_B = 72.73 \text{ lb} \qquad \bar{a} = 3.80 \text{ pies/s}^2$$ *Respuesta*

Los valores positivos de N_A y N_B confirman que la puerta no se inclinará.

Problema de ejemplo **17.4**

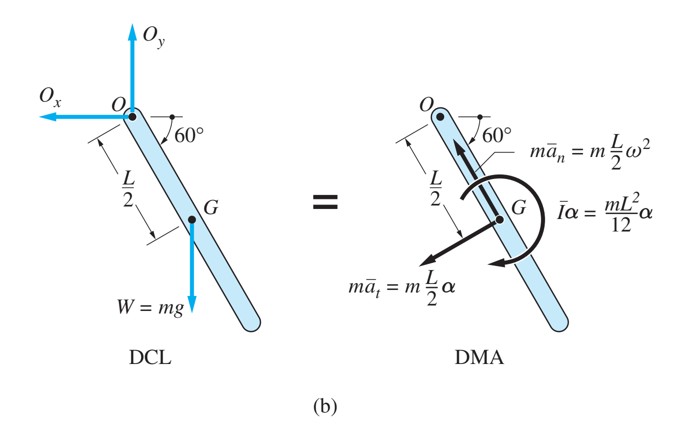
En la figura (a), la barra homogénea tiene masa m y longitud L. La barra, que es libre de rotar en el plano vertical respecto a un perno en O, se suelta a partir del reposo en la posición $\theta = 0$. Encuentre la aceleración angular α cuando $\theta = 60°$.



(a)

Solución

La figura (b) muestra el DCL y el DMA de la barra cuando $\theta = 60°$. El DCL contiene el peso W de la barra, que actúa en su centro de masa G (localizado en el punto medio de la barra) y las componentes de la reacción del perno en O. En el DMA, el par de inercia $\bar{I}\alpha$ se dibujó suponiendo que α es en sentido negativo y empleando $\bar{I} = mL^2/12$ de la tabla 17.1. Las componentes del vector de inercia $m\mathbf{a}$ se encontraron al observar que la trayectoria de G es un círculo centrado en O. Por tanto, las componentes normal y tangencial de $\bar{\mathbf{a}}$ son $\bar{a}_n = (L/2)\omega^2$ y $\bar{a}_t = (L/2)\alpha$. La dirección de $\bar{a}_n$ es hacia O, sin considerar la dirección de ω. La dirección de $\bar{a}_t$ es consistente con la dirección propuesta de α.



(b)

Observe que en la figura (b) hay un total de cuatro incógnitas: O_x, O_y, α y ω. Debido a que sólo existen tres ecuaciones de movimiento independientes, no será posible determinar todas las incógnitas si nada más se usan el DCL y el DMA. La razón de esto es que ω depende de la historia del movimiento: $\omega = \int \alpha\, dt + C$. Por tanto, las ecuaciones de movimiento en una posición específica de la barra no determinarán la velocidad angular en esa posición. Sin embargo, un análisis del DCL y DMA revela que es posible obtener la aceleración angular α, porque es la única incógnita que aparece en la ecuación del momento cuando O se utiliza como el centro de momento. Refiriéndose a los diagramas de la figura (b), esta ecuación del momento es

$$(\Sigma M_O)_{\text{DCL}} = (\Sigma M_O)_{\text{DMA}}$$

$$\circlearrowleft + \quad \text{mg}\frac{L}{2}\cos 60^\circ = \frac{mL^2}{12}\alpha + \left(m\frac{L}{2}\alpha\right)\frac{L}{2} = \frac{mL^2}{3}\alpha \qquad \text{(a)}$$

de la que se encuentra que

$$\alpha = \frac{3g}{2L}\cos 60^\circ = 0.750\frac{g}{L} \qquad \textit{Respuesta} \quad \text{(b)}$$

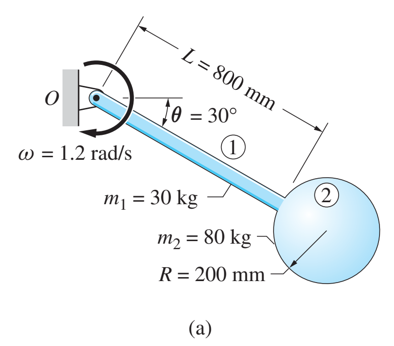
Debido a que la aceleración de O es cero, entonces la ecuación anterior del momento podría haberse obtenido de la ecuación (17.14): $\Sigma M_O = I_O\alpha$, donde

$$I_O = \bar{I} + md^2 = \frac{mL^2}{12} + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{mL^2}{3} \qquad \text{(c)}$$

a partir del teorema de los ejes paralelos. Ahora se observa que $\Sigma M_O = I_O\alpha$ conducirá a una ecuación que es idéntica a la ecuación (a).

Problema de ejemplo **17.5**

El cuerpo que se muestra en la figura (a) consiste en la barra delgada homogénea 1 que está conectada de manera rígida a la esfera homogénea 2. El cuerpo rota en el plano vertical respecto al perno en O. Cuando el cuerpo está en la posición con $\theta = 30^\circ$, su velocidad angular es $\omega = 1.2$ rad/s en sentido negativo. En este instante, determine la aceleración angular α y la magnitud de la reacción del perno en O.

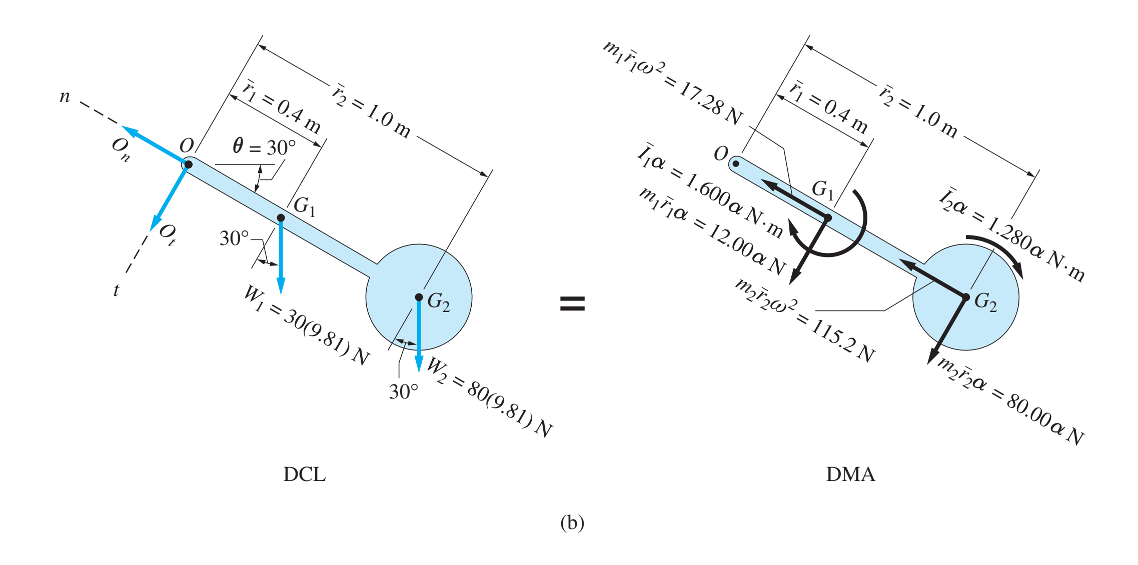


(a)

Solución

En la figura (b) se muestran el DCL y el DMA del cuerpo en la posición $\theta = 30^\circ$. En esos diagramas, la barra y la esfera se tratan como entidades separadas, cada una con su propio par y vector de inercia. (Una forma equivalente del DMA se obtendría mostrando el par y el vector de inercia del montaje; refiriéndose a la figura 17.13.) Enseguida se describen detalles de los diagramas.

Diagrama de cuerpo libre Las fuerzas O_n y O_t son las componentes de la reacción del perno relativas a los ejes n y t que se muestran en la figura. Los pesos W_1 y W_2 de la barra y la esfera, respectivamente, actúan en sus centros de masa G_1 y G_2. Las dis-



(b)

tancias $\bar{r}_1 = 0.4$ m y $\bar{r}_2 = 1.0$ m medidas desde O a los centros de masa, se deducen de las dimensiones en la figura (a).

Diagrama de masa-aceleración En el DMA se supone que la aceleración angular α, medida en rad/s^2, está en sentido negativo. Si se utiliza el hecho de que el cuerpo rota respecto al punto fijo O, el análisis cinemático permite expresar las aceleraciones de G_1 y G_2 en términos de α y ω del cuerpo. Los términos de inercia que aparecen en el DMA se han calculado de la siguiente manera.
Para la barra delgada:

$$\bar{I}_1\alpha = \frac{m_1L^2}{12}\alpha = \frac{30(0.8)^2}{12}\alpha = 1.600\alpha \text{ N}\cdot\text{m}$$
$$m_1\bar{r}_1\omega^2 = 30(0.4)(1.2)^2 = 17.28 \text{ N}$$
$$m_1\bar{r}_1\alpha = 30(0.4)\alpha = 12.00\alpha \text{ N}$$

Para la esfera:

$$\bar{I}_2\alpha = \frac{2}{5}m_2R^2\alpha = \frac{2}{5}(80)(0.2)^2\alpha = 1.280\alpha \text{ N}\cdot\text{m}$$
$$m_2\bar{r}_2\omega^2 = 80(1.0)(1.2)^2 = 115.2 \text{ N}$$
$$m_2\bar{r}_2\alpha = 80(1.0)\alpha = 80.00\alpha \text{ N}$$

En el DMA, las direcciones de las componentes tangenciales de los vectores de inercia (aquellas que contienen α) son consistentes con la dirección negativa propuesta para α. Las componentes normales de los vectores de inercia (aquellas que contienen ω^2) se dirigen hacia el centro de rotación O, sin importar la dirección de ω.

De la figura (b) se observa que hay dos incógnitas en el DCL (O_n y O_t) y una incógnita (α) en el DMA. Por tanto, todo lo que resta es deducir y resolver las tres ecuaciones de movimiento independientes para las incógnitas.

Al igualar los momentos respecto de O en el DCL y el DMA de la figura (b), se obtiene

$$(\Sigma M_O)_{\text{DCL}} = (\Sigma M_O)_{\text{DMA}}$$

$$\circlearrowright + \quad 30(9.81)(0.4)\cos 30^\circ + 80(9.81)(1.0)\cos 30^\circ$$
$$= 1.600\alpha + (12.00\alpha)(0.4) + 1.280\alpha + (80.00\alpha)(1.0)$$
$$= 87.68\alpha$$

de la que se encuentra que

$$\alpha = 8.914 \text{ rad/s}^2 \qquad \textit{Respuesta}$$

Debido a que la aceleración del punto O es cero, este resultado también podría haberse obtenido utilizando el caso especial $\Sigma M_O = I_O\alpha$.

Al usar $\alpha = 8.914$ rad/s^2 y referirse a la figura (b), las ecuaciones de la fuerza en las direcciones t y n dan

$$\Sigma F_t = m\bar{a}_t$$
$$\swarrow + \quad O_t + 30(9.81)\cos 30^\circ + 80(9.81)\cos 30^\circ = 12.00(8.914) + 80.00(8.914)$$
$$O_t = -114.4 \text{ N}$$

y

$$\Sigma F_n = m\bar{a}_n$$
$$\nwarrow + \quad O_n - 30(9.81)\text{ sen } 30^\circ - 80(9.81)\text{ sen } 30^\circ = 17.28 + 115.2$$
$$O_n = 672.0 \text{ N}$$

Por tanto, la magnitud de la reacción en el perno en O es

$$O = \sqrt{O_t^2 + O_n^2} = \sqrt{(-114.4)^2 + (672.0)^2} = 682 \text{ N} \qquad \textit{Respuesta}$$

Problema de ejemplo **17.6**

En la figura (a), el cable conectado al bloque B está enrollado de manera ajustada al disco A, que es libre para rotar respecto al eje en su centro de masa G. Las masas de A y B son 60 y 20 kg, respectivamente, y $\bar{k} = 400$ mm para el disco. Determine la aceleración angular de A y la tensión en el cable.

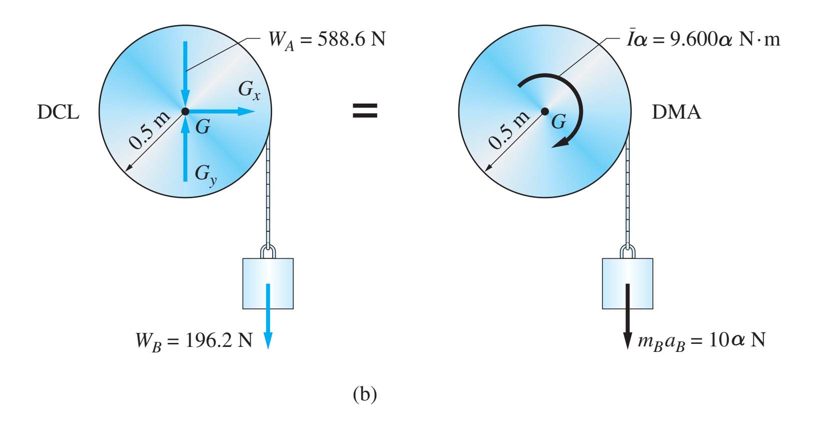
(a)

Solución

En la figura (b) se muestran los diagramas de cuerpo libre y de masa-aceleración del sistema. El DCL contiene los pesos $W_A = 60(9.81) = 588.6$ N y $W_B = 20(9.81) = 196.2$ N junto con las reacciones desconocidas en el perno en G. La tensión en el cable, por ser una fuerza interna, no aparece en este DCL.

El DMA representa el par de inercia del disco y el vector de inercia del bloque. No existe vector de inercia del disco porque su centro de masa G es estacionario. Se supone que la aceleración angular α del disco tiene sentido negativo. El correspondiente par de inercia del disco es

$$\bar{I}\alpha = m\bar{k}^2\alpha = 60(0.4)^2\alpha = 9.600\alpha \text{ N} \cdot \text{m}$$



(b)

que también tiene sentido negativo. Debido a que el cable no se desliza sobre el disco, la aceleración del bloque es $a_B = R\alpha$, que conduce al vector de inercia

$$m_B a_B = m_B(R\alpha) = 20(0.5\alpha) = 10\alpha \text{ N} \quad \downarrow$$

Existen tres incógnitas en el DCL y el DMA: dos componentes de la reacción del perno en G y la aceleración angular α del disco. Las ecuaciones independientes disponibles del DCL y DMA son tres, así que todas las incógnitas pueden calcularse.

Es posible encontrar la aceleración angular α igualando los momentos resultantes respecto de G en el DCL y el DMA.

$$(\Sigma M_G)_{\text{DCL}} = (\Sigma M_G)_{\text{DMA}} \quad \circlearrowright + \quad 196.2(0.5) = 9.600\alpha + 10\alpha(0.5)$$

$$\alpha = 6.719 \text{ rad/s}^2 \qquad \textit{Respuesta}$$

Para encontrar la tensión en el cable se analiza el bloque por separado (también podría emplearse el disco). En la figura (c) se muestran el DCL y DMA para el bloque, donde T es la tensión en el cable. Al sumar las fuerzas en la dirección y resulta

$$\Sigma F_y = ma_y \quad +\!\downarrow \quad 196.2 - T = 10\alpha = 10(6.719)$$

$$T = 129.0 \text{ N} \qquad \textit{Respuesta}$$

T

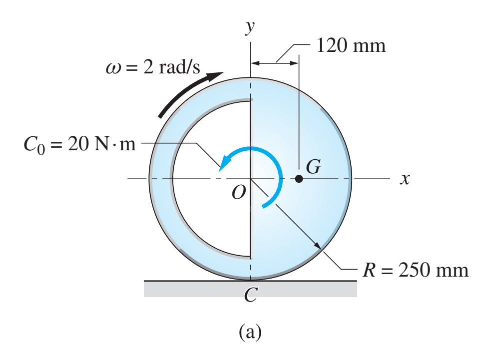
DCL = DMA

$W_B = 196.2$ N $\quad m_B a_B = 10\alpha$ N

(c)

Problema de ejemplo **17.7**

En la figura (a), la rueda desbalanceada de 40 kg gira sin deslizarse bajo la acción de un par $C_0 = 20$ N·m en sentido positivo. Cuando la rueda está en la posición que se muestra, su velocidad angular es $\omega = 2$ rad/s, en sentido negativo. Para esta posición, calcule la aceleración angular α y las fuerzas ejercidas sobre la rueda en C por la superficie horizontal rugosa. El radio de giro de la rueda respecto a su centro de masa G es $\bar{k} = 200$ mm.



(a)

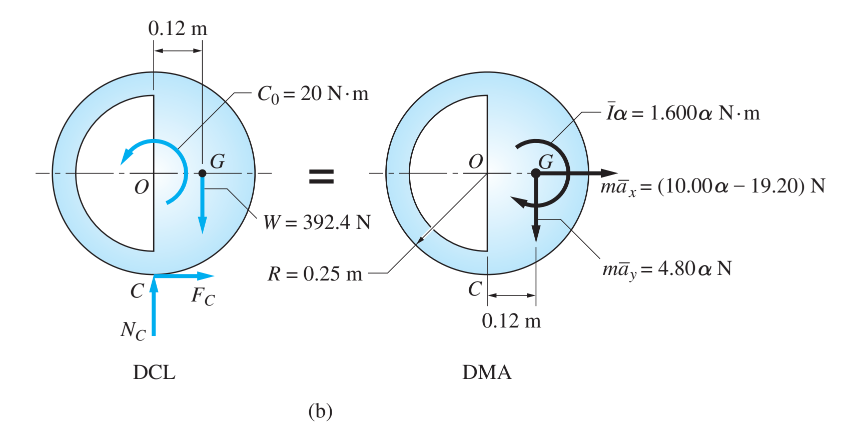
Solución

Los diagramas de cuerpo libre y de masa-aceleración para la rueda que se muestran en la figura (b) se construyeron como sigue.

Diagrama de cuerpo libre El DCL consiste en el par aplicado C_0, el peso $W = 40(9.81) = 392.4$ N y las fuerzas normal y de fricción que actúan en el punto C de contacto, que se denotan con N_C y F_C, respectivamente. Observe que se ha supuesto que F_C se dirige hacia la derecha.

Diagrama de masa-aceleración En el DMA de la figura (b), se supone que la aceleración angular α, medida en rad/s^2, tiene sentido negativo. El correspondiente par de inercia que se muestra en este diagrama es

$$\bar{I}\alpha = m\bar{k}^2\alpha = 40(0.200)^2\alpha = 1.600\alpha \text{ N} \cdot \text{m}$$



(b)

Debido a que la rueda no se desliza, la aceleración de su centro O es $a_O = R\alpha = 0.250\alpha$ m/s^2, y se dirige hacia la derecha. Al aplicar la ecuación de aceleración relativa entre G y O, se obtiene (las unidades de cada término son m/s^2)

$$\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{a}_G = \mathbf{a}_O + \mathbf{a}_{G/O}$$

$\bar{a}_x$
$\bar{a}_y$
0.250α
O
α
0.120 m
G
$0.120\omega^2 = 0.120(2)^2 = 0.480$
0.120α

de donde se encuentra $\bar{a}_x = 0.250\alpha - 0.480$ m/s^2 y $\bar{a}_y = 0.120\alpha$ m/s^2. Si se multiplican estos resultados por $m = 40$ kg, las componentes del vector de inercia serán $m\bar{a}_x = (10.00\alpha - 19.20)$N, dirigida hacia la derecha y $m\bar{a}_y = 4.80\alpha$ N, que va hacia abajo.

En la figura (b), ahora el DCL y DMA sólo contienen tres incógnitas: N_C, F_C y α, que pueden encontrarse con cualesquiera tres ecuaciones de movimiento independientes.

Como N_C y F_C actúan en C, es conveniente utilizar ese punto como un centro de momento, la correspondiente ecuación del momento es

$$(\Sigma M_C)_{\text{DCL}} = (\Sigma M_C)_{\text{DMA}}$$

$$\circlearrowright + \quad -20 + 392.4(0.120) = 1.600\alpha + 0.250(10.00\alpha - 19.20) + 0.120(4.80\alpha)$$

La solución de esta ecuación es

$$\alpha = 6.820 \text{ rad/s}^2 \qquad \textit{Respuesta}$$

Ya que α es positiva su dirección va, como se pensó, en sentido negativo.

Ahora las fuerzas en C pueden encontrarse con las ecuaciones de movimiento para la fuerza:

$$\Sigma F_x = m\bar{a}_x \quad \xrightarrow{+} \quad F_C = 10.00\alpha - 19.20 = 10.00(6.820) - 19.20$$

y

$$\Sigma F_y = m\bar{a}_y \quad +\!\downarrow \quad 392.4 - N_C = 4.80\alpha = 4.80(6.820)$$

lo que da

$$F_C = 49.0 \text{ N} \quad \text{y} \quad N_C = 360 \text{ N} \qquad \textit{Respuesta}$$

Ya que todas las fuerzas son positivas, se dirigen como se muestra en el DCL.

Problema de ejemplo 17.8

$R = 0.5$ pies

$P = 40$ lb

G

y

x

$\mu_s = 0.20$

$\mu_k = 0.15$

(a)

La figura (a) muestra un disco homogéneo de 50 lb y radio de 0.5 pies. El disco está en reposo antes de que la fuerza horizontal $P = 40$ lb se aplique a su centro de masa G. El coeficiente de fricción estática y cinética para las superficies en contacto son 0.20 y 0.15, respectivamente. Determine la aceleración angular del disco y la aceleración de G después de aplicar la fuerza.

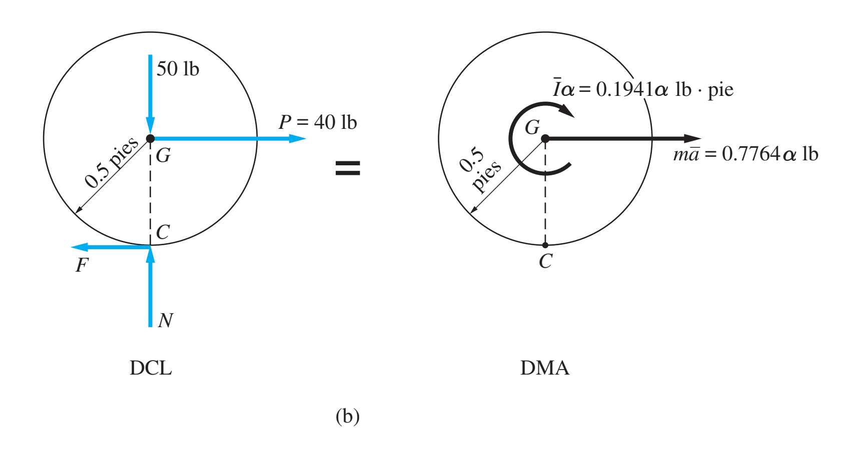
Solución

Hay dos posibles movimientos del disco: rodar sin deslizarse y rodar y deslizarse. El problema se resolverá suponiendo que el disco rueda sin deslizamiento. Esta suposición se comprobará al comparar la fuerza de fricción requerida con su máximo valor estático.

En la figura (b) se muestra el diagrama de cuerpo libre (DCL) y el diagrama de masa-aceleración (DMA) con base en la hipótesis de que no existe deslizamiento. El DCL contiene el peso de 50 lb, la fuerza aplicada de 40 lb, la fuerza normal N y la de fricción F, que se supone va hacia la izquierda. El DMA contiene el par y el vector de inercia, en donde la aceleración angular α, medida en rad/s^2, se ha supuesto en sentido negativo. Los valores de $\bar{I}\alpha$ y $m\bar{a}$ se calcularon como sigue

$$\bar{I}\alpha = \frac{mR^2}{2}\alpha = \frac{50(0.5)^2}{(32.2)2}\alpha = 0.1941\alpha \text{ lb} \cdot \text{pie}$$

$$m\bar{a} = mR\alpha = \frac{50}{32.2}(0.5)\alpha = 0.7764\alpha \text{ lb}$$



(b)

Observe que $\bar{a} = R\alpha$ es una ecuación cinemática válida porque se ha supuesto que el disco rueda sin deslizarse. Hay un total de tres incógnitas en el DCL y DMA: F, N y α, que pueden calcularse con cualesquiera tres ecuaciones de movimiento independientes.

Una solución conveniente es igualar primero el momento resultante respecto a C en el DCL con el momento resultante respecto a C en el DMA, y después utilizar las ecuaciones de movimiento de la fuerza.

$$(\Sigma M_C)_{\text{DCL}} = (\Sigma M_C)_{\text{DMA}} \quad \circlearrowright^{+} \quad 40(0.5) = 0.1941\alpha + 0.7764\alpha(0.5)$$

$$\alpha = 34.35 \text{ rad/s}^2$$

$$\Sigma F_x = m\bar{a}_x \quad \xrightarrow{+} \quad 40 - F = 0.7764\alpha = 0.7764(34.35)$$

$$F = 13.33 \text{ lb}$$

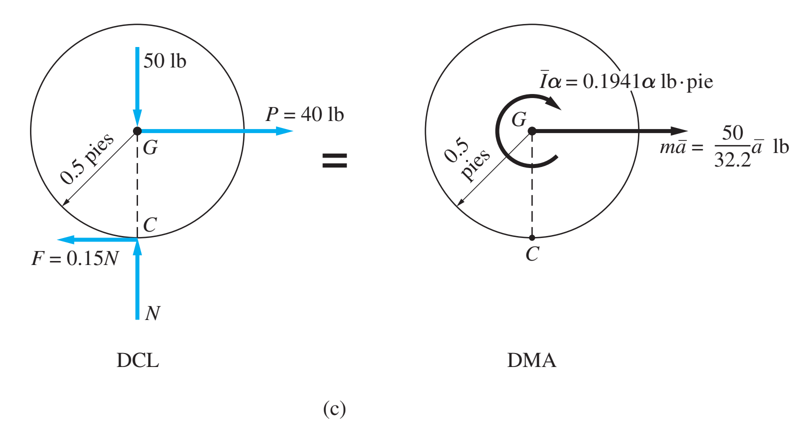
$$\Sigma F_y = m\bar{a}_y \quad +\uparrow \quad N - 50 = 0$$

$$N = 50 \text{ lb}$$

Ya que α, F y N son todas positivas, sus direcciones van como se muestra en la figura (b).

Ahora observe que la máxima fuerza de fricción estática posible es $F_{\text{max}} = \mu_s N = 0.20(50) = 10.0$ lb. La fuerza de fricción requerida para rodar sin deslizarse es, de acuerdo con la solución, $F = 13.33$ lb. Como $F > F_{\text{max}}$, se concluye que el disco se desliza y por tanto debe reformularse el problema.

En la figura (c) se muestran el DCL y el DMA para el caso en que el disco rueda y se desliza simultáneamente. La fuerza de fricción F en el DCL se ha puesto igual a su valor cinético, $\mu_k N$. Debe indicarse que esta fuerza actúa hacia la izquierda para oponerse así al deslizamiento. El par de inercia $\bar{I}\alpha$ en el DMA es idéntico al que se usa en la figura (b). Sin embargo, la diferencia importante aquí es que la magnitud del vector de inercia es ahora $m\bar{a} = (50/32.2)\bar{a}/b$, en donde $\bar{a}$ se mide en pies/s^2. Como el disco se desliza, no se aplica la restricción cinemática $\bar{a} = R\alpha$. Otra vez se observa que existen tres incógnitas en el DCL y el DMA, excepto que ahora son N, α y $\bar{a}$.



(c)

Las tres incógnitas pueden calcularse como sigue (de hecho, podrían emplearse cualesquiera otras tres ecuaciones independientes):

$$\Sigma F_y = m\bar{a}_y \quad +\uparrow \quad N - 50 = 0 \qquad N = 50 \text{ lb} \qquad \text{(a)}$$

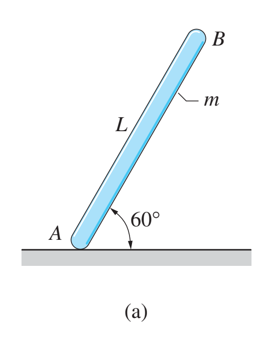
$$\Sigma F_x = m\bar{a}_x \quad \xrightarrow{+} \quad 40 - 0.15N = \frac{50}{32.2}\bar{a} \qquad \text{(b)}$$

$$\Sigma M_G = \bar{I}\alpha \quad \circlearrowright^{+} \quad 0.5(0.15N) = 0.1941\alpha \qquad \text{(c)}$$

Al sustituir $N = 50$ lb de la ecuación (a) en (b) y (c) se obtiene

$$\bar{a} = 20.93 \text{ pies/s}^2 \quad \text{y} \quad \alpha = 19.32 \text{ rad/s}^2$$ *Respuesta*

Problema de ejemplo 17.9

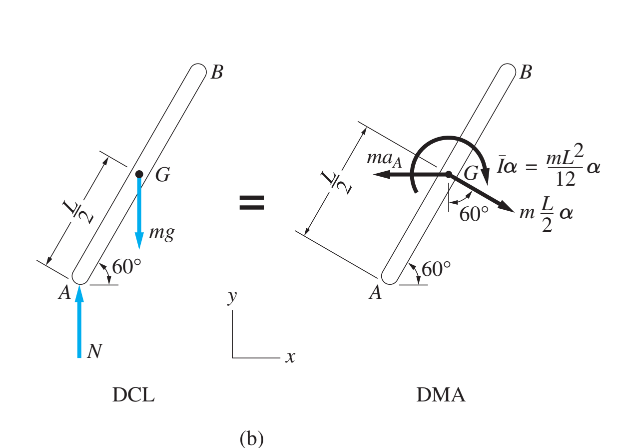


(a)

Una barra delgada homogénea *AB* de masa *m* y longitud *L* se suelta a partir del reposo en la posición que se muestra en la figura (a). Determine la aceleración del extremo *A*, la reacción en *A* y la aceleración angular de la barra inmediatamente después de que se suelta. Suponga que no hay fricción en el plano horizontal.



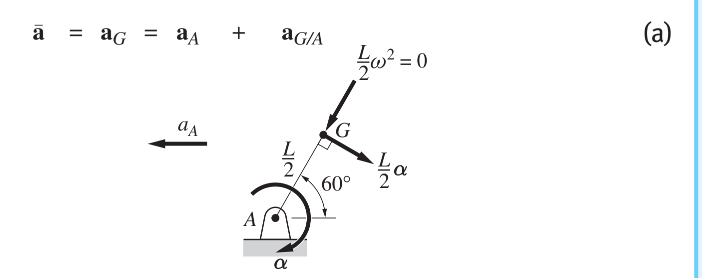
Solución



(b)

En la figura (b) se muestra el diagrama de cuerpo libre (DCL) y el de masa-aceleración (DMA) de la barra en el instante posterior a que se libera. El DCL contiene el peso de la barra, *mg*, y la reacción vertical *N*. El DMA contiene el par de inercia, $\bar{I}\alpha$ y el vector de inercia, $m\bar{\mathbf{a}}$. El último consiste en las componentes ma_A y $m(L/2)\alpha$, que se obtuvieron de la cinemática como sigue:

$$\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{a}_G = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{G/A} \qquad \text{(a)}$$



En la ecuación (a), se supuso que los sentidos de $\mathbf{a}_A$ y α van hacia la izquierda y en sentido negativo, respectivamente. La velocidad angular ω es cero porque la barra parte del reposo en la posición que se considera. Al multiplicar el lado derecho de la ecuación (a) por la masa *m* y colocar los resultados en *G* se obtienen las componentes del vector de inercia que se muestran en el DMA de la figura (b).

Un análisis de la figura (b) revela que hay un total de tres incógnitas: N, a_A y α. Por tanto, la solución puede obtenerse al deducir y resolver cualesquiera tres ecuaciones de movimiento independientes.

Al igualar los momentos respecto de A en el DCL y el DMA de la figura (b) resulta:

$$(\Sigma M_A)_{\text{DCL}} = (\Sigma M_A)_{\text{DMA}}$$

$$\circlearrowleft + \quad mg\left(\frac{L}{2}\cos 60°\right) = \frac{mL^2}{12}\alpha + m\frac{L}{2}\alpha\left(\frac{L}{2}\right) - ma_A\left(\frac{L}{2}\,\text{sen}\,60°\right)$$

que, al simplificarse será

$$a_A = 0.7698L\alpha - 0.5774g \qquad \text{(b)}$$

Si se toma la figura (b) como referencia otra vez, la ecuación de la fuerza para la dirección horizontal da

$$\Sigma F_x = m\bar{a}_x \qquad \xrightarrow{+} \quad 0 = -ma_A + m\frac{L}{2}\alpha\,\text{sen}\,60°$$

que se reduce a

$$a_A = 0.4330L\alpha \qquad \text{(c)}$$

Al resolver las ecuaciones (b) y (c) simultáneamente se obtiene

$$a_A = 0.742g \quad \text{y} \quad \alpha = 1.714\frac{g}{L} \qquad \textit{Respuesta}$$

Cuando se usan los diagramas de la figura (b), la ecuación de la fuerza para la dirección vertical es

$$\Sigma F_y = m\bar{a}_y \qquad +\uparrow \quad -mg + N = -m\frac{L}{2}\alpha\cos 60° \qquad \text{(d)}$$

Al sustituir la expresión para α que se encontró antes y despejar a N, se obtiene

$$N = 0.572\,mg \qquad \textit{Respuesta}$$

Se debe enfatizar que los valores obtenidos para N, α y a_A sólo son válidos en el instante después de que se suelta la barra. Cada una de estas variables cambiará durante el movimiento subsecuente de la misma. Sin embargo, es interesante observar que nunca existe una fuerza horizontal que actúe sobre la barra porque el plano carece de fricción. Por tanto, la trayectoria seguida por el centro de masa G será una línea recta vertical.

Problemas

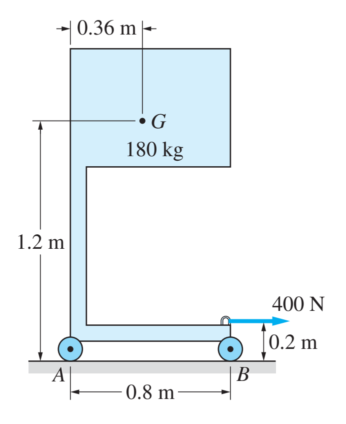


Fig. P17.17

17.17 La fuerza horizontal de 400 N se aplica al gabinete que se apoya en los soportes sin fricción *A* y *B*. La masa del gabinete es 180 kg y *G* es su centro de masa. (a) Determine la aceleración del gabinete suponiendo que no se vuelque. (b) Compruebe que el gabinete no se inclina calculando las reacciones en *A* y *B*.

17.18 El centro de masa combinado de la motocicleta y el conductor se localiza en *G*. (a) Encuentre la menor aceleración tal que el conductor pueda alzar la llanta delantera apoyando la motocicleta sólo en la llanta trasera. (b) ¿Qué mínimo coeficiente de fricción estática entre las llantas y el piso se requiere para eso?

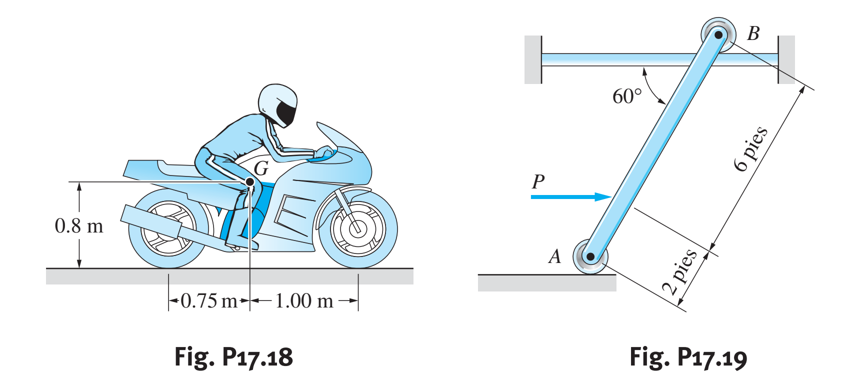
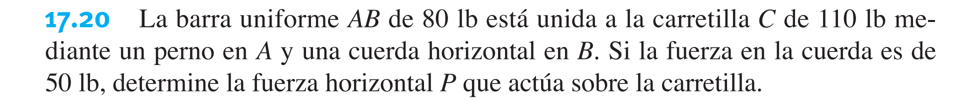


Fig. P17.18

Fig. P17.19

17.19 Obtenga la mayor fuerza *P* que aceleraría la barra uniforme *AB* de 20 lb hacia la derecha sin causar que el rodillo en *B* se levante del riel guía. Desprecie las masas de los rodillos.



17.20 La barra uniforme *AB* de 80 lb está unida a la carretilla *C* de 110 lb mediante un perno en *A* y una cuerda horizontal en *B*. Si la fuerza en la cuerda es de 50 lb, determine la fuerza horizontal *P* que actúa sobre la carretilla.

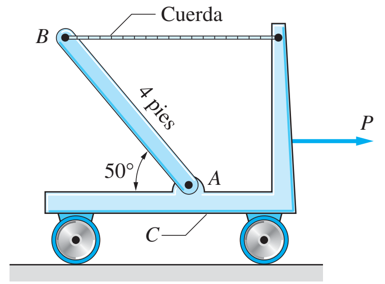


Fig. P17.20

17.21 El centro de masa del remolque de 840 lb se localiza en *G*. El remolque está unido a un automóvil mediante la rótula *C*. Determine: (a) la máxima aceleración del automóvil tal que el remolque no tire del gancho y (b) la fuerza horizontal correspondiente sobre el gancho.

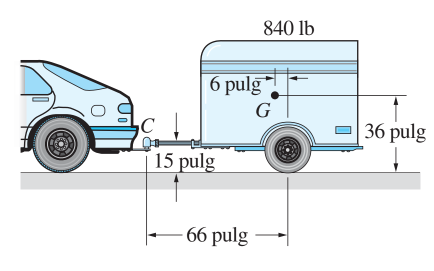


Fig. P17.21

17.22 El panel homogéneo de 40 lb, unido con un perno al rodillo *A* sin fricción y a un ligero collar *B* deslizante, se somete a la fuerza horizontal de 15 lb. Determine la aceleración del panel y la reacción en el rodillo en *A*, dado que la velocidad del panel es 3.6 pies/s hacia la izquierda. Desprecie la fricción.

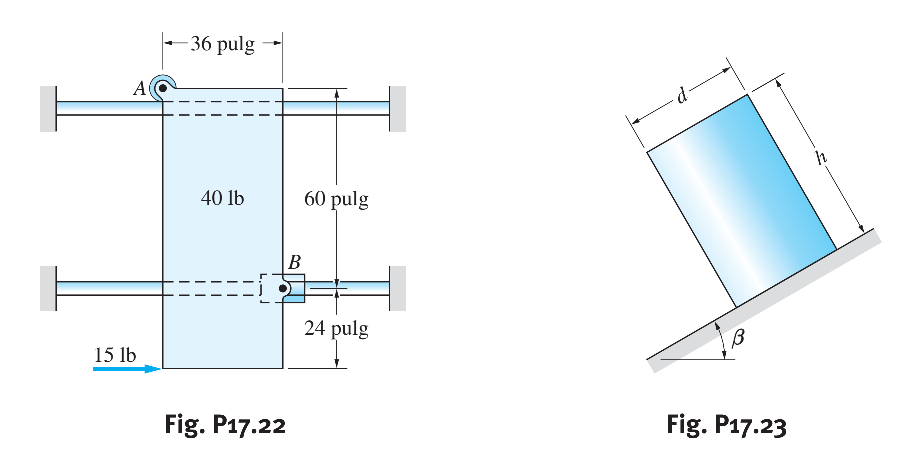


Fig. P17.22 **Fig. P17.23**

17.23 El cilindro homogéneo de masa *m* se desliza hacia abajo del plano inclinado con un ángulo β. El coeficiente cinético de fricción entre el cilindro y el plano es μ. Determine la expresión para la menor razón *d*/*h* de manera que el cilindro no se vuelque.

17.24 La plataforma *B* de 20 kg que transporta una caja homogénea *A* de 40 kg, rueda libremente hacia abajo del plano inclinado. Los coeficientes estático y cinético de fricción entre *A* y *B* son 0.4 y 0.35, respectivamente. (a) Demuestre que la caja resbalará sobre la plataforma, suponiendo que sus dimensiones son las requeridas para que no se vuelque. (b) Obtenga la menor razón *b*/*h* para que la caja no se vuelque.

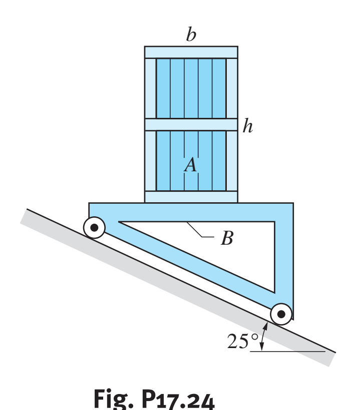


Fig. P17.24

17.25 Una caja de 80 lb se transporta sobre una plataforma que está unida a dos brazos paralelos. Los brazos se manejan con velocidad angular constante de 2 rad/s en sentido positivo. Determine la normal y las fuerzas de fricción ejercidas sobre la caja por la plataforma cuando el sistema está en la posición que se muestra. Suponga que la caja no se desliza respecto a la plataforma.

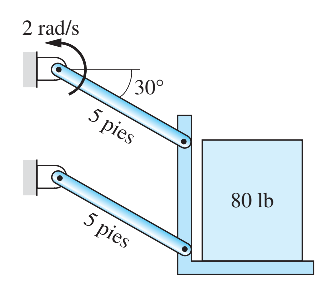


Fig. P17.25

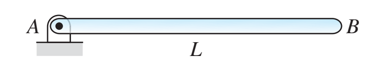


Fig. P17.26

17.26 La barra uniforme *AB* parte del reposo en la posición horizontal. Encuentre la aceleración inicial del extremo *B* de la barra.

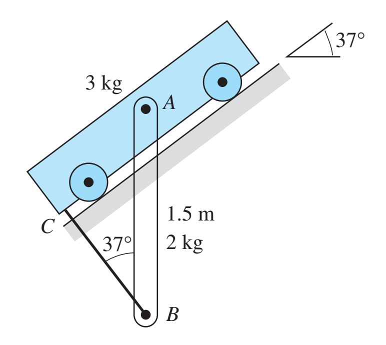


Fig. P17.27

17.27 La barra vertical *AB* de 2 kg está unida a la carreta de 3 kg mediante un perno en *A* y la cuerda *BC*. Obtenga la tensión en la cuerda inmediatamente después de que el montaje se suelta a partir del reposo en la posición que se muestra.

17.28 Dos barras uniformes idénticas *AC* y *DE*, cada una de masa *m* y longitud *L*, están unidas con cuerdas en sus extremos. El montaje cuelga, en el plano vertical, de un perno en *B*. Encuentre la tensión en la cuerda *CE* un instante después de cortar la cuerda *AD*.

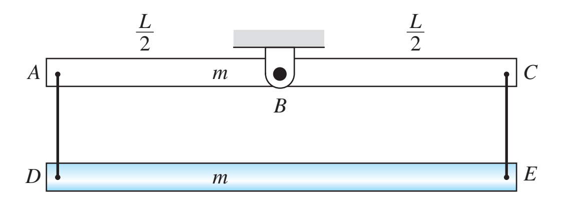


Fig. P17.28

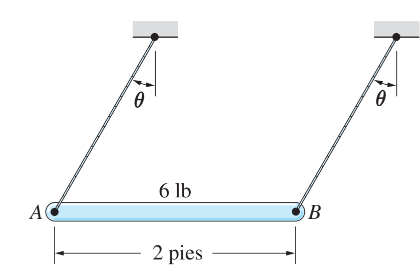


Fig. P17.29

17.29 La barra homogénea *AB* de 6 lb está sostenida por cuerdas paralelas en *A* y *B*. Si la barra se suelta del reposo cuando $\theta = 35°$, calcule las fuerzas en las cuerdas inmediatamente después de soltar la barra.

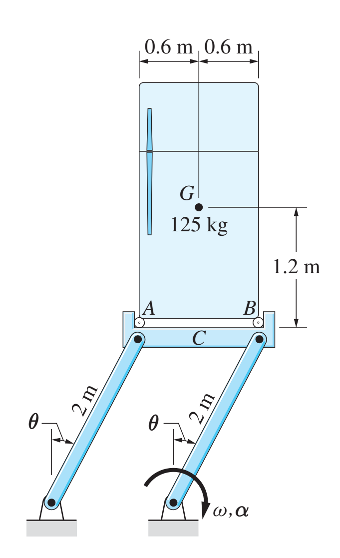


Fig. P17.30

17.30 Un refrigerador de 125 kg se baja al suelo mediante la plataforma *C*, que se controla con la conexión que se muestra en forma de paralelogramo. Los bordes de la plataforma evitan que el refrigerador ruede sobre sus rodillos en *A* y *B*. Pruebe que el refrigerador no se volcará cuando $\theta = 0$, $\omega = 1.2$ rad/s y $\alpha = 1.6$ rad/s^2. (*Sugerencia:* suponga que el refrigerador no se vuelca y encuentre las reacciones en *A* y *B*).

17.31 Determine las aceleraciones angulares de las poleas homogéneas que se muestran en (a) y (b). El momento de inercia de masa para cada polea respecto a su centro de masa *G* es 4 slug · pie^2.

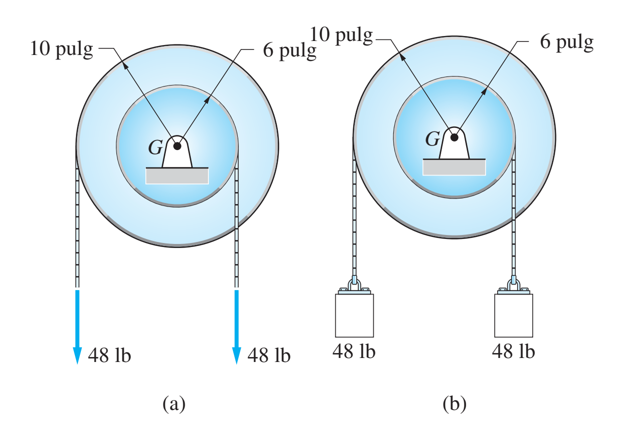


Fig. P17.31

17.32 El radio de giro de la polea de 20 kg respecto a su centro de masa G es 300 mm. Calcule la aceleración angular de la polea y la tensión en la cuerda AB.

Fig. P17.32

17.33 Determine la máxima aceleración posible del automóvil si el coeficiente de fricción estática entre las llantas y el suelo es 0.8. El automóvil tiene tracción delantera y su centro de masa se localiza en G.

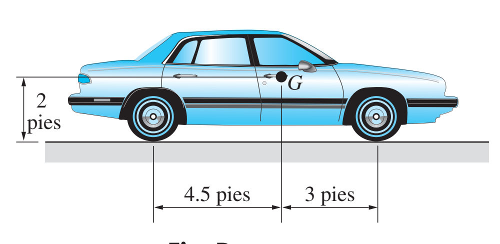


Fig. P17.33

17.34 Dos cilindros idénticos homogéneos de 30 lb están conectados con un cable. Calcule la tensión en el cable un instante después de que se han soltado los cilindros a partir del reposo en la posición que se muestra. Suponga que la fricción permite que los cilindros rueden sin deslizarse y desprecie el peso de la pequeña polea.

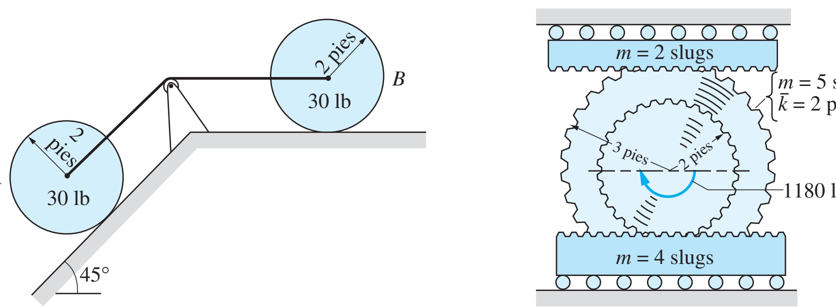


Fig. P17.34

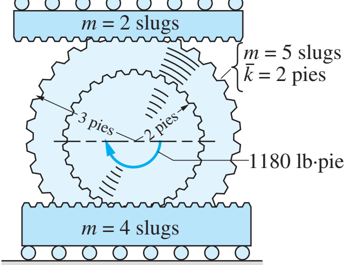


Fig. P17.35

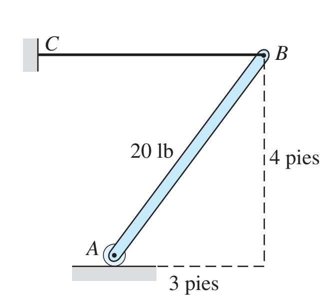


Fig. P17.36

17.35 El engrane compuesto cuya masa es de 5 slugs engrana en las dos cremalleras. Si el par de 1180 lb · pie se aplica al engrane, obtenga la aceleración del centro de éste.

17.36 La barra homogénea AB de 20 lb se suelta a partir del reposo en la posición que se indica. Calcule la aceleración angular de la barra y la tensión en la cuerda BC inmediatamente después de soltarla.

17.37 Los engranes A y B, de masas 4 y 10 kg, respectivamente, giran respecto a sus centros de masa. El radio de giro respecto al eje de rotación es de 100 mm para A y 300 mm para B. Un par constante $C_0 = 0.75$ N · m actúa sobre el engrane A. Despreciando la fricción, calcule la aceleración angular de cada engrane y la fuerza de contacto tangencial entre los engranes en C.

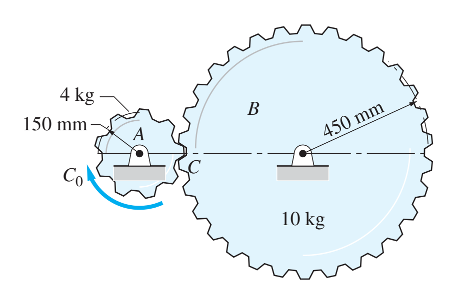


Fig. P17.37

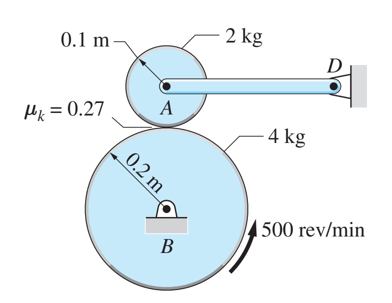


Fig. P17.38

17.38 Los discos uniformes A y B, con masas de 2 y 4 kg, respectivamente, pueden girar libremente respecto a sus centros de masa. El coeficiente cinético de fricción entre los discos es 0.27. El disco B gira a 500 rev/min en sentido positivo cuando se coloca en contacto con el disco estacionario A. Calcule la aceleración angular de cada disco durante el tiempo que ocurre el deslizamiento entre los discos. Desprecie la masa de la barra AD.

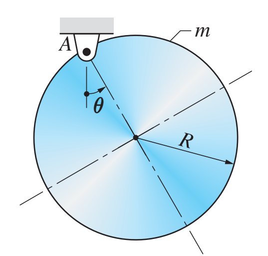


Fig. P17.39

17.39 El disco uniforme de radio R y masa m es libre para rotar respecto al perno en A. Determine la magnitud de la reacción del perno en A inmediatamente después de que se suelta el disco a partir del reposo cuando $\theta = 90°$.

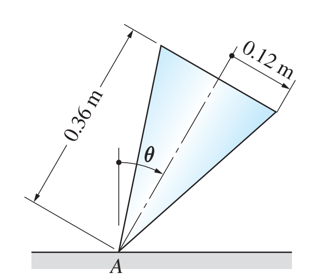


Fig. P17.40

17.40 El cono sólido de acero con densidad de 7850 kg/m^3 se suelta a partir del reposo cuando $\theta = 22°$. Suponga que existe suficiente fricción en A para evitar el deslizamiento. Encuentre la aceleración angular del cono, las fuerzas normal y de fricción en A inmediatamente después de soltar el cono.

17.41 La barra delgada uniforme AB de 3 lb está montada sobre un poste vertical en C. Se le aplica un par constante de 9 lb · pulg. Calcule la aceleración angular de la barra y la magnitud de la reacción horizontal en C en el instante en que la velocidad angular de la barra es de 6 rad/s.

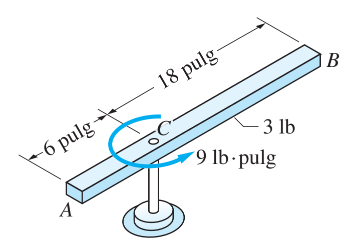


Fig. P17.41

17.42 Para determinar las propiedades inerciales de la biela AB, se cuelga de dos alambres, uno de ellos al final se cortará. Las celdas de carga se usan para medir la fuerza en cada alambre. Cuando la varilla cuelga en la posición que se muestra, las fuerzas que se miden en los alambres son 6.80 lb en A y 5.20 lb en B. Inmediatamente después de cortar el alambre en B, la fuerza en el alambre en A se reduce a 3.6 lb. Obtenga: (a) la distancia d que localiza al centro de masa G y (b) el radio de giro de la biela respecto a G.

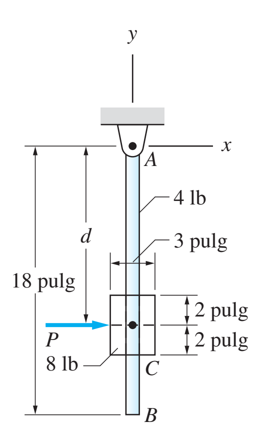


Fig. P17.43

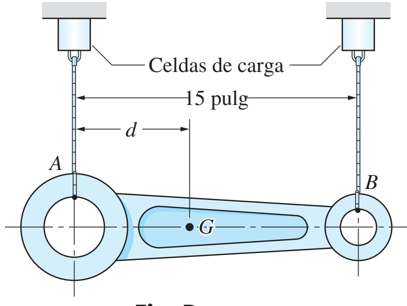


Fig. P17.42

17.43 El collar C homogéneo de 8 lb está sujeto a la varilla uniforme AB de 4 lb. El momento de inercia de masa de C respecto a su centro es $\bar{I}_z = 3.27 \times 10^{-3}$ slug · pie^2. El sistema está en reposo en la posición que se indica cuando la fuerza

horizontal P se aplica por el centro de masa del collar. Calcule la distancia d tal que la reacción del perno en A no cambie inmediatamente después de aplicar P.

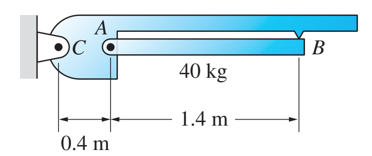


Fig. P17.44

17.44 La barra uniforme AB de 40 kg está unida al marco con un perno en A mientras que el extremo B descansa contra el marco. El montaje rota respecto a un eje vertical en C. En el instante que se muestra, la velocidad y la aceleración angular del montaje son 2 rad/s y 6 rad/s^2, ambas en sentido negativo. Determine la magnitud de la reacción del perno en A en este instante.

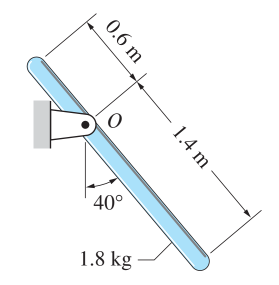


Fig. P17.45

17.45 La barra uniforme de 1.8 kg rota en el plano vertical respecto al perno en O. Cuando la barra está en la posición que se indica, su velocidad angular es 4 rad/s, en sentido negativo. Para esta posición, encuentre: (a) la aceleración angular de la barra y (b) la magnitud de la reacción del perno en O.

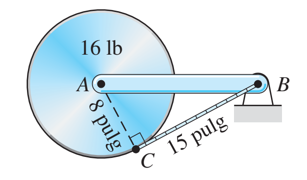


Fig. P17.46

17.46 El eje del disco homogéneo de 16 lb está montado en el extremo de la barra AB, que rota libremente en el plano vertical respecto al perno en B. El cable BC mantiene al disco en una posición fija relativa a la barra. Obtenga la tensión del cable inmediatamente después de que el montaje se libera a partir del reposo en la posición que se muestra. Desprecie la masa de la barra AB.

17.47 Una cuerda está enrollada alrededor de la polea uniforme B de 50 lb y unida al bloque A de 20 lb. Si el sistema se suelta a partir del reposo, encuentre: (a) la aceleración inicial de A y (b) la velocidad de A después de moverse 3 pies hacia abajo del plano inclinado. Desprecie la fricción.

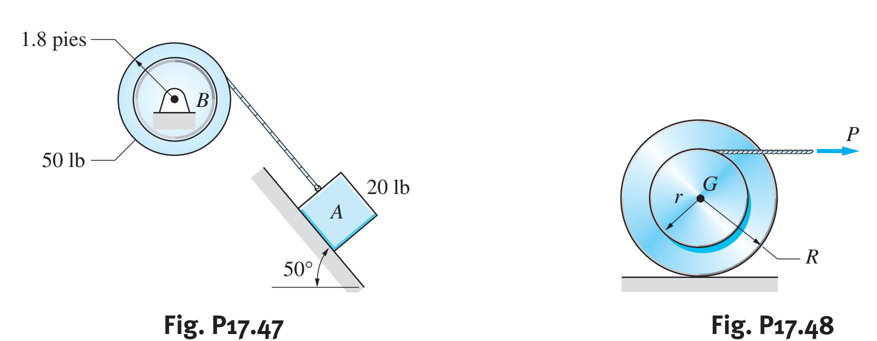


Fig. P17.47 **Fig. P17.48**

17.48 (a) Demuestre que el carrete de masa m y radio R puede rodar sin deslizarse sobre la superficie horizontal sin fricción si el radio del cubo es $r = \bar{I}/(mR)$, en donde $\bar{I}$ es el momento de inercia de masa del carrete respecto a G. (b) Si la superficie horizontal tiene fricción, ¿cuál es la dirección de la fuerza de fricción que actúa sobre el carrete si (i) $r > \bar{I}/(mR)$; y (ii) $r < \bar{I}/(mR)$?

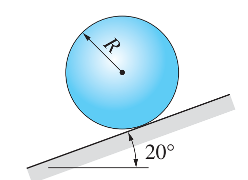


Fig. P17.49

17.49 La esfera homogénea de masa M y radio R se suelta a partir del reposo y se mueve hacia abajo del plano inclinado rugoso. Calcule la aceleración del centro de la esfera si el coeficiente de fricción estática es insuficiente para evitar el deslizamiento. El coeficiente de fricción cinética es 0.075.

17.50 El momento de inercia del carrete de 60 kg es $\bar{I} = 1.35 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$. Los coeficientes de fricción estática y cinética entre el carrete y el suelo son 0.30 y 0.27, respectivamente. Un cable enrollado en el cubo del carrete se jala con la fuerza horizontal constante $P = 200$ N. Encuentre la aceleración del cubo del carrete.

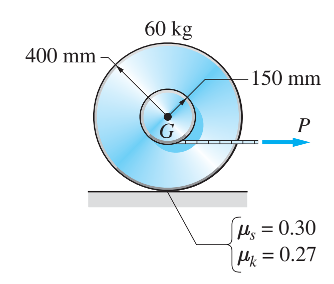


Fig. P17.50, P17.51

17.51 Resuelva el problema 17.50 si $P = 450$ N.



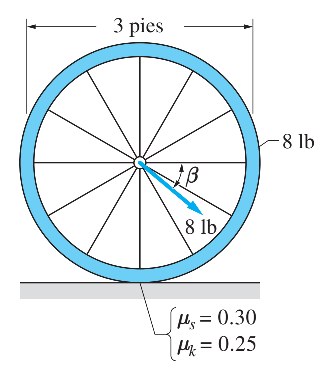


Fig. P17.52, P17.53

17.52 El borde de la rueda pesa 8 lb; los pesos del cubo y de los rayos son despreciables. Una fuerza de 8 lb, inclinada un ángulo β respecto a la horizontal, se aplica al centro de la rueda. Los coeficientes de fricción estática y cinética entre la rueda y el piso son 0.30 y 0.25, respectivamente. Si $\beta = 0$: (a) demuestre que la rueda se desliza sobre el piso y (b) encuentre la aceleración angular de la rueda y la aceleración de su centro.

17.53 Para la rueda que se describe en el problema 17.52, obtenga el menor ángulo β de manera que la rueda gire sin deslizarse y determine la aceleración angular correspondiente.

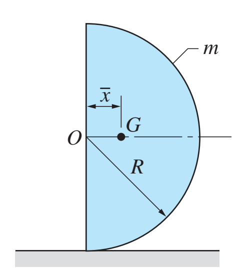


Fig. P17.54

17.54 El semicilindro homogéneo de masa m y radio R se suelta a partir del reposo en la posición que se muestra. Suponiendo que no hay deslizamiento, obtenga: (a) la aceleración angular inicial del semicilindro y (b) el menor coeficiente estático de fricción que es consistente con la condición de no deslizamiento. (Nota: el centro de masa del semicilindro se localiza en $\bar{x} = 4R/3\pi$, e $I_O = mR^2/2$).

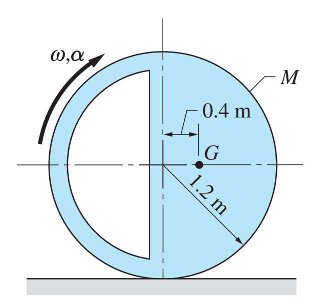


Fig. P17.55

17.55 El radio de giro del disco excéntrico de masa M respecto a su centro de masa G es 0.4 m. En la posición que se indica, la aceleración angular del disco es 3.0 rad/s^2. Suponiendo que ruede sin deslizarse, encuentre la velocidad angular del disco para esta posición.

17.56 Si la barra uniforme de 20 lb parte del reposo desde la posición que se muestra, determine la aceleración angular inicial de la barra. Desprecie la fricción.

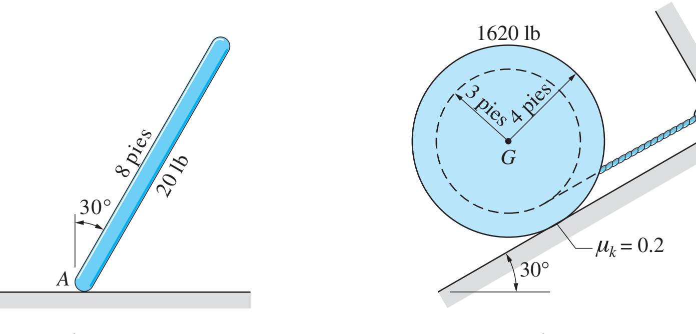


Fig. P17.56 **Fig. P17.57**

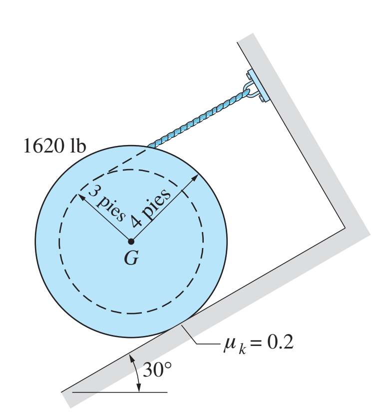


Fig. P17.58

17.57 El radio de giro del carrete de 1620 lb respecto a su centro de masa G es 1.75 pies. El cable enrollado alrededor del radio interno del carrete está unido al soporte rígido como se muestra. Si el carrete se mueve hacia abajo del plano rugoso, obtenga su aceleración angular y la tensión en el cable.

17.58 Repita el problema 17.57 si el cable se desenrolla desde lo alto del centro como se indica.

17.59 La barra homogénea *AB* de 3.6 kg está anclada al deslizador de 2 kg en *A*. El sistema estaba en reposo en la posición $\theta = 0$ antes de aplicar al collar la fuerza de 12 N. Despreciando la fricción, calcule la aceleración del collar y la aceleración angular de la barra inmediatamente después de aplicar la fuerza de 12 N.

Fig. P17.59

17.60 La delgada barra uniforme de 8 kg estaba en reposo, sobre el plano horizontal sin fricción, antes de aplicar la fuerza $F = 16$ N. Para el instante inmediatamente posterior a la aplicación de *F*, determine: (a) la aceleración del extremo *A* y (b) la coordenada *x* del punto sobre la barra que tiene una aceleración cero.

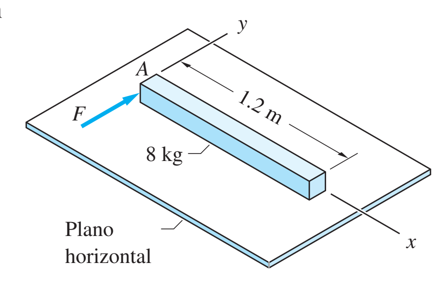


Fig. P17.60

17.61 La barra uniforme *AB* de masa *m* y longitud *L* parte del reposo en la posición que se indica. Si el plano inclinado carece de fricción, obtenga la aceleración inicial del extremo *A*.

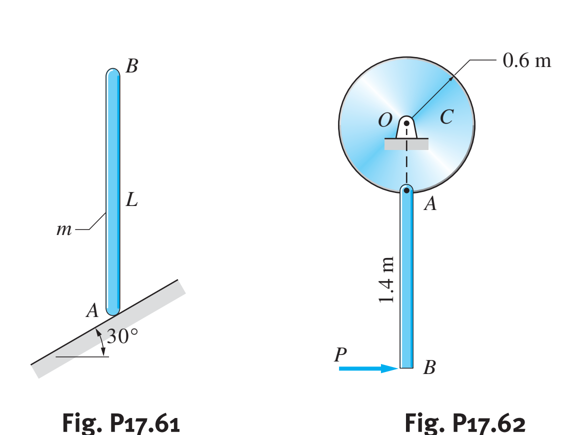


Fig. P17.61 **Fig. P17.62**

17.62 La barra uniforme *AB* de 30 kg cuelga de un perno unido al disco homogéneo *C* de 50 kg. El sistema está en reposo cuando se aplica la fuerza horizontal $P = 200$ N. Encuentre las aceleraciones angulares del disco y de la barra inmediatamente después de aplicar *P*.

17.63 El momento de inercia de masa del disco de 128 kg respecto a su centro de masa *G* es 20 $\text{kg} \cdot \text{m}^2$. El eje del disco se apoya en la mitad inferior de un cojinete de hendido. La cuerda enrollada sobre la periferia del disco se jala horizontalmente con velocidad v_0. Obtenga el valor mayor de v_0 tal que el eje del disco permanezca en el cojinete. Desprecie la fricción.

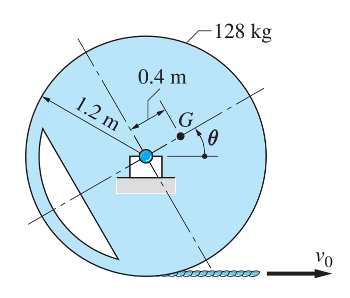


Fig. P17.63

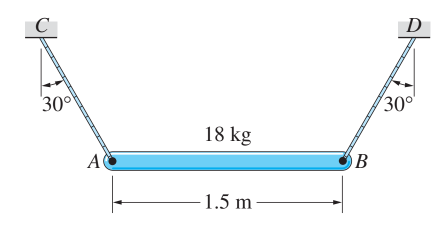


Fig. P17.64

17.64 La barra homogénea AB de 18 kg está en reposo en la posición que se muestra cuando la cuerda BD se corta. Determine los valores iniciales de: (a) la aceleración angular de la barra y (b) la aceleración del extremo B.

17.65 La varilla uniforme de masa m y longitud L se apoya en rodillos en A y B. Obtenga la aceleración del rodillo B inmediatamente después de que la varilla se suelta en la posición que se muestra. Desprecie las masas de los rodillos.

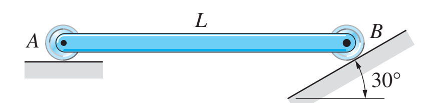


Fig. P17.65

***17.66** El perno B unido al extremo de la manivela uniforme AB de 8 oz se desliza en una ranura vertical en el deslizador CD de 12 oz. Se mantiene una velocidad angular constante de 2000 rev/min, en sentido positivo, mediante el par C_A. Determine C_A como una función del ángulo θ de la manivela y utilice esta expresión para demostrar que las fuerzas gravitacionales son despreciables comparadas con las inerciales. Desprecie la fricción.

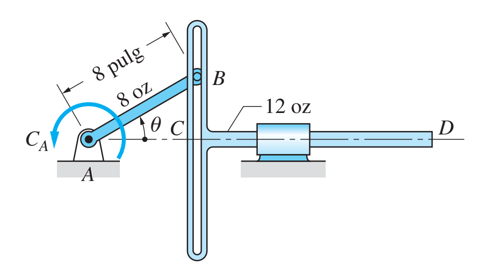


Fig. P17.66

*17.6 Ecuaciones diferenciales de movimiento

En el apartado precedente se analizó la deducción de las ecuaciones de movimiento para un cuerpo rígido empleando el método de los DCL-DMA. Los problemas respectivos se restringieron al cálculo de las fuerzas y aceleraciones en el instante en que el cuerpo estaba en una *posición específica*. En este apartado se considera el problema más práctico de determinar el movimiento de un cuerpo rígido como una función del tiempo y/o la posición. Como se observó en los capítulos anteriores, la determinación del movimiento implica dos pasos: primero deben deducirse las ecuaciones de movimiento y después deben integrarse (resolverse).

Las ecuaciones de movimiento se obtienen al aplicar el método DCL-DMA a una *posición arbitraria* del cuerpo. Las fuerzas que aparecen en las ecuaciones de movimiento resultantes entran en dos categorías: cargas aplicadas y fuerzas de restricción. En general las cargas aplicadas se dan como funciones del tiempo, la posición o la velocidad. Por otro lado, las fuerzas de restricción, como las reacciones en los pernos, se desconocen. Dado que las ecuaciones de movimiento son integrables

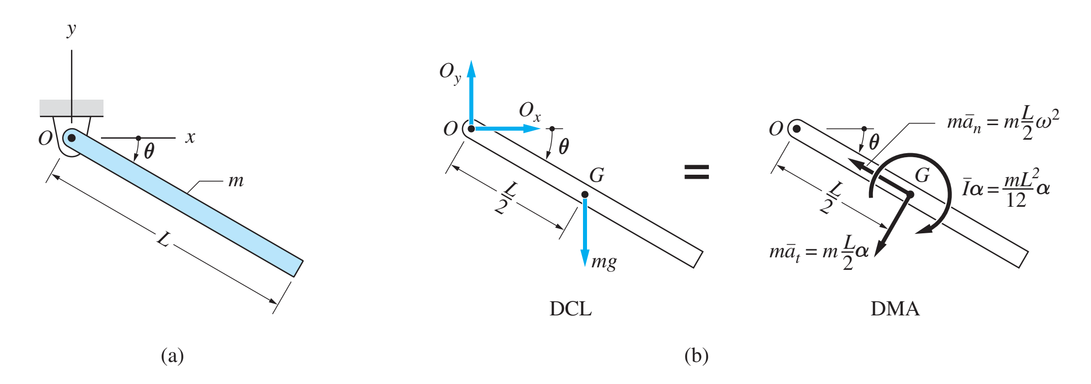


Fig. 17.14

cuando sólo tienen variables cinemáticas (las coordenadas generalizadas y sus derivadas) como incógnitas, las fuerzas de restricción deben eliminarse de las ecuaciones de movimiento. Las ecuaciones restantes, después del proceso de eliminación, se conocen como *ecuaciones diferenciales de movimiento*.

Como ejemplo, considere la barra homogénea de masa m y longitud L que se muestra en la figura 17.14(a). Se determinará el movimiento resultante cuando se suelta la barra a partir del reposo en $\theta = 0$. En la figura 17.14(b) se muestran el DCL y el DMA de la barra para un valor arbitrario de θ. De estos diagramas se obtienen las siguientes tres ecuaciones de movimiento independientes:

$$\Sigma F_x = m\bar{a}_x \quad \xrightarrow{+} \quad O_x = -\frac{mL}{2}\omega^2\cos\theta - \frac{mL}{2}\alpha\,\text{sen}\,\theta \tag{a}$$

$$\Sigma F_y = m\bar{a}_y \quad +\!\uparrow \quad O_y - mg = \frac{mL}{2}\omega^2\,\text{sen}\,\theta - \frac{mL}{2}\alpha\cos\theta \tag{b}$$

$$\Sigma M_G = \bar{I}\alpha \quad \circlearrowright\!+ \quad O_x\frac{L}{2}\,\text{sen}\,\theta + O_y\frac{L}{2}\cos\theta = \frac{mL^2}{12}\alpha \tag{c}$$

Esas ecuaciones de movimiento contienen las componentes de la reacción desconocida del perno en O, además de las variables cinemáticas θ, ω y α. Al sustituir las expresiones para O_x y O_y, obtenibles de las ecuaciones (a) y (b), en la ecuación (c) se deduce la ecuación diferencial de movimiento:

$$\alpha = \ddot{\theta} = (3g/2L)\cos\theta \tag{d}$$

La ecuación (d) también podría obtenerse directamente del caso especial de la ecuación de movimiento para el momento: $\Sigma M_O = I_O\alpha$.

Ahora es posible establecer las siguientes conclusiones.

1. Si un problema puede resolverse, el número de ecuaciones de movimiento independientes es igual al número de grados de libertad (GDL) más el número de fuerzas desconocidas. En el ejemplo anterior, las ecuaciones de movimiento independientes fueron tres, el cuerpo tuvo un grado de libertad (GDL) (siendo θ

la coordenada generalizada), con dos componentes desconocidas de la reacción del perno en O.

2. Debido a que se requiere una ecuación del movimiento para eliminar a todas las fuerzas de restricción desconocidas, el número de ecuaciones diferenciales de movimiento es igual al número de GDL. En el ejemplo anterior, se utilizaron las ecuaciones (a) y (b) para eliminar O_x y O_y, lo que resultó en una sola ecuación diferencial de movimiento, la (d).

Las ecuaciones diferenciales de movimiento pueden resolverse analíticamente sólo en pocos casos especiales, siendo la integración numérica el método principal de solución. Sin embargo, en este apartado se consideran soluciones analíticas y numéricas. En cualquier caso, la solución de las ecuaciones diferenciales del movimiento (observe que son ecuaciones de segundo orden) requiere el conocimiento de dos *condiciones iniciales* para cada GDL: los valores de las coordenadas generalizadas y velocidades generalizadas en algún instante de tiempo (en general, en $t = 0$).

Algunas veces es posible obtener una solución parcial para las ecuaciones diferenciales del movimiento en forma cerrada, mientras que la solución completa requeriría la integración numérica. Por ejemplo, para obtener la expresión para ω en contraste con θ para la barra que se muestra en la figura 17.14, se sustituye α de la ecuación (d) en $\alpha\, d\theta = \omega\, d\omega$, con lo que se obtiene

$$\omega\, d\omega = (3g/2L)\cos\theta\, d\theta \tag{e}$$

Al integrar ambos lados de esta ecuación y aplicar la condición inicial $\omega = 0$ cuando $\theta = 0$, la relación entre ω y θ será

$$\omega = \sqrt{(3g/2L)\operatorname{sen}\theta} \tag{f}$$

Sin embargo, las relaciones entre las variables cinemáticas y el *tiempo*, no pueden determinarse fácilmente. Para encontrar θ en contraste con el tiempo, por ejemplo, se sustituye ω de la ecuación (f) en $\omega = d\theta/dt$. Al resolver para dt, se encuentra

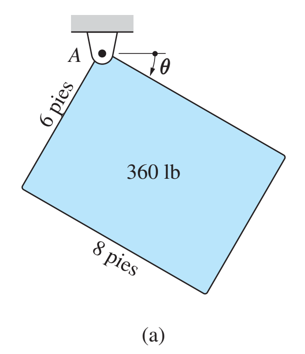
$$dt = d\theta/\sqrt{(3g/2L)\operatorname{sen}\theta} \tag{g}$$

El lado derecho de la ecuación (g) no puede integrarse en una forma cerrada. Por tanto, se observa que aun los problemas relativamente sencillos quizá necesiten la integración numérica para determinar por completo el movimiento.

Debe mencionarse que después de encontrar los valores de ω y α como funciones de θ, pueden emplearse las ecuaciones (a) y (b) para obtener O_x y O_y, también como funciones de θ. De modo similar, si se han obtenido θ, ω y α como funciones del tiempo, entonces las ecuaciones (a) y (b) determinarán a O_x y O_y como funciones del tiempo.

Problema de ejemplo **17.10**

La placa uniforme de 360 lb que se muestra en la figura (a) rota en el plano vertical respecto al perno en *A*. La placa se suelta del reposo cuando $\theta = 0$. 1. Demuestre que la ecuación diferencial del movimiento para la placa es $\alpha = 0.9660(4 \cos\theta - 3 \text{ sen }\theta)$ rad/s^2. 2. Integre analíticamente la ecuación diferencial de movimiento para obtener la velocidad angular de la placa como una función de θ. 3. Encuentre el valor máximo de θ.



(a)

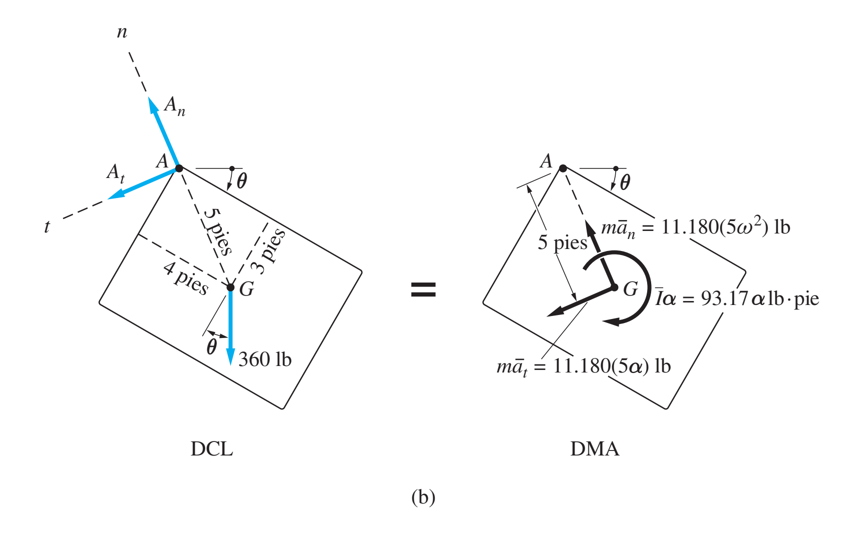
Solución

Parte 1

La masa de la placa es $m = 360/32.2 = 11.180$ slugs y el momento de inercia respecto a su centro de masa *G* es (véase la tabla 17.1)

$$\bar{I} = \frac{1}{12}m(b^2 + c^2) = \frac{1}{12}(11.180)(8^2 + 6^2) = 93.17 \text{ slug} \cdot \text{pie}^2$$

La figura (b) muestra los diagramas de cuerpo libre (DCL) y de masa-aceleración (DMA) para una posición arbitraria de la placa. El DCL contiene A_n y A_t, las componentes desconocidas de las reacciones del perno en *A* y el peso de 360 lb que actúa en *G*. El DMA consta del par de inercia $\bar{I}\alpha$ y las componentes del vector de inercia $m\bar{\mathbf{a}}$ que actúa en *G*. Debido a que la trayectoria de *G* es un círculo de radio $r = 5$ pies centrado en *A*, la componente normal de $\bar{\mathbf{a}}$ es $\bar{a}_n = r\omega^2 = 5\omega^2$ pies/s^2 y su componente tangencial es $\bar{a}_t = r\alpha = 5\alpha$ pies/s^2. Observe que en el DMA se ha supuesto que la aceleración angular α tiene sentido negativo. Las unidades para ω y α son rad/s y rad/s^2, respectivamente.



(b)

Ya que el ángulo θ determina por completo la posición de la placa, ésta sólo tiene un grado de libertad. Por tanto, sólo existe una ecuación diferencial del movi-

miento. El método más conveniente para deducir esta ecuación es igualar los momentos respecto de A en el DCL y el DMA, con lo que se obtiene

$$(\Sigma M_A)_{\text{DCL}} = (\Sigma M_A)_{\text{DMA}}$$

$$\circlearrowright+ \quad (360\cos\theta)(4) - (360\,\text{sen}\,\theta)(3) = 93.17\alpha + 11.180(5\alpha)5$$

que se reduce a

$$\alpha = 0.9660(4\cos\theta - 3\,\text{sen}\,\theta)\ \text{rad/s}^2 \qquad \textit{Respuesta} \quad \text{(a)}$$

Podría obtenerse un resultado idéntico al usar el caso especial de la ecuación del momento: $\Sigma M_A = I_A\alpha$.

Parte 2

Para encontrar la velocidad angular como una función de θ, se sustituye α de la ecuación (a) en $\omega\, d\omega = \alpha\, d\theta$, que da

$$\omega\, d\omega = 0.9660(4\cos\theta - 3\,\text{sen}\,\theta)\, d\theta$$

El resultado de integrar esta ecuación es

$$\frac{\omega^2}{2} = 0.9660(4\,\text{sen}\,\theta + 3\cos\theta) + C$$

La constante de integración C se evalúa aplicando la condición inicial $\omega = 0$ cuando $\theta = 0$, que da $C = -3(0.9660)\ \text{rad}^2/\text{s}^2$. Por tanto, la ecuación anterior queda

$$\frac{\omega^2}{2} = 0.9660(4\,\text{sen}\,\theta + 3\cos\theta - 3)$$

de donde es posible encontrar la velocidad angular

$$\omega = \pm 1.390\sqrt{4\,\text{sen}\,\theta + 3\cos\theta - 3}\ \text{rad/s} \qquad \textit{Respuesta} \quad \text{(b)}$$

Parte 3

El máximo valor de θ ocurre cuando $\omega = 0$. De acuerdo con la ecuación (b), este valor es la raíz distinta de cero de la ecuación $4\,\text{sen}\,\theta + 3\cos\theta - 3 = 0$. La solución numérica de esta ecuación es

$$\theta_{\text{max}} = 106.3° \qquad \textit{Respuesta}$$

Sólo se utilizó una ecuación de movimiento para determinar el movimiento de la placa. Las restantes dos ecuaciones de movimiento independientes, por ejemplo, $\Sigma F_n = m\bar{a}_n$ y $\Sigma F_t = m\bar{a}_t$, podrían emplearse ahora para encontrar las componentes

de la reacción en el perno, A_n y A_t, en términos de θ, ω y α. Al sustituir para α de la ecuación (a) y ω de la ecuación (b), se obtendrían A_n y A_t como funciones de θ únicamente.

Problema de ejemplo 17.11

Para la placa descrita en el problema de ejemplo 17.10: 1. Resuelva numéricamente la ecuación diferencial de movimiento desde el tiempo en que la placa se suelta hasta que por primera vez θ alcanza su valor máximo; y 2. Utilice la solución numérica para determinar el máximo valor de θ y el tiempo en que esto ocurre por primera vez.

Solución

Parte 1

La ecuación diferencial de movimiento que se dio en el problema de ejemplo 17.10 es $\alpha = 0.9660(4 \cos \theta - 3 \operatorname{sen} \theta)$ rad/s^2. Las ecuaciones de primer orden equivalentes son

$$\dot{\theta} = \omega \qquad \dot{\omega} = 0.9660(4 \cos \theta - 3 \operatorname{sen} \theta) \text{ rad/s}^2 \tag{a}$$

con las condiciones iniciales $\theta = \omega = 0$ en $t = 0$ (el tiempo en que la placa se suelta). Con

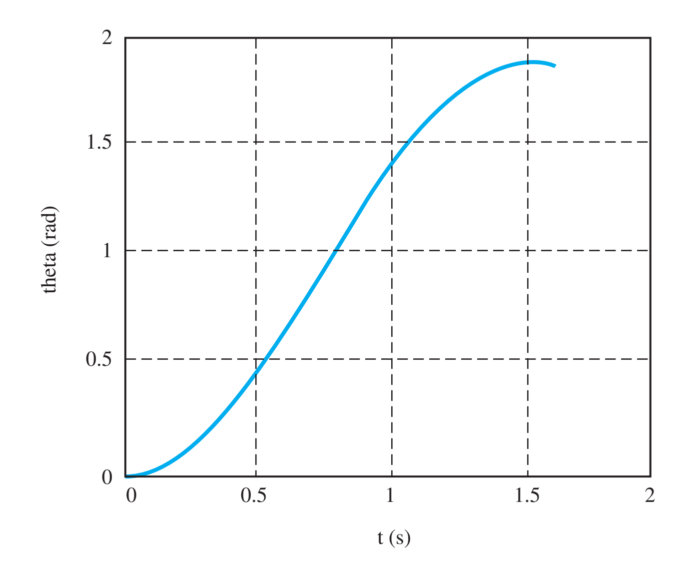
$$x_1 = \theta \quad x_2 = \omega$$

se obtiene el siguiente programa MATLAB para la solución de las ecuaciones diferenciales de la ecuación (a):

```
function example17_11
x0 =[0 0];
time =[0:0.05:1.6];
[t,x] = ode45 (@f,time,x0);
axes('fontsize',14)
plot(t,x(:,1),'linewidth',1.5)
grid on
xlabel('t (s)'); ylabel('theta (rad)')
printSol(t,x)

      function dxdt = f(t,x)
      dxdt = [x(2)
             0.9660*(4*cos(x(1))-3*sin(x(1)))];
      end
end
```

El periodo de integración es de $t = 0$ al tiempo en que θ alcanza por primera vez su máximo valor (donde $\omega = 0$). Mediante prueba y error se encontró que este tiempo es de aproximadamente 1.5 s. En la siguiente figura se muestra la gráfica de θ contra el tiempo.



Parte 2

Para obtener el tiempo en que θ está en su máximo es preciso examinar la salida numérica en la vecindad en que ω cambia de signo. A continuación se muestran dos líneas del resultado que generan $\omega = 0$.

```
     t              x1              x2
1.5000e+000  1.8544e+000   3.9827e-002
1.5500e+000  1.8515e+000  -1.5325e-001
```

Sea t_1 el tiempo cuando $\omega = 0$, entonces la interpolación lineal da

$$\frac{-0.15325 - 0.0039827}{1.55 - 1.50} = \frac{0 - 0.0039827}{t_1 - 1.50}$$

La solución es

$$t_1 = 1.501 \text{ s}$$ *Respuesta*

De esta impresión se deduce, por inspección, que

$$\theta_{max} = 1.854 \text{ rad} = 106.2°$$ *Respuesta*

Problemas

17.67 La barra uniforme AB de masa m, sostenida por dos alambres, se suelta del reposo cuando $\theta = \theta_0$. (a) Demuestre que la ecuación diferencial del movimiento es $\alpha = -(g/L)$ sen θ. (b) Integre analíticamente la ecuación diferencial de movimiento para encontrar ω como una función de θ. (c) Determine la fuerza en cada alambre como una función de θ.

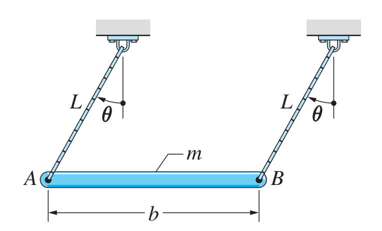


Fig. P17.67

17.68 El poste AB uniforme de masa m se iza desde el reposo en la posición horizontal ($\theta = 90°$) mediante un cable que pasa sobre la polea C. La fuerza que actúa en el extremo del cable tiene magnitud constante $P = mg/\sqrt{2}$ (es igual a la fuerza menor necesaria para iniciar el movimiento). (a) Pruebe que la ecuación diferencial de movimiento es $\alpha = 3g/(2L)[\text{sen}\,\theta - \sqrt{2}\cos(\theta/2)]$. (b) Integre analíticamente la ecuación diferencial de movimiento para obtener ω en términos de θ. (c) ¿Cuál es la velocidad angular del poste cuando llega a la posición vertical?

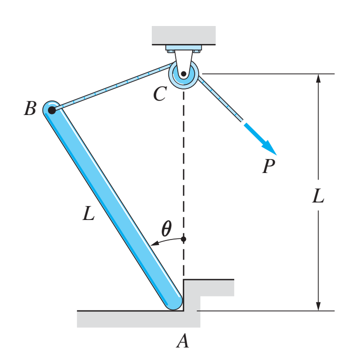


Fig. P17.68

17.69 Las dimensiones de la caja homogénea de 40 kg son $h = 0.8$ m y $b = 0.6$ m. La caja está en reposo sobre la superficie horizontal lubricada, entonces la fuerza constante $P = 220$ N se aplica al tiempo $t = 0$. La fuerza de arrastre hidrodinámica del lubricante durante el movimiento resultante es $F_D = 20v$ N, en donde v es la rapidez de la caja en metros/segundo. (a) Demuestre que la ecuación diferencial del movimiento de la caja es $a = 5.5 - 0.5v$ m/s^2. (b) Obtenga el tiempo en que se voltea la caja.

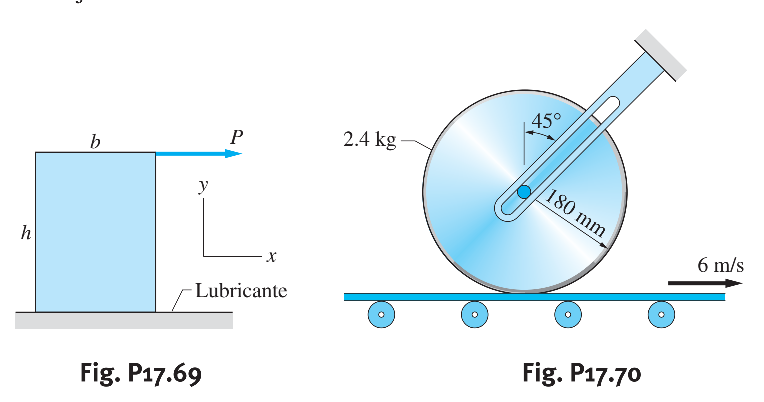


Fig. P17.69 **Fig. P17.70**

17.70 El eje del disco homogéneo de 2.4 kg se ajusta en una ranura inclinada. El disco está inicialmente en reposo y entonces se coloca sobre la banda transportadora que se mueve con rapidez constante de 6 m/s. El coeficiente de fricción cinética entre el disco y la banda es 0.15. Calcule: (a) la aceleración angular del disco durante el tiempo que resbala sobre la banda y (b) el número de revoluciones que el disco efectúa antes de que alcance su rapidez angular final.

17.71 El delgado borde de la rueda pesa 18 lb; pueden despreciarse los pesos de los rayos y del cubo. Antes de bajar la barra homogénea AB de 6 lb a la posición que se muestra, la rueda giraba libremente a 400 rev/min en sentido negativo. Si el coeficiente cinético de fricción en B es 0.75, determine: (a) la aceleración angular de la rueda y (b) el tiempo que tarda la rueda en detenerse.

17.72 Repita el problema 17.71 para el caso en que la rueda al principio giraba a 400 rev/min en sentido positivo.

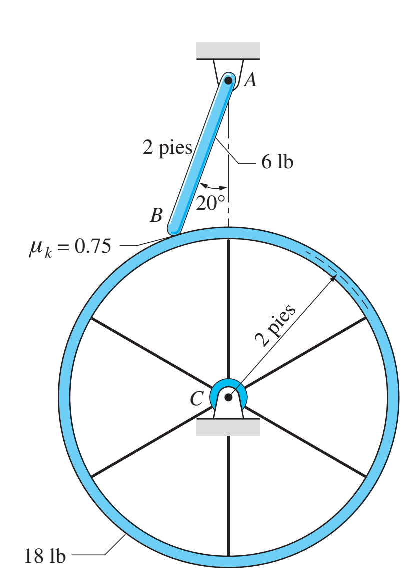


Fig. P17.71, P17.72

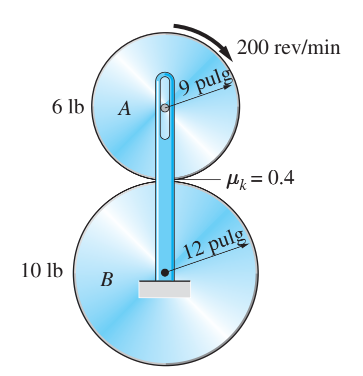


Fig. P17.73

17.73 El eje del disco uniforme A de 6 lb puede deslizarse en la ranura vertical, mientras que el eje del disco uniforme B de 10 lb está fijo. El coeficiente de fricción cinética entre los discos es 0.4. El disco A rota a 200 rev/min en sentido negativo cuando se baja sobre el disco estacionario B. Determine: (a) la aceleración angular de cada disco durante el tiempo en que sucede el deslizamiento y (b) la rapidez angular final de cada disco.

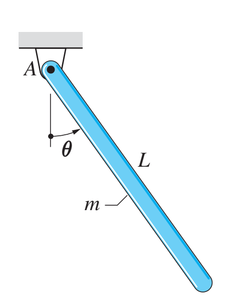


Fig. P17.74

17.74 La barra homogénea AB de masa m y longitud L se suelta desde el reposo en la posición $\theta = \theta_0$. (a) Demuestre que la ecuación diferencial del movimiento es $\alpha = -(3g/2L)$ senθ. (b) Integre analíticamente las ecuaciones diferenciales para encontrar ω como una función de θ. (c) Obtenga el máximo valor de la componente vertical de la reacción del perno en A y el valor de θ en donde esto ocurre.

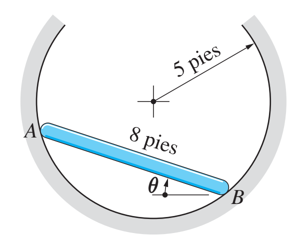


Fig. P17.75

17.75 Después de que la barra uniforme AB de 24 lb se suelta del reposo en la posición $\theta = 35°$, se desliza dentro de la superficie cilíndrica sin fricción. (a) Demuestre que la ecuación diferencial de movimiento es $\alpha = -6.740$ sen θ rad/s^2. (b) Integre analíticamente la ecuación diferencial de movimiento para obtener ω en términos de θ. (c) Encuentre la reacción normal en A como una función de θ.

17.76 El radio de giro de la polea de 20 lb respecto a su centro de masa G es 12 pulg. El peso de 2.5 lb se encuentra suspendido de una cuerda enrollada en la polea. (a) Deduzca la ecuación diferencial del movimiento para la polea. (b) Si se da a la polea una velocidad angular inicial de 10 rad/s en sentido positivo cuando $\theta = 0$, encuentre θ cuando el sistema llega al reposo.

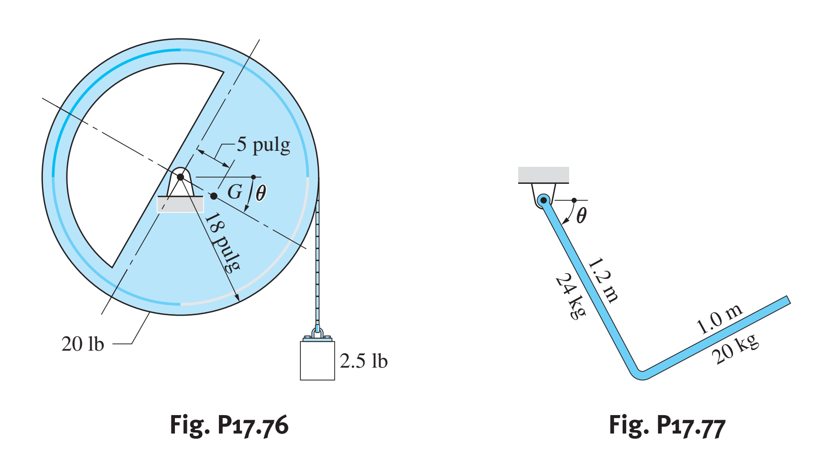


Fig. P17.76

Fig. P17.77

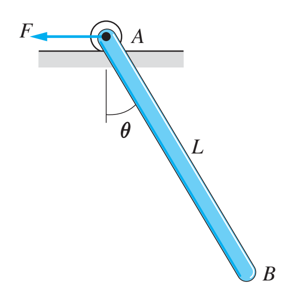


Fig. P17.78

17.77 La barra en forma de L se libera a partir del reposo cuando $\theta = 0$. (a) Demuestre entonces que la ecuación diferencial del movimiento es $\alpha = 8.017 \cos\theta +$ 2.088 sen θ rad/s^2. (b) Integre analíticamente la ecuación de movimiento para obtener la expresión de ω en términos de θ. (c) Determine el máximo valor de ω y el valor correspondiente de θ. (d) Obtenga el máximo valor de θ.

17.78 La barra uniforme AB de masa m está en reposo en la posición $\theta = 0$ cuando la fuerza F imprime la aceleración constante $a_A = g$ sobre el extremo A. (a) Despreciando la masa del rodillo, pruebe que la ecuación diferencial de movimiento para AB es $\alpha = (3g/2L)(\cos\theta -$ sen $\theta)$. (b) Integre analíticamente la ecuación diferen-

cial de movimiento para encontrar la velocidad angular ω como una función de θ. (c) Determine el máximo valor de θ y el valor correspondiente de F.

17.79 El montaje en forma de T con masa total m se elaboró soldando dos varillas idénticas de longitud L. Si el montaje se suelta a partir del reposo cuando $\theta = 0$, obtenga su velocidad angular ω y aceleración angular α del montaje como funciones de θ.

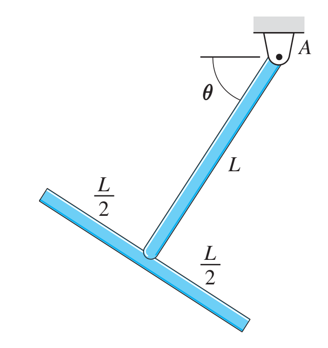


Fig. P17.79

17.80 El bloque homogéneo de 60 lb está anclado a los enlaces paralelos AB y CD de peso despreciable. El montaje está inicialmente en reposo en la posición $\theta = 0$ cuando sobre AB se aplica un par constante de 240 lb · pie. (a) Demuestre que la ecuación diferencial del movimiento es $\alpha = 14.311 - 10.733 \cos\theta$ rad/s^2. (b) Integre analíticamente la ecuación diferencial del movimiento para obtener ω como una función de θ.

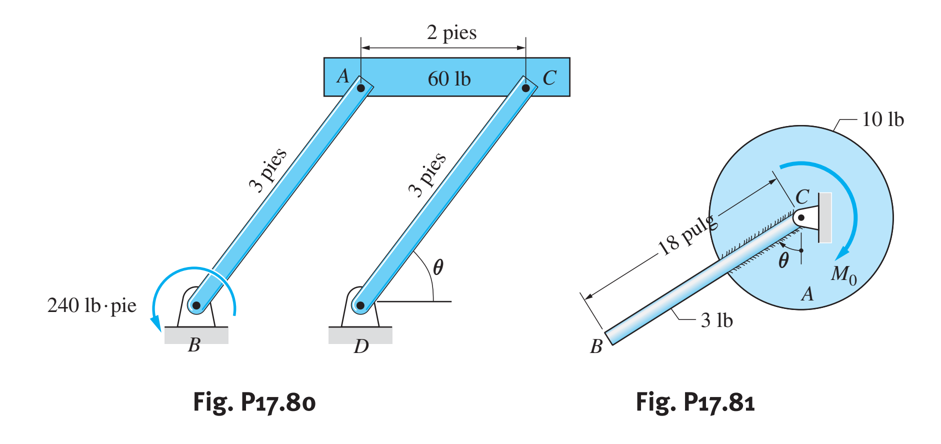
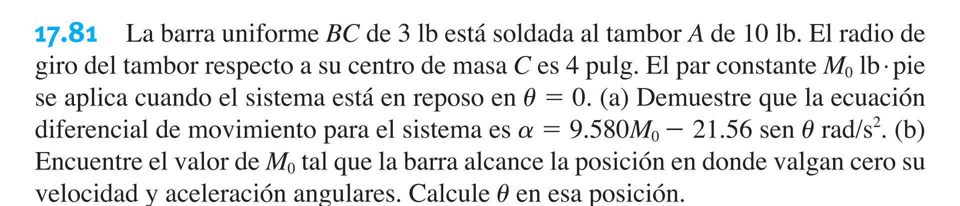


Fig. P17.80 **Fig. P17.81**


17.81 La barra uniforme BC de 3 lb está soldada al tambor A de 10 lb. El radio de giro del tambor respecto a su centro de masa C es 4 pulg. El par constante M_0 lb · pie se aplica cuando el sistema está en reposo en $\theta = 0$. (a) Demuestre que la ecuación diferencial de movimiento para el sistema es $\alpha = 9.580M_0 - 21.56 \text{ sen } \theta$ rad/s^2. (b) Encuentre el valor de M_0 tal que la barra alcance la posición en donde valgan cero su velocidad y aceleración angulares. Calcule θ en esa posición.

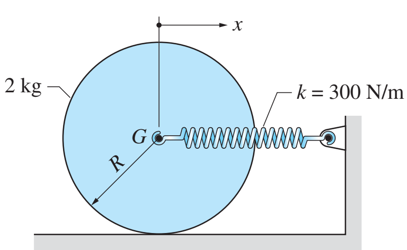
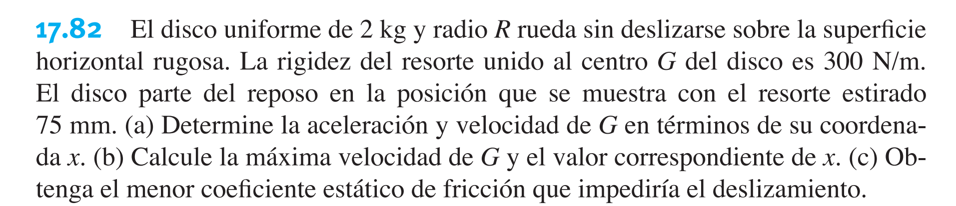


Fig. P17.82


17.82 El disco uniforme de 2 kg y radio R rueda sin deslizarse sobre la superficie horizontal rugosa. La rigidez del resorte unido al centro G del disco es 300 N/m. El disco parte del reposo en la posición que se muestra con el resorte estirado 75 mm. (a) Determine la aceleración y velocidad de G en términos de su coordenada x. (b) Calcule la máxima velocidad de G y el valor correspondiente de x. (c) Obtenga el menor coeficiente estático de fricción que impediría el deslizamiento.

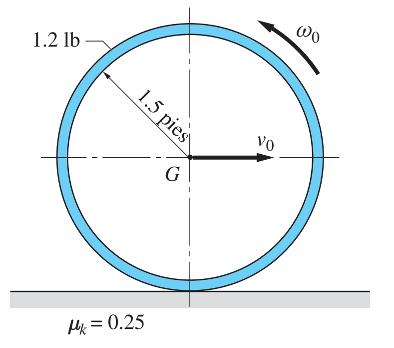
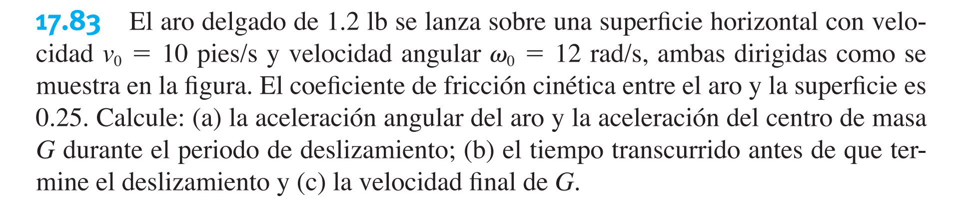


Fig. P17.83


17.83 El aro delgado de 1.2 lb se lanza sobre una superficie horizontal con velocidad $v_0 = 10$ pies/s y velocidad angular $\omega_0 = 12$ rad/s, ambas dirigidas como se muestra en la figura. El coeficiente de fricción cinética entre el aro y la superficie es 0.25. Calcule: (a) la aceleración angular del aro y la aceleración del centro de masa G durante el periodo de deslizamiento; (b) el tiempo transcurrido antes de que termine el deslizamiento y (c) la velocidad final de G.

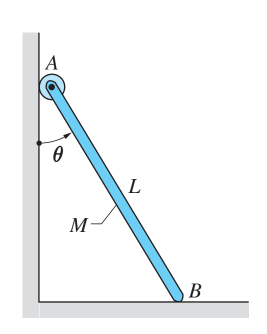


Fig. P17.84

***17.84** La escalera uniforme AB de longitud $L = 3$ m y masa $M = 25$ kg se suelta a partir del reposo cuando $\theta = 30°$. La fricción entre la escalera y el piso es despreciable. (a) Deduzca las expresiones para la velocidad y aceleración angulares de la escalera, suponiendo que el extremo A permanece en contacto con la pared vertical. (b) Obtenga la expresión para la fuerza de contacto en A como una función de θ. (c) ¿En qué valor de θ el extremo A perderá contacto con la pared?

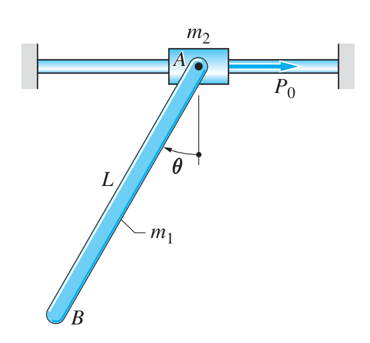


Fig. P17.85, P17.86

17.85 La barra AB de masa m_1 y longitud L está anclada al collar deslizante de masa m_2. El sistema está en reposo con $\theta = 0$ cuando la fuerza horizontal constante P_0 se aplica al collar. (a) Suponiendo que la fricción es despreciable, demuestre que la ecuación diferencial de movimiento para la barra AB es

$$\alpha = \frac{2P_0\cos\theta - 2g(m_1 + m_2)\operatorname{sen}\theta - m_1 L\omega^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta}{(4L/3)(m_1 + m_2) + m_1 L\cos^2\theta}$$

(b) Utilice la integración numérica para encontrar el máximo valor de θ durante los primeros dos segundos del movimiento. Aplique los siguientes datos: $m_1 = 3.6$ kg, $m_2 = 2.0$ kg, $L = 0.8$ m y $P_0 = 12$ N. (c) Grafique θ contra tiempo para el periodo de integración.

17.86 Cuando la posición angular θ de un cuerpo es suficientemente pequeña, sus ecuaciones de movimiento pueden simplificarse mediante las aproximaciones sen $\theta \approx \theta$ y cos $\theta \approx 1$. Aplicando estas aproximaciones a la ecuación diferencial de movimiento del problema 17.85, resuelva los incisos (b) y (c). Compare el máximo valor de θ con 24.6°, el valor obtenido si no se emplean las aproximaciones de ángulo pequeño.

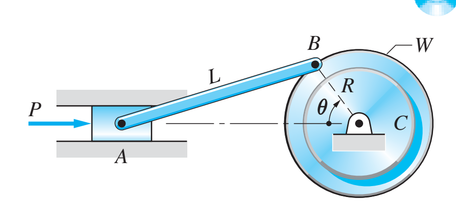


Fig. P17.87

17.87 La máquina de vapor consiste en el volante de inercia balanceado C unido con un perno a la biela AB. La biela, a su vez, está anclada al pistón A de doble acción. La presión del vapor se regula de modo que la fuerza P ejercida sobre el pistón varíe con el ángulo θ como $P = P_0$ sen θ, en donde P_0 es una constante. El peso del volante es W y su radio de giro respecto a su centro de masa es $\bar{k}$; es posible despreciar los pesos del pistón y de la biela. (a) Demuestre que la ecuación diferencial del movimiento para el volante es

$$\alpha = \frac{gP_0R\operatorname{sen}\theta}{W\bar{k}^2}\left(\operatorname{sen}\theta + \frac{\cos\theta}{\sqrt{(L/R)^2 - \operatorname{sen}^2\theta}}\right)$$

(b) Si el volante arranca del reposo cuando $\theta = 90°$, determine por integración numérica el tiempo requerido para que alcance una rapidez de 10 rad/s. Utilice los siguientes datos: $W = 180$ lb, $\bar{k} = 0.6$ pies, $R = 0.75$ pies, $L = 1.5$ pies, $P_0 = 24$ lb. (c) Grafique la rapidez angular contra tiempo para el periodo de integración.

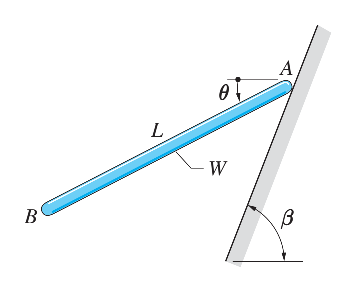


Fig. P17.88

17.88 La varilla uniforme AB se suelta del reposo cuando $\theta = 0$ con el extremo A en contacto con la superficie inclinada sin fricción. (a) Suponga que el extremo A mantiene contacto con la superficie, pruebe que la ecuación diferencial que rige el movimiento angular de la varilla es

$$\alpha = \frac{(2g/L)(\cos\theta - \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\phi) - \omega^2\operatorname{sen}\phi\cos\phi}{(4/3) - \operatorname{sen}^2\phi} \quad \text{rad/s}^2$$

donde $\phi = \beta - \theta$. (b) Resuelva numéricamente la ecuación diferencial del movimiento del inciso (a) desde el tiempo en que se suelta la varilla hasta que el extremo B hace contacto con la superficie inclinada.

Aplique esta solución para determinar ω en el tiempo de contacto. Utilice los datos $L = 8$ pies, $W = 30$ lb, $\beta = 60^\circ$.

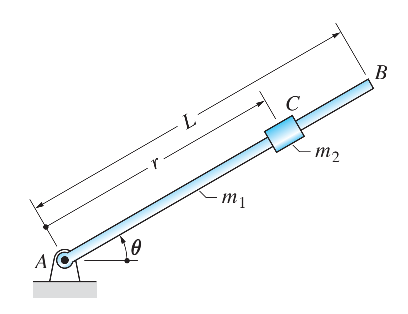


Fig. P17.89

17.89 El pequeño collar C de masa m_2 se desliza con fricción despreciable sobre la varilla AB de masa m_1 y longitud L. El sistema se libera desde el reposo cuando $\theta = \theta_0$ y $r = L$. (a) Demuestre que las ecuaciones diferenciales de movimiento del sistema son

$$\ddot{r} = -g \operatorname{sen}\theta + r\dot{\theta}^2$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{3}{2}\frac{g\cos\theta[L(m_1/m_2) + 2r] + 4r\dot{r}\dot{\theta}}{L^2(m_1/m_2) + 3r^2}$$

(b) Integre numéricamente las ecuaciones desde el tiempo en que se libera hasta que el collar abandona la varilla en B y grafique r contra θ. Utilice $\theta_0 = 60^\circ$, $m_1/m_2 = 2$, $L = 1.5$ pies, $g = 32.2$ pies/s^2.

17.90 El pequeño collar D de masa m se desliza sobre la varilla AB. Un resorte ligero con rigidez k une el collar con el extremo A de la varilla. El resorte no está deformado cuando el collar se encuentra en la posición $r = r_0$. La varilla y el marco ACB rotan libremente respecto al eje vertical OC, su momento de inercia combinado respecto a ese eje es I. Un agitador (que no se muestra) mueve la base E de tal manera que la posición de E esté dada por $y(t) = a \operatorname{sen} pt$, en donde a y p son constantes. (a) Pruebe que las ecuaciones diferenciales del movimiento del sistema son

$$\ddot{r} = -\frac{k}{m}(r - r_0) + r\dot{\theta}^2 + ap^2 \operatorname{sen} pt \operatorname{sen}\theta$$

$$\ddot{\theta} = \frac{r}{(I/m) + r^2}(ap^2 \operatorname{sen} pt \cos\theta - 2\dot{r}\dot{\theta})$$

(b) Resuelva numéricamente las ecuaciones diferenciales de movimiento desde $t = 0$ a 3 s y grafique θ contra t. Suponga que el movimiento inicia en $t = 0$ con el sistema en reposo en la posición $\theta = 0$ y $r = r_0$. De la solución, obtenga la dirección de rotación (como se ve desde arriba). Utilice los siguientes datos: $m = 0.125$ kg, $k = 3.125$ N/m, $r_0 = 50$ mm, $I = 312.5 \times 10^{-6}$ kg · m^2, $a = 10$ mm y $p = 10$ rad/s.

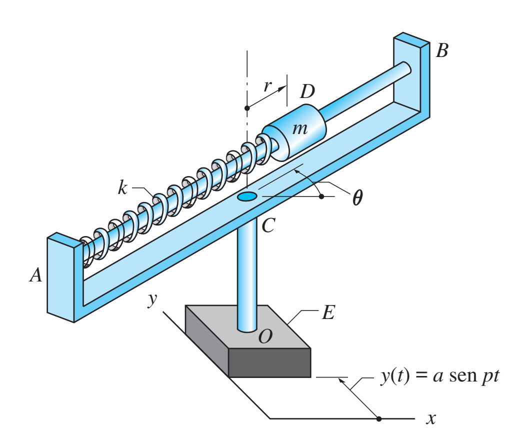


Fig. P17.90

Repaso de ecuaciones

Momento de inercia de masa

El momento de inercia de masa de un cuerpo respecto a un eje (el eje a) es

$$I_a = \int_{\mathcal{V}} r^2\, dm = mk_a^2$$

r = distancia perpendicular del eje a la masa diferencial dm
$\mathcal{V}$ = volumen que ocupa el cuerpo de masa m
k_a = radio de giro del cuerpo respecto al eje a

Teorema de los ejes paralelos

$$I_a = \bar{I}_a + md^2$$

$\bar{I}_a$ = momento de inercia de masa respecto al eje centroidal que es paralelo al eje a
d = distancia entre el eje centroidal y el eje a

Cantidad de movimiento angular de un cuerpo rígido con movimiento en un plano

$h_G = \bar{I}\omega$ (respecto al centro de masa G)
$h_A = I_A\omega$ (respecto al centro instantáneo A para las velocidades)
$h_G = \bar{I}\omega + m\bar{v}d$ (respecto a un punto arbitrario A)

d = brazo de momento del vector de cantidad de movimiento $m\bar{\mathbf{v}}$ respecto de A

Ecuaciones de movimiento en un plano

$$\Sigma \mathbf{F} = m\bar{\mathbf{a}}$$

$\Sigma M_G = \bar{I}\alpha$ (G es el centro de masa)

$\Sigma M_A = I_A\alpha$ (el punto A está fijo en el cuerpo y en el espacio)

$\Sigma M_A = \bar{I}\alpha + m\bar{a}d$ (A es un punto arbitrario)

d = brazo de momento del vector de inercia $m\bar{\mathbf{a}}$ respecto a A

Problemas de repaso

17.91 La figura que se muestra está hecha de un alambre delgado y uniforme, su masa es m. Determine: (a) la coordenada x de su centro de masa; (b) el momento de inercia respecto al eje z y (c) el momento de inercia respecto al eje $\bar{z}$.

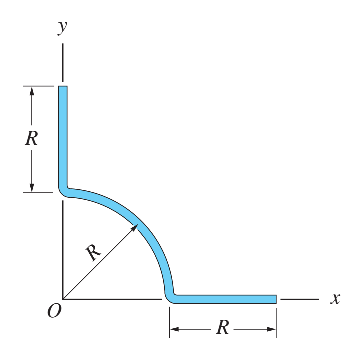


Fig. P17.91

17.92 Para el soporte homogéneo que se muestra, determine: (a) la coordenada x del centro de masa, (b) el radio de giro respecto al eje z y (c) el radio de giro respecto al eje $\bar{z}$ (el eje que pasa por el centro de masa).

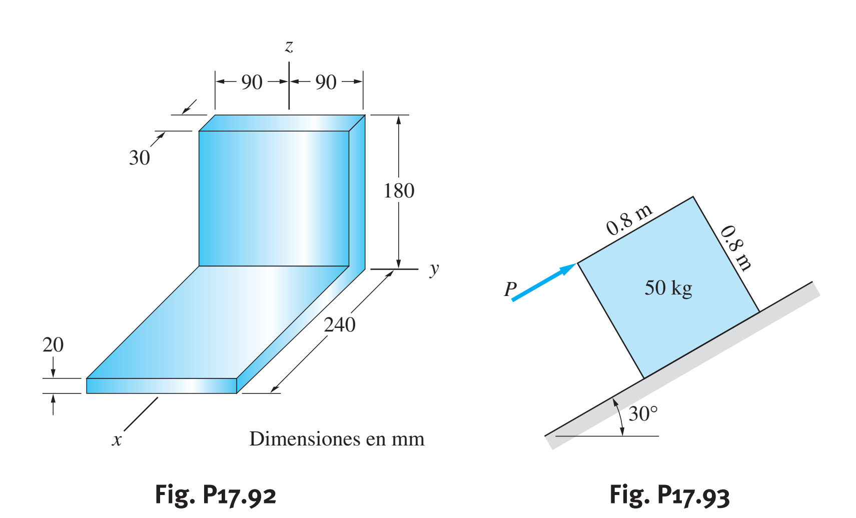


Fig. P17.92 **Fig. P17.93**

17.93 Un bloque de 50 kg se empuja, sobre el plano inclinado a 30°, con una fuerza constante P. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y el plano es 0.2. Determine la mayor fuerza P que puede aplicarse sin que el bloque se voltee.

17.94 La barra uniforme AB de 12 lb abanica libremente de dos varillas de peso despreciable. En la posición $\theta = 30°$, la tensión medida en la varilla AC es 4 lb. Determine las magnitudes de los vectores de aceleración y velocidad del centro de masa de la barra AB en la misma posición.

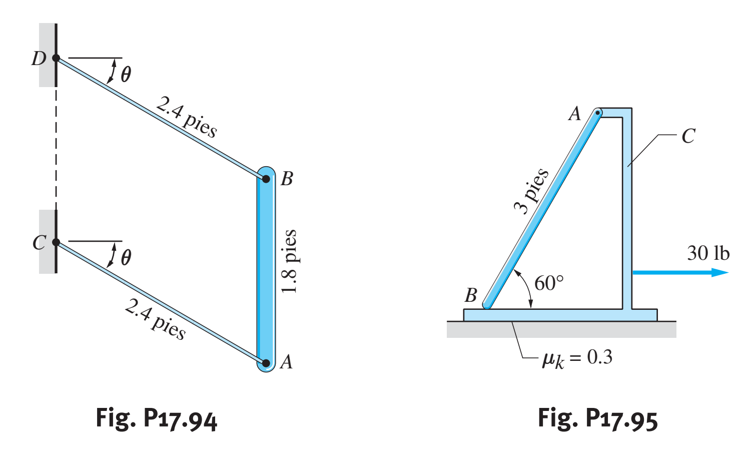


Fig. P17.94 **Fig. P17.95**

17.95 La barra uniforme AB de peso W está unida al marco C de 24 lb por medio de un perno en A. El coeficiente de fricción cinética entre el marco y la superficie

horizontal es 0.3. Determine el valor menor de W tal que la barra permanezca en contacto con el marco en B después de aplicar al marco la fuerza de 30 lb.

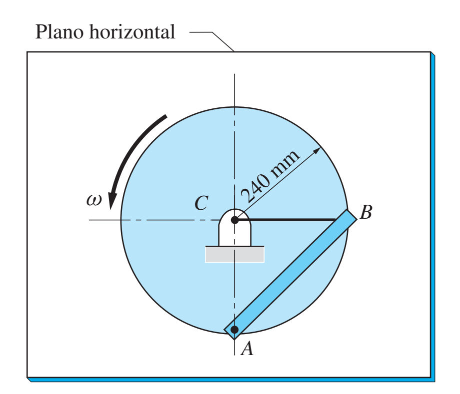


Fig. P17.97

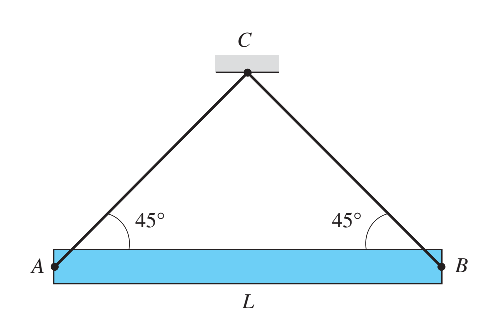
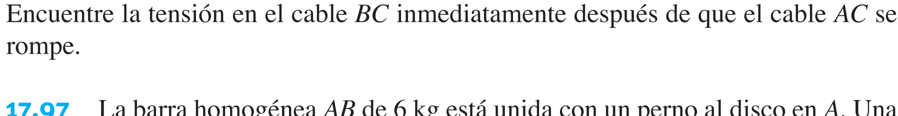


Fig. P17.96



17.96 La viga uniforme AB de masa m y longitud L está sostenida por dos cables. Encuentre la tensión en el cable BC inmediatamente después de que el cable AC se rompe.

17.97 La barra homogénea AB de 6 kg está unida con un perno al disco en A. Una cuerda conecta el extremo B de la barra al centro C del disco. Calcule la tensión en la cuerda cuando el disco rota en el plano horizontal con velocidad angular constante $\omega = 10$ rad/s.

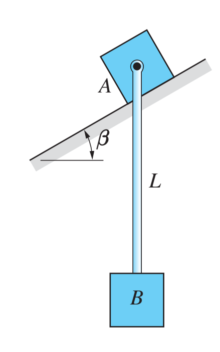


Fig. P17.99

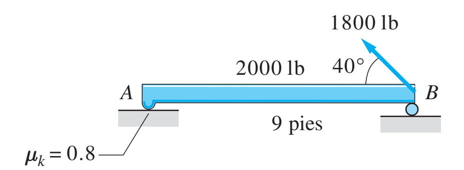


Fig. P17.98

17.98 La viga uniforme de 2000 lb descansa sobre una superficie rugosa en A y un rodillo de apoyo en B antes de que se aplique la fuerza de 1800 lb. Determine la aceleración angular de la viga y la aceleración del extremo A inmediatamente después de aplicar la fuerza. Suponga que el extremo A se desliza sobre la superficie rugosa. El coeficiente de fricción cinética en A es 0.8.

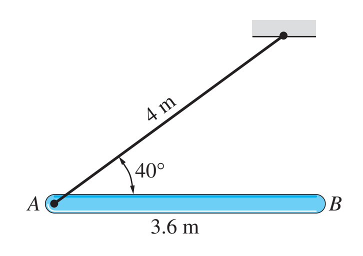


Fig. P17.100

17.99 Los bloques idénticos A y B, cada uno de masa m, están conectados por una varilla de longitud L y masa despreciable. El bloque A es libre de deslizarse sobre la superficie inclinada sin fricción. Si el sistema parte del reposo en la posición que se muestra, determine las expresiones para la aceleración del bloque A y la fuerza axial en la varilla inmediatamente después de soltar el sistema.

17.100 La barra uniforme AB de 50 kg está sostenida por un cable en A. Determine la aceleración angular de la barra y la tensión en el cable inmediatamente después de soltar la barra desde el reposo en la posición que se indica.

17.101 La barra T consiste en dos varillas idénticas, cada una de masa m y longitud L. Encuentre la reacción del perno en A inmediatamente después de soltar la barra desde el reposo en la posición que se muestra.

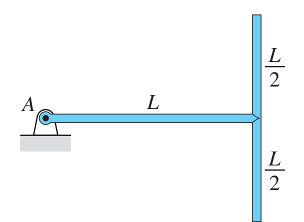


Fig. P17.101

17.102 El tronco uniforme AB de 100 lb parte del reposo en un valor desconocido de θ. Si se sabe que la reacción vertical en A es 50 lb cuando $\theta = 40°$, determine la rapidez angular del tronco en esta posición.

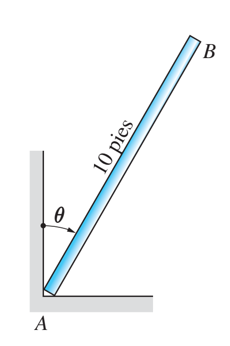


Fig. P17.102

17.103 La caja homogénea de masa m parte del reposo en la posición que se muestra. Determine la aceleración inicial del pequeño rodillo en A.

17.104 El carrete pesa 300 lb y su radio de giro respecto a su centro de masa G es 2.0 pies. Un cable está enrollado alrededor del cubo del carrete con un extremo unido a la pared en A. La fuerza de 100 lb hace que el carrete se deslice en su punto de contacto con el plano horizontal. Determine la aceleración de G y la tensión en el cable. El coeficiente de fricción cinética entre el carrete y el plano es 0.4.

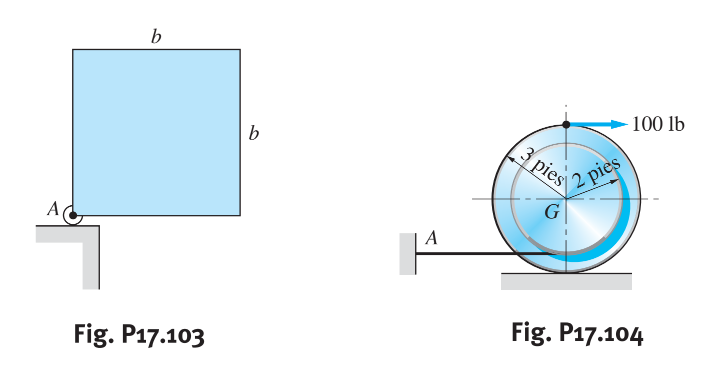


Fig. P17.103 **Fig. P17.104**

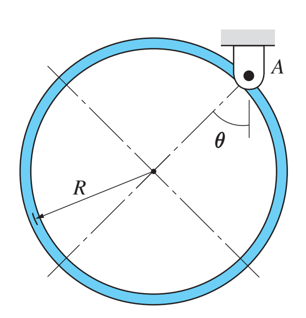


Fig. P17.105

17.105 El aro delgado uniforme de masa m y radio R se suelta a partir del reposo cuando $\theta = 90°$. (a) Demuestre que la ecuación diferencial de movimiento es $\alpha = (-g/2R)$ sen θ. (b) Integre analíticamente la expresión para α y obtenga la relación entre la velocidad angular ω y θ. (c) Deduzca la expresión para la magnitud de la reacción del perno en A como una función de θ.

17.106 La delgada barra homogénea de 20 kg se mueve en el plano vertical. Sus extremos están anclados a los deslizadores A y B de peso despreciable. Determine la mayor fuerza horizontal P que deslizará la barra hacia la derecha sin que el deslizador B se levante de la superficie. Desprecie la fricción.

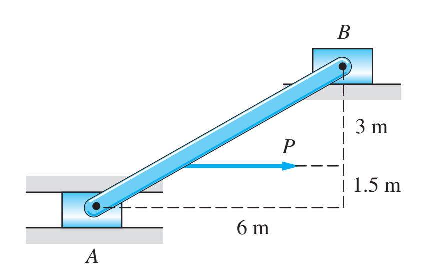


Fig. P17.106

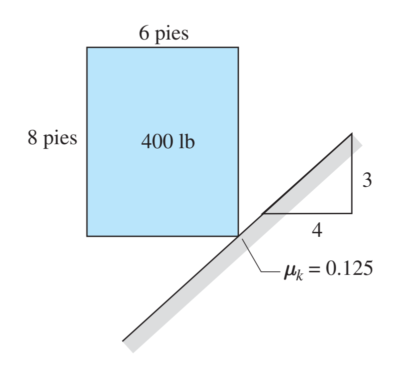


Fig. P17.107

17.107 La caja uniforme de 400 lb se suelta del reposo en la posición que se indica. Calcule la aceleración inicial del vértice *A*, suponiendo que éste se desliza sobre la superficie rugosa inclinada.

17.108 La barra uniforme *AB* de masa *m* y longitud *L* está en reposo en la posición $\theta = 0$ cuando la fuerza vertical constante *P* se aplica en *A*. Suponga que $P > mg/2$, determine lo siguiente como funciones de θ: (a) la aceleración y la velocidad angulares de la barra y (b) la componente horizontal de la reacción del perno en *B*.

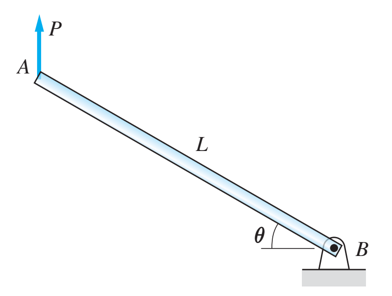


Fig. P17.108

17.109 El disco homogéneo de masa *m* se encuentra estacionario cuando se coloca sobre una banda transportadora que se mueve con rapidez constante de 5 m/s. Si el coeficiente cinético de fricción entre el disco y la banda es 0.25, determine el tiempo en que el disco alcanza su rapidez angular final.

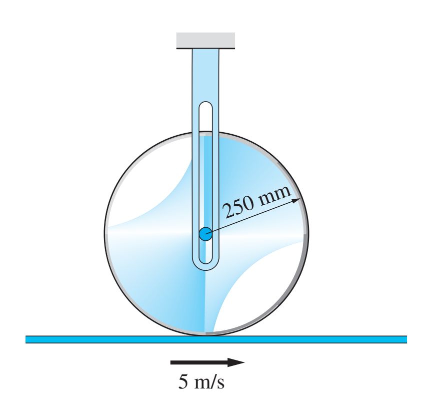
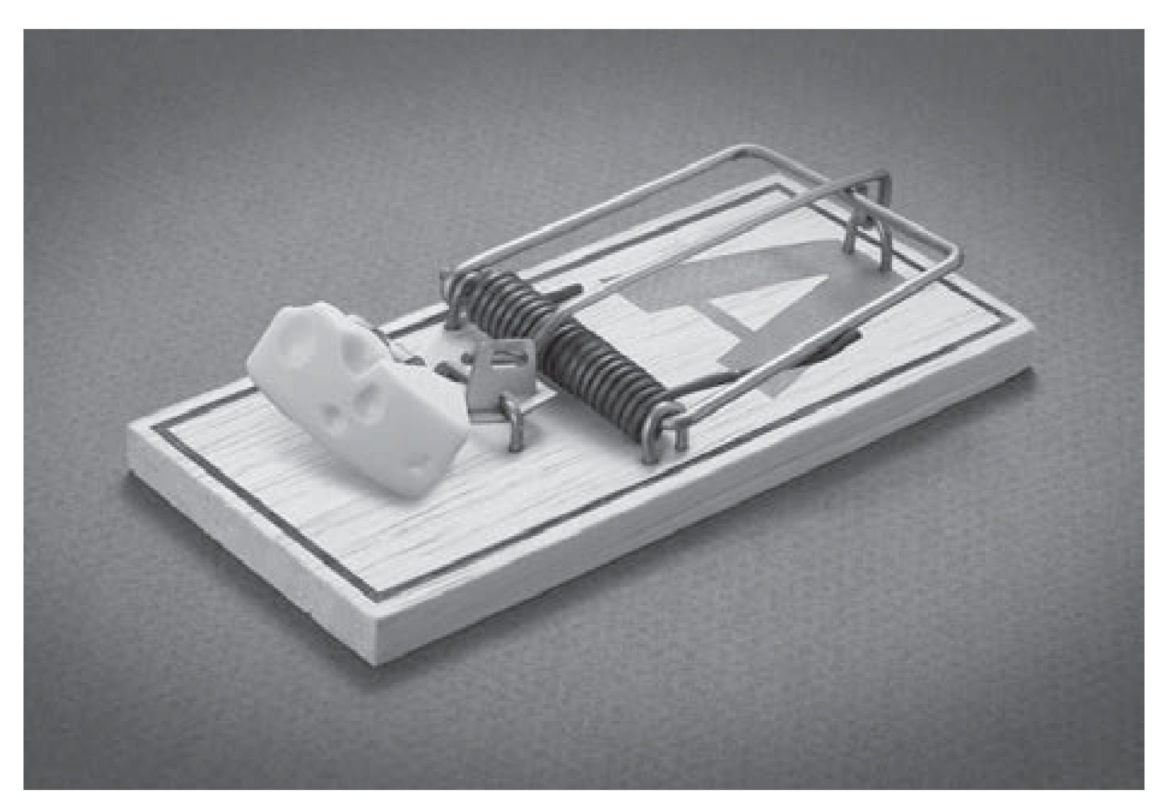


Fig. P17.109

18



Cinética plana de cuerpos rígidos: métodos de trabajo-energía y de impulso-cantidad de movimiento



La ratonera funciona de acuerdo con el principio de conservación de la energía mecánica. La energía potencial se almacena en el resorte cuando se coloca la trampa. Una vez que la ratonera se activa, la energía potencial se convierte en la energía cinética de la trampa de alambre. En el problema 18.29 se analiza la rapidez con la que se cierra. (© iStockphoto.com/Danny Smythe)

18.1 Introducción

Este capítulo continúa el análisis cinético del movimiento en un plano de los cuerpos rígidos que se inició en el capítulo anterior.

La parte A del capítulo extiende el método de trabajo-energía para un sistema de partículas (véase el capítulo 15) a los cuerpos rígidos. El método de trabajo-energía, cuando se aplica al movimiento de un cuerpo rígido, relaciona el trabajo hecho por las fuerzas aplicadas y los *pares* con el cambio en la energía cinética del cuerpo. Por tanto, la presentación de este método estará precedida por el análisis del trabajo realizado por un par y la energía cinética de un cuerpo rígido. Igual que en el caso del movimiento de partículas, el método de trabajo-energía es conveniente para en-

contrar el cambio en la rapidez del cuerpo conforme se mueve entre dos posiciones espaciales.

En la parte B, el método de impulso-cantidad de movimiento para los sistemas de partículas (véase el capítulo 15) se extiende a los cuerpos rígidos. Este método relaciona los impulsos lineal y angular de las fuerzas aplicadas y los pares con los cambios en las *cantidades de movimiento lineal* y *angular* del cuerpo. En el cálculo de la cantidad de movimiento angular se usan mucho los diagramas de la cantidad de movimiento que se presentaron en el capítulo anterior.

Como se analizó en el capítulo 15, la conservación de la cantidad de movimiento (lineal y/o angular) es uno de los conceptos más útiles en dinámica. Es invaluable en el impacto de los cuerpos rígidos, tema que también se incluye en la parte B. Como ya se ha enfatizado, los problemas de impacto sólo pueden analizarse con técnicas de impulso-cantidad de movimiento, porque en general se desconocen las fuerzas de impacto y la energía no se conserva durante el mismo.

PARTE A: *Método de trabajo-energía*

18.2 *Trabajo y potencia de un par*

a. *Trabajo*

Al aplicar el método de trabajo-energía al movimiento de un cuerpo rígido, con frecuencia se necesita calcular el trabajo realizado por un par. El trabajo de un par puede deducirse con el apoyo de dos herramientas que ya están disponibles: la definición de trabajo de una fuerza y la cinemática del cuerpo rígido.

La figura 18.1 muestra un par aplicado a un cuerpo rígido. El par se representa por dos fuerzas paralelas, con sentido opuesto, de magnitud F, que actúan en los puntos A y B. El vector de par correspondiente es

$$\mathbf{C} = \mathbf{r}_{B/A} \times \mathbf{F} \tag{a}$$

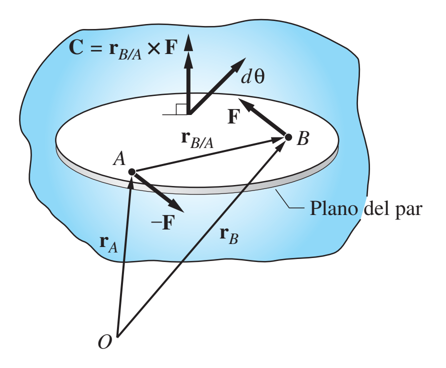


Fig. 18.1

El trabajo efectuado por el par se calcula al sumar el trabajo de las dos fuerzas que lo constituyen. Por tanto, dicho trabajo durante un desplazamiento infinitesimal del cuerpo es

$$dU = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_A + \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_B = \mathbf{F} \cdot (d\mathbf{r}_B - d\mathbf{r}_A) = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_{B/A} \tag{b}$$

donde $d\mathbf{r}_A$ y $d\mathbf{r}_B$ son los desplazamientos infinitesimales de los puntos A y B, respectivamente. De acuerdo con la cinemática del cuerpo rígido, la velocidad de B relativa a A es

$$\mathbf{v}_{B/A} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A} \quad \text{o} \quad \frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt} \times \mathbf{r}_{B/A}$$

donde $\boldsymbol{\omega}$ es el vector de velocidad angular y $d\boldsymbol{\theta}$ representa la rotación infinitesimal del cuerpo. Multiplicando ambos miembros de la segunda ecuación por dt, se obtiene

$$d\mathbf{r}_{B/A} = d\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}_{B/A}$$

que, al sustituir en la ecuación (b), resulta

$$dU = \mathbf{F} \cdot (d\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}_{B/A}) = (\mathbf{r}_{B/A} \times \mathbf{F}) \cdot d\boldsymbol{\theta}$$

Con la ecuación (a), finalmente se obtiene

$$dU = \mathbf{C} \cdot d\boldsymbol{\theta} \tag{18.1}$$

De la ecuación (18.1) se observa que el trabajo de un par depende de la rotación del cuerpo y es independiente de la traslación. Esta conclusión fue anticipada; es obvio que durante la traslación del cuerpo rígido el trabajo de **F** se cancela por el trabajo de –**F**, porque los desplazamientos de A y B son iguales.

Para el caso especial del *movimiento en un plano*, **C** y $d\boldsymbol{\theta}$ son paralelos, ambos son perpendiculares al plano del movimiento. En consecuencia, $dU = C\,d\theta$, y el trabajo durante un desplazamiento finito del cuerpo es

$$U_{1-2} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} C\,d\theta \tag{18.2}$$

donde θ_1 y θ_2 son las posiciones angulares inicial y final del mismo, medidas desde una línea de referencia conveniente. Si la magnitud del par permanece constante durante el movimiento en un plano, su trabajo será

$$U_{1-2} = C(\theta_2 - \theta_1) = C\,\Delta\theta \qquad C\text{: constante} \tag{18.3}$$

donde $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ es el desplazamiento angular del cuerpo. Es preciso recordar que las ecuaciones (18.2) y (18.3) son válidas sólo para el movimiento en un plano.

Con el fin de determinar el signo correcto para el trabajo, deben compararse las direcciones de C y de la rotación. Si ambos están en la misma dirección, el trabajo es positivo; si tienen direcciones opuestas, es negativo.

También es necesario observar que el desplazamiento angular debe medirse en radianes para que las ecuaciones de la (18.1) a la (18.3) sean válidas.

b. Potencia

En el apartado 14.5, la potencia P se definió como la rapidez con que se realiza el trabajo:

$$P = \frac{dU}{dt} \tag{14.30, repetida}$$

También se demostró que la potencia de una fuerza **F** puede expresarse como

$$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \qquad \text{(14.31, repetida)}$$

donde **v** es el vector de velocidad del punto de aplicación de **F**.

Cuando un par **C** actúa sobre un cuerpo rígido, de acuerdo con la ecuación (18.1), su potencia es,

$$P = \frac{dU}{dt} = \frac{\mathbf{C} \cdot d\boldsymbol{\theta}}{dt} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\omega} \qquad (18.4)$$

donde $\omega = d\theta/dt$ es la velocidad angular del cuerpo.

Para el movimiento en un plano, en donde **C** y **ω** son paralelos, la potencia del par será

$$P = C\omega \qquad (18.5)$$

Observe que en la ecuación (18.5) la potencia será positiva si C y ω van en la misma dirección y negativa si van en direcciones opuestas. Las unidades SI para la potencia son watts (1 W = 1 J/s = 1 N · m/s); las unidades en el sistema inglés son lb · pulg/s, lb · pie/s, o caballo de fuerza (1 hp = 550 lb · pie/s).

Recuerde que la eficiencia η de una máquina se definió en el apartado 14.5 como

$$\eta = \frac{\text{potencia de salida}}{\text{potencia de entrada}} \times 100\% \qquad \text{(14.32, repetida)}$$

18.3 Energía cinética de un cuerpo rígido

a. Movimiento general

La energía cinética de un cuerpo puede obtenerse sumando las energías cinéticas de las partículas constituyentes. Así, la energía cinética de un cuerpo que ocupa la región $\mathcal{V}$, que se muestra en la figura 18.2, es

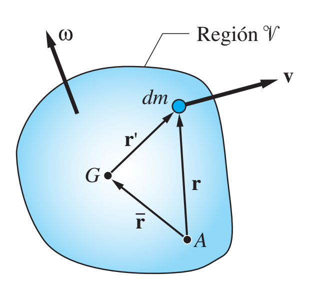


Fig. 18.2

$$T = \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{2} v^2 \, dm = \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \, dm \qquad \text{(a)}$$

donde **v** es la velocidad del elemento diferencial (partícula) de masa dm. Si el cuerpo es rígido, las velocidades de los elementos diferenciales no son independientes, ya que están determinadas por la velocidad de un punto de referencia A (un punto en el cuerpo) y la velocidad angular **ω** del cuerpo:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \qquad \text{(b)}$$

donde **r** es el vector de posición de dm relativo a A. Para el punto de referencia existen dos elecciones convenientes: el centro de masa G del cuerpo y el centro instantáneo para las velocidades.

Punto de referencia: centro de masa Cuando se usa el centro de masa G como el punto de referencia, la ecuación (b) será

$$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$$

donde $\mathbf{r}'$ representa el vector de posición de dm relativo a G y $\bar{\mathbf{v}} = d\bar{\mathbf{r}}/dt$ es la velocidad de G. Al sustituir en la ecuación (a) se obtiene, después de desarrollar el producto punto,

$$T = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{V}} [\bar{\mathbf{v}}\cdot\bar{\mathbf{v}} + 2\bar{\mathbf{v}}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}') + (\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}')\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}')]\, dm \tag{c}$$

Aplicando la identidad $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A})$ al último término en el paréntesis, se obtiene $(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}')\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}') = \boldsymbol{\omega}\cdot[\mathbf{r}'\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}')]$. Por tanto, la ecuación (c) puede escribirse como

$$T = \frac{1}{2}\bar{v}^2\int_{\mathcal{V}} dm + \bar{\mathbf{v}}\cdot\left[\boldsymbol{\omega}\times\int_{\mathcal{V}}\mathbf{r}'\, dm\right] + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\int_{\mathcal{V}}\mathbf{r}'\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}')\, dm$$

Observe que $\int_{\mathcal{V}} dm = m$ es la masa del cuerpo y $\int_{\mathcal{V}}\mathbf{r}'\, dm = \mathbf{0}$ por definición del centro de masa. También, de acuerdo con la ecuación (17.4), $\int_{\mathcal{V}}\mathbf{r}'\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}')\, dm = \mathbf{h}_G$ es la cantidad de movimiento angular del cuerpo respecto a G. Por tanto, la energía cinética de un cuerpo rígido toma la forma

$$T = \frac{1}{2}m\bar{v}^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{h}_G \tag{18.6a}$$

Punto de referencia: centro instantáneo Si A es el centro instantáneo para las velocidades, entonces $\mathbf{v}_A = \mathbf{0}$ y la ecuación (b) queda $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$. Así, la ecuación (a) puede escribirse como

$$T = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{V}}\mathbf{v}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})\, dm$$

Al aplicar la identidad $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A})$ al integrando, se tiene $\mathbf{v}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) = \boldsymbol{\omega}\cdot(\mathbf{r}\times\mathbf{v})$, de modo que la energía cinética será

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\left(\int_{\mathcal{V}}\mathbf{r}\times\mathbf{v}\, dm\right)$$

Al reconocer que la integral es, por definición, la cantidad de movimiento angular $\mathbf{h}_A$ del cuerpo respecto de A, se tiene

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{h}_A \quad (A\text{: centro instantáneo}) \tag{18.6b}$$

b. *Movimiento en un plano*

Punto de referencia: centro de masa Si el movimiento ocurre en un plano, entonces $\boldsymbol{\omega}$ y $\mathbf{h}_G$ son perpendiculares al plano del movimiento. Además, la magnitud de la cantidad de movimiento angular respecto a G está dada por la ecuación (17.6): $h_G = \bar{I}\omega$, donde $\bar{I}$ es el momento de inercia del cuerpo respecto a G (con mayor exactitud, respecto al eje que pasa por G y es perpendicular al plano del movimiento). Así la ecuación (18.6a) se reduce a

$$T = \frac{1}{2}m\bar{v}^2 + \frac{1}{2}\bar{I}\omega^2 \tag{18.7a}$$

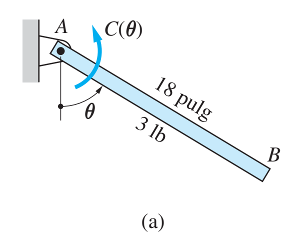
El primer término del lado derecho es la *energía cinética de traslación*, y el segundo es la *energía cinética de rotación*.

Punto de referencia: centro instantáneo Si el punto A es el centro instantáneo para las velocidades, la magnitud de la cantidad de movimiento angular respecto de A es $h_A = I_A\omega$, véase la ecuación (17.8). Por tanto, la ecuación (18.6b) toma la forma

$$T = \frac{1}{2}I_A\omega^2 \qquad (A\text{: centro instantáneo}) \tag{18.7b}$$

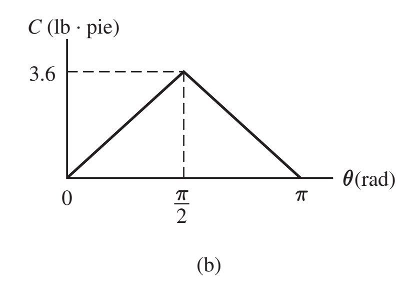
Es común utilizar esta ecuación para calcular la energía cinética de un cuerpo que rota respecto a un eje fijo en A. Sin embargo, no es necesario que A esté fijo; es suficiente con que su velocidad sea cero en el instante de interés.

Problema de ejemplo 18.1



(a)

La figura (a) muestra un par en sentido positivo $C(\theta)$ que actúa sobre la barra uniforme AB de 3 lb. Calcule el trabajo total efectuado sobre la barra conforme rota en el plano vertical respecto de A de $\theta = 0$ a $\theta = 180^{\circ}$ si: 1. $C(\theta) = 3.6 \text{ sen } \theta$ lb · pie; y 2. si $C(\theta)$ varía como se muestra en la figura (b)



(b)

Solución

El trabajo total realizado sobre la barra es la suma del que han efectuado el peso W y el par $C(\theta)$. El trabajo hecho por W puede calcularse de $(U_{1-2})_W = -W\,\Delta h$, en donde Δh es la distancia vertical, hacia arriba, recorrida por el centro de gravedad de la barra entre $\theta = 0$ (posición 1) y $\theta = 180^{\circ}$ (posición 2). Como la barra es homogénea, $\Delta h = 18$ pulg $= 1.5$ pies, que implica $(U_{1-2})_W = -3(1.5) = -4.5$ lb · pie. El cálculo del trabajo realizado por el par C es un poco más complicado, porque su magnitud no es constante.

Parte 1

Con la ecuación (18.2), el trabajo hecho por $C(\theta)$ conforme la barra rota de $\theta = 0$ a $\theta = 180^{\circ}$ (π rad) será

$$(U_{1-2})_C = \int_0^{\pi} C(\theta)\, d\theta = \int_0^{\pi} 3.6 \,\text{sen}\, \theta\, d\theta = [-3.6 \cos \theta]_0^{\pi} = 7.2 \text{ lb} \cdot \text{pie}$$

Por tanto, el trabajo total efectuado sobre la barra es

$$U_{1-2} = (U_{1-2})_C + (U_{1-2})_W = 7.2 - 4.5 = 2.7 \text{ lb} \cdot \text{pie}$$ *Respuesta*

Parte 2

Reconociendo que el trabajo realizado por el par es el área bajo el diagrama C-θ en la figura (b), se tiene

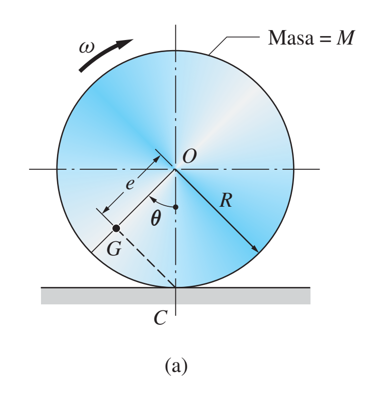
$$(U_{1-2})_C = \frac{1}{2}(3.6)(\pi) = 5.655 \text{ lb} \cdot \text{pie}$$

y el trabajo total efectuado sobre la barra queda

$$U_{1-2} = (U_{1-2})_C + (U_{1-2})_W = 5.655 - 4.5 = 1.155 \text{ lb} \cdot \text{pie}$$ *Respuesta*

Problema de ejemplo 18.2

En la figura (a), un par (que no se muestra) hace que el disco excéntrico de masa M ruede sin deslizarse con velocidad angular constante ω. El radio de giro del disco respecto a su centro de masa G es $\bar{k}$. Determine las energías cinéticas máxima y mínima del disco y los valores correspondientes del ángulo θ (el ángulo entre OG y la vertical). Utilice los siguientes datos: $M = 40$ kg, $R = 240$ mm, $e = 50$ mm, $\bar{k} = 160$ mm y $\omega = 10$ rad/s.



(a)

Solución

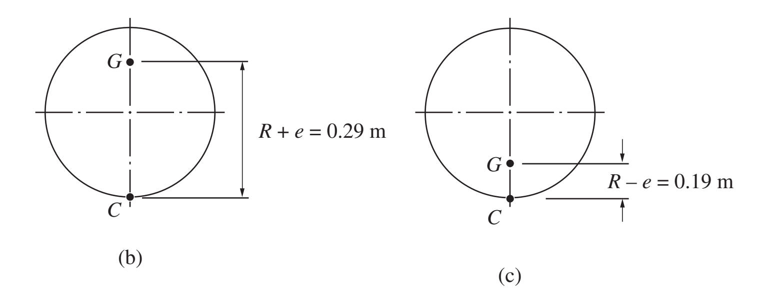
Debido a que el disco rueda sin deslizarse, el punto de contacto C es su centro instantáneo para las velocidades. Por tanto la energía cinética del disco puede calcularse con la ecuación (18.7b): $T = I_C\omega^2/2$. Al emplear el teorema de los ejes paralelos e $\bar{I} = M\bar{k}^2$, se obtiene

$$T = \frac{1}{2}(\bar{I} + M\,\overline{CG}^2)\omega^2 = \frac{1}{2}M(\bar{k}^2 + \overline{CG}^2)\omega^2$$

Se observa que T_{max} ocurre cuando la distancia $\overline{CG}$ es máxima, es decir, cuando el disco está en la posición que se muestra en la figura (b). De manera inversa, la posición de T_{min}, que se indica en la figura (c), sucede cuando $\overline{CG}$ es mínima. Por tanto, los valores máximo y mínimo de la energía cinética del disco son

$$T_{max} = \frac{1}{2}(40)[(0.16)^2 + (0.29)^2](10)^2 = 219.4 \text{ J} \quad \text{en } \theta = 180^\circ \qquad \textit{Respuesta}$$

$$T_{min} = \frac{1}{2}(40)[(0.16)^2 + (0.19)^2](10)^2 = 123.4 \text{ J} \quad \text{en } \theta = 0 \qquad \textit{Respuesta}$$



(b) (c)

Problema de ejemplo **18.3**

La barra AB del mecanismo que se muestra en la figura (a) gira en sentido contrario de las manecillas del reloj (positivo) con velocidad angular constante $\omega_{AB} = 2.5$ rad/s. Calcule la energía cinética total del mecanismo cuando se encuentra en la posición que se indica. La masa por unidad de longitud de cada barra es 2 kg/m.

B 0.8 m C
0.4 m
60°
D
0.8 m
ω_{AB}
60°
A

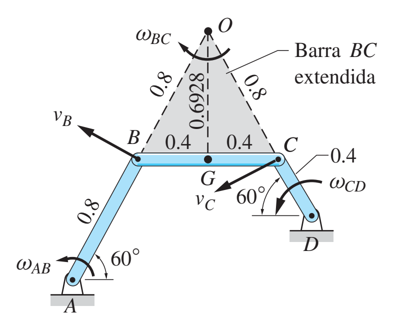
(a)

Solución

Se calculará la energía cinética de cada barra utilizando centros instantáneos para las velocidades. Antes de realizar esos cálculos, mediante la cinemática deben obtenerse las velocidades angulares de las barras BC y CD, y se encuentra el momento de inercia de cada barra respecto a su centro instantáneo.

Análisis cinemático

Ya que A y D son puntos fijos, son los centros instantáneos para la velocidad de las barras AB y CD, respectivamente. El centro instantáneo para BC, que se marcó con O en la figura (b), se localiza en la intersección de las rectas que son perpendiculares a los vectores de velocidad de B y C. Como $\mathbf{v}_B$ y $\mathbf{v}_C$ son perpendiculares a AB y CD, respectivamente, el punto O está en la intersección de las rectas AB y CD. Al establecer que G es el centro de masa de la barra BC, es posible calcular las siguientes dimensiones que se muestran en el triángulo OBC:



Dimensiones en metros

(b)

$$\overline{BO} = \overline{CO} = \frac{\overline{BG}}{\cos 60^\circ} = \frac{0.4}{\cos 60^\circ} = 0.8 \text{ m}$$

$$\overline{GO} = \overline{BG} \tan 60^\circ = 0.4 \tan 60^\circ = 0.6928 \text{ m}$$

Ahora las velocidades angulares de BC y CD pueden encontrarse con la siguiente secuencia de cálculos.

1. Del movimiento de la barra AB (A es el centro instantáneo):

$$v_B = \overline{AB}\,\omega_{AB} = 0.8(2.5) = 2.0 \text{ m/s}$$

2. Del movimiento de la barra BC (O es el centro instantáneo):

$$\omega_{BC} = v_B / \overline{BO} = \frac{2.0}{0.8} = 2.50 \text{ rad/s}$$

$$v_C = \overline{OC}\,\omega_{BC} = 0.8(2.5) = 2.0 \text{ m/s}$$

3. Del movimiento de CD (D es el centro instantáneo):

$$\omega_{CD} = v_C / \overline{CD} = \frac{2.0}{0.4} = 5.0 \text{ rad/s}$$

Propiedades inerciales

Las masas de las barras son $m_{AB} = m_{BC} = 2(0.8) = 1.6$ kg y $m_{CD} = 2(0.4) = 0.8$ kg. Los momentos de inercia de las barras respecto a sus propios centros instantáneos son

$$(I_A)_{AB} = \frac{m_{AB}L_{AB}^2}{3} = \frac{1.6(0.8)^2}{3} = 0.3413 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$(I_O)_{BC} = (\bar{I})_{BC} + m_{BC}\,\overline{GO}^2 = \frac{m_{BC}L_{BC}^2}{12} + m_{BC}\,\overline{GO}^2$$

$$= \frac{1.6(0.8)^2}{12} + 1.6(0.6928)^2 = 0.8533 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$(I_D)_{CD} = \frac{m_{CD}L_{CD}^2}{3} = \frac{0.8(0.4)^2}{3} = 0.04267 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Energía cinética

La energía cinética T del mecanismo se encuentra sumando las energías cinéticas de las tres barras. Al usar la ecuación (18.7b), se obtiene

$$T = (T)_{AB} + (T)_{BC} + (T)_{CD}$$

$$= \frac{1}{2}(I_A)_{AB}\omega_{AB}^2 + \frac{1}{2}(I_O)_{BC}\omega_{BC}^2 + \frac{1}{2}(I_D)_{CD}\omega_{CD}^2$$

$$= \frac{1}{2}(0.3413)(2.50)^2 + \frac{1}{2}(0.8533)(2.50)^2 + \frac{1}{2}(0.04267)(5.0)^2$$

$$= 1.067 + 2.667 + 0.533 = 4.27 \text{ J}$$

Respuesta

Problemas

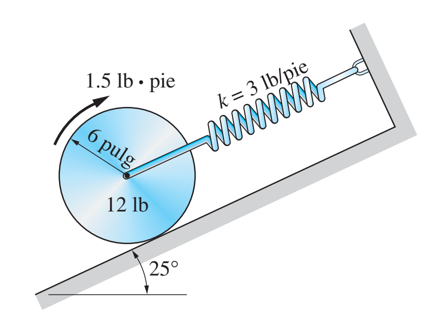


Fig. P18.1

18.1 Un par constante de 1.5 lb · pie actúa sobre el disco homogéneo que rueda sin deslizarse hacia abajo del plano inclinado. Determine el desplazamiento del disco, medido desde la posición en la que el resorte carece de deformación, para el que el trabajo total efectuado sobre el disco es cero.

18.2 El resorte de torsión en A aplica el par en sentido positivo $C(\theta) = -8\theta$ lb · pie a la barra uniforme. El ángulo θ (en radianes) se mide en sentido positivo desde la posición 1, donde el resorte no está deformado. Calcule el trabajo realizado por el resorte sobre la barra si ésta rota de la posición 2 a la 3.

18.3 La plataforma que transporta un cajón de 400 lb está sostenida por dos eslabones paralelos. El par $C(\theta) = C_0\,(1 - 2\theta/\pi)$ actúa sobre uno de los eslabones, donde θ es el ángulo (en radianes) entre los eslabones y la horizontal. Determine el valor de C_0 para el que el trabajo total que se ha hecho sobre el sistema es cero conforme se mueve de $\theta = 0$ a $\theta = 90°$. Desprecie los pesos de la plataforma y los eslabones.

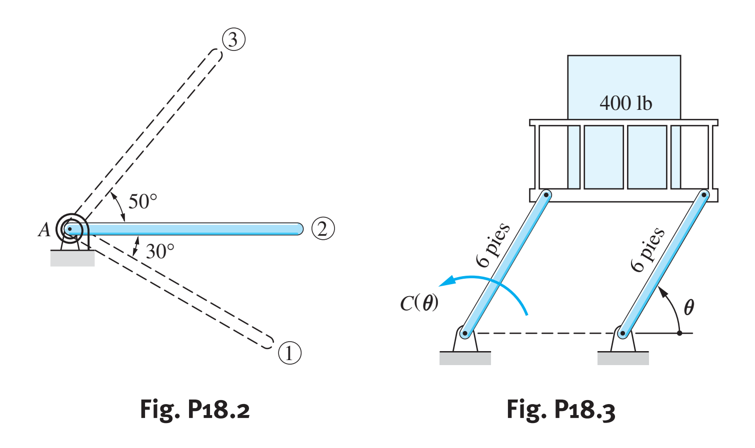


Fig. P18.2 **Fig. P18.3**

18.4 El sistema se encuentra en un plano vertical y consiste en las barras homogéneas AB y BC de 12 lb y el resorte AC. La longitud libre del resorte es de 3 pies y su rigidez de 15 lb/pie. Un par constante de 50 lb · pie actúa sobre la barra AB. Obtenga el trabajo realizado sobre las barras conforme θ cambia de 0 a 45°.

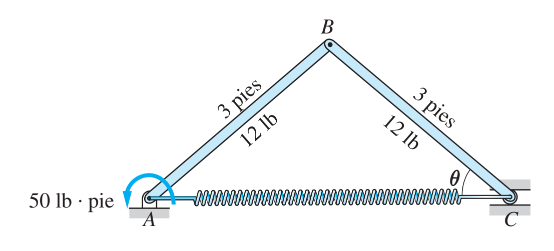


Fig. P18.4

18.5 El sistema consiste en la barra uniforme vertical AB de 8 kg y un resorte lineal con una rigidez de 360 N/m. Cuando la barra está en la posición 1, el resorte está ho-

rizontal y sin deformación. Un par constante de 30 N · m se aplica a la barra. Calcule el trabajo total efectuado sobre la barra al moverse de la posición 1 a la 2.

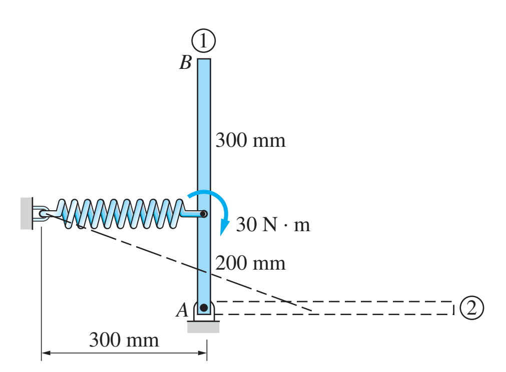


Fig. P18.5

18.6 En las figuras (a) y (b), los carretes ruedan sin deslizarse sobre los rieles horizontales. En cada caso, se aplica una fuerza constante de 200 N a una cuerda que está enrollada en los radios externos del carrete. La velocidad angular de cada carrete es de 6 rad/s en sentido negativo. Determine la potencia de la fuerza de 200 N en cada caso.

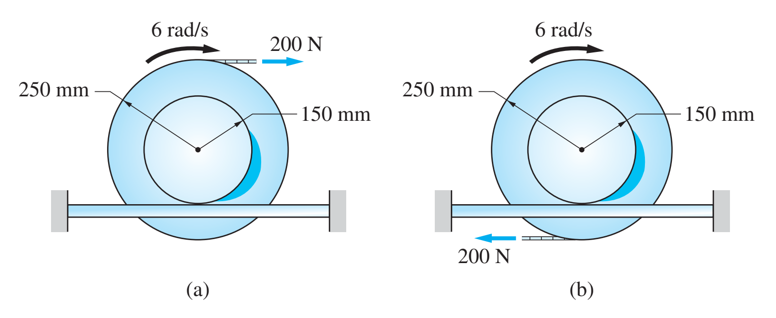
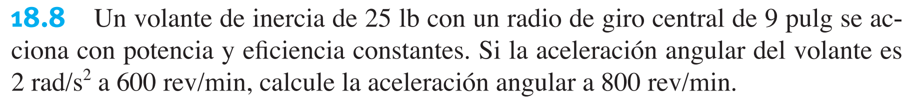


Fig. P18.6

18.7 Un motor eléctrico de 78% de eficiencia consume 12 kW de potencia. ¿Cuál es el par de torsión resultante en el eje de salida cuando la rapidez del motor es: (a) 1800 rev/min, y (b) 3600 rev/min?


18.8 Un volante de inercia de 25 lb con un radio de giro central de 9 pulg se acciona con potencia y eficiencia constantes. Si la aceleración angular del volante es 2 rad/s^2 a 600 rev/min, calcule la aceleración angular a 800 rev/min.

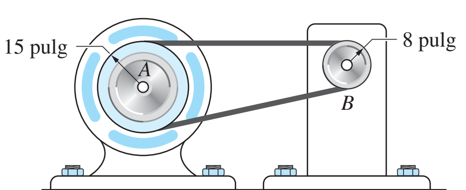


Fig. P18.9, P18.10

18.9 La máquina *B* se acciona por una banda al motor eléctrico *A* que tiene una eficiencia de 85%. Cuando el motor funciona a 25 rad/s, la tensión en la parte superior de la banda es 20 lb mayor que en la inferior. Determine el consumo de potencia del motor en caballos de fuerza (hp).

18.10 Cuando el sistema que se describe en el problema 18.9 funciona a 40 rad/s, el consumo de potencia del motor es 2.4 hp. Calcule el par de torsión en (a) el eje de salida del motor *A* y (b) el eje de entrada de la máquina *B*.

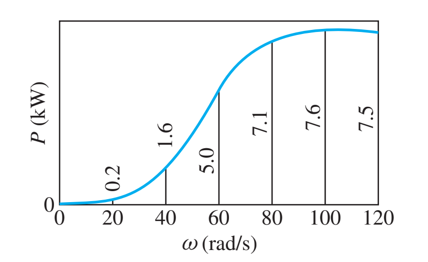


Fig. P18.11

18.11 La figura muestra una gráfica de la potencia de salida *P* de un motor de pistones contra la rapidez ω del eje. (a) Grafique la torsión (par) desarrollada por el

motor contra ω. (b) De la gráfica del inciso (a), calcule la máxima torsión y la rapidez angular correspondiente.

18.12 En la figura se muestra la torsión (par) M desarrollada por una turbina como una función de su rapidez angular ω. (a) Grafique los caballos de fuerza de la turbina contra ω. (b) Utilice la gráfica del inciso (a) para estimar la máxima potencia y la velocidad angular correspondiente.

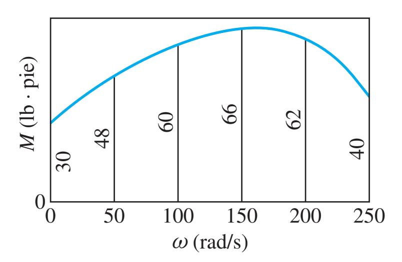


Fig. P18.12

18.13 Cada barra delgada homogénea AB tiene masa m y longitud L. La barra en la figura (a) está guiada por pernos en G y B, que se deslizan en las ranuras y la barra en la figura (b) rota respecto al perno en C. Calcule la energía cinética de cada barra en términos de su rapidez angular ω, m y L.

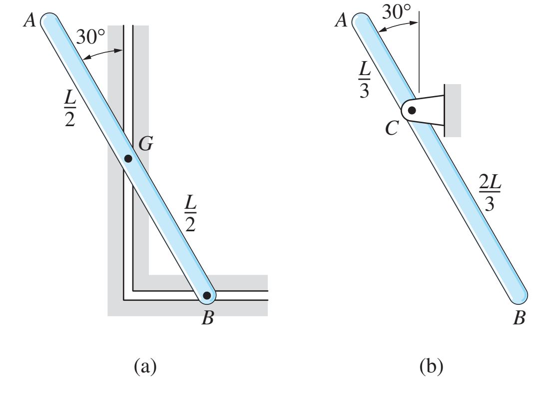


Fig. P18.13

18.14 Cada uno de los cuerpos tiene masa m y rota respecto al perno en O. El cuerpo de la figura (a) está hecho de una varilla uniforme y el cuerpo en la figura (b) es una placa rectangular homogénea. Determine la energía cinética de cada cuerpo en términos de su velocidad angular ω, m y L.

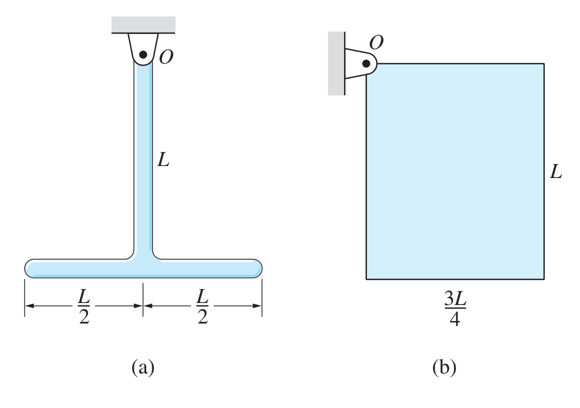


Fig. P18.14

18.15 Un disco desbalanceado de 60 kg rueda sin deslizarse sobre el plano horizontal. El radio de giro de la rueda respecto a su centro de masa es 240 mm. Calcule la energía cinética de la rueda en la posición que se muestra, donde su velocidad angular es $\omega = 2$ rad/s.

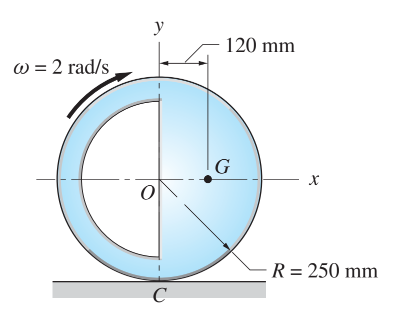


Fig. P18.15

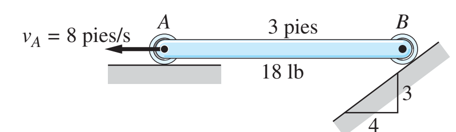


Fig. P18.16

18.16 Cuando la barra uniforme *AB* de 18 lb está en la posición que se indica, la velocidad del extremo *A* es 8 pies/s hacia la izquierda. Obtenga la energía cinética de la barra en esta posición.

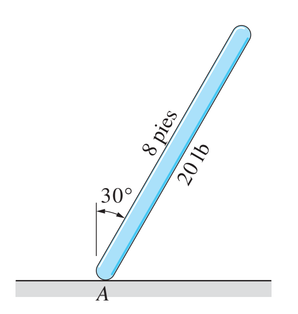


Fig. P18.17

18.17 En la posición que se muestra, el extremo *A* de la barra uniforme de 20 lb se mueve hacia la izquierda con velocidad v_A = 1.8 pies/s. Al mismo tiempo, la velocidad angular de la barra es ω = 0.3 rad/s, en sentido negativo. Encuentre la energía cinética de la barra en esta posición.

18.18 El extremo *A* de la barra uniforme *AB* está anclado al disco homogéneo y el extremo *B* está conectado al deslizador de 2 lb. En la posición que se indica, el disco rota con velocidad angular de 4 rad/s en sentido positivo. Calcule la energía cinética del sistema en esta posición.

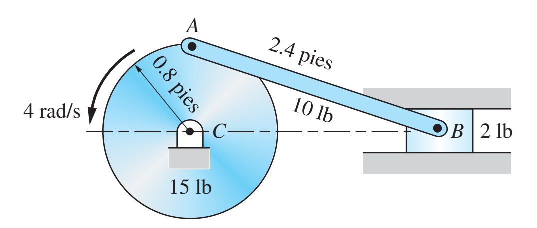


Fig. P18.18

18.19 El mecanismo consiste en las barras uniformes *AB* y *BC*. En la posición que se muestra, el rodillo *C* se mueve con velocidad v_C = 2 m/s hacia la derecha. Determine la energía cinética del mecanismo en esta posición.

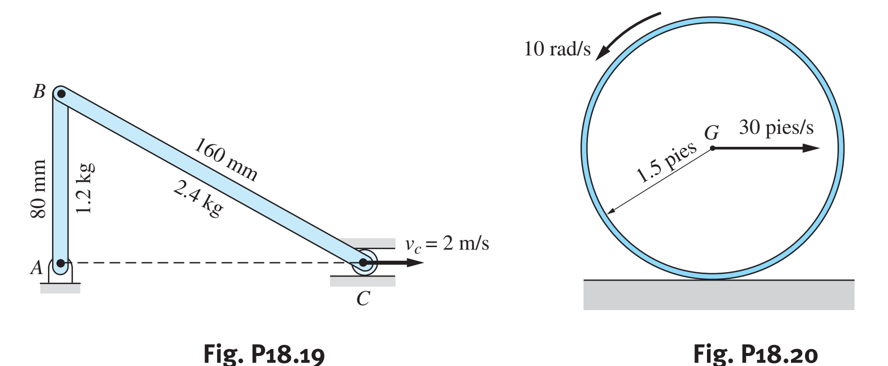


Fig. P18.19

Fig. P18.20

18.20 El aro delgado uniforme de 5 lb se lanza con velocidad de 30 pies/s hacia la derecha con efecto inverso de 10 rad/s. Calcule la energía cinética del aro al instante de lanzarlo.

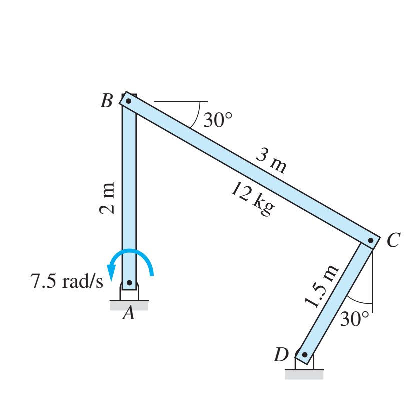


Fig. P18.21

18.21 En el instante que se indica, la barra *AB* del mecanismo rota a 7.5 rad/s en sentido positivo. Determine la energía cinética de la barra *BC* homogénea de 12 kg en este instante.

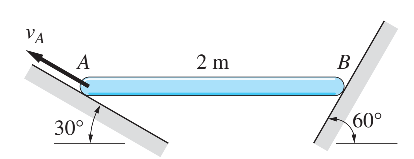


Fig. P18.22

18.22 Los extremos *A* y *B* de la barra uniforme de 80 kg se deslizan sobre los planos inclinados. En la posición que se muestra, la velocidad del extremo *A* es v_A = 3 m/s. Calcule la energía cinética de la barra en esta posición.

18.23 La varilla *AB* del mecanismo rota con velocidad angular constante de 20 rad/s en sentido negativo (el de las manecillas del reloj). Determine la energía cinética total del mecanismo en la posición que se indica. La masa de cada barra es 3 kg/m.

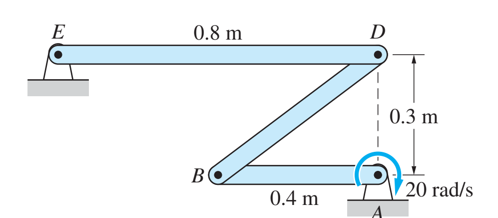


Fig. P18.23

18.24 El radio de giro del disco *A* respecto a su centro de masa *G* es $\bar{k} = 1.4$ pies. En la posición que se muestra, el disco rueda sin deslizarse con velocidad angular $\omega_A = 4$ rad/s. Obtenga la energía cinética del sistema en esta posición.

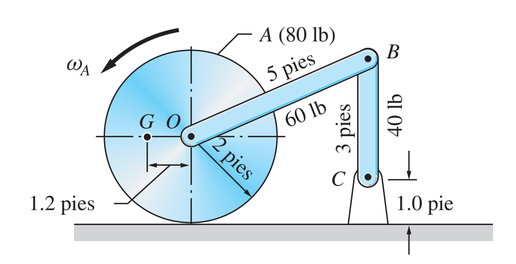


Fig. P18.24

18.4 *Principio de trabajo-energía y conservación de la energía mecánica*

El principio de trabajo-energía para un sistema de partículas, que se dedujo en el apartado 15.5, fue

$$(U_{1-2})_{\text{ext}} + (U_{1-2})_{\text{int}} = \Delta T \qquad \text{(15.24, repetida)}$$

donde los subíndices 1 y 2 se refieren a las posiciones inicial y final del sistema, respectivamente, $(U_{1-2})_{\text{ext}}$ es el trabajo efectuado por las fuerzas externas (incluyendo los pesos de las partículas), $(U_{1-2})_{\text{int}}$ es el trabajo realizado por las fuerzas internas y $\Delta T = T_2 - T_1$ es el cambio en la energía cinética del sistema.

Si se considera que un cuerpo rígido se compone de partículas, la ecuación (15.24) puede aplicarse directamente al movimiento del cuerpo rígido o a un sistema de cuerpos rígidos conectados, como se describe a continuación.

Cuerpo rígido único Las fuerzas internas en un cuerpo rígido lo mantienen unido; es decir, son las fuerzas de restricción que imponen la condición de rigidez. Estas fuerzas internas se presentan en pares colineales iguales y opuestos. Debido a que el cuerpo es rígido, las distancias entre las partículas no cambian, lo que a su vez implica que las distancias entre los puntos de aplicación de las fuerzas internas permanecen constantes. En consecuencia, las fuerzas internas no efectúan trabajo sobre un cuerpo rígido, de modo que el principio de trabajo-energía que rige el movimiento de un cuerpo rígido único será

$$(U_{1-2})_{\text{ext}} = \Delta T \tag{18.8}$$

Sistema de cuerpos rígidos conectados Como ya se explicó, las fuerzas internas en un cuerpo rígido no efectúan trabajo. Sin embargo, las conexiones internas entre los cuerpos rígidos pueden efectuarlo o no. Las cuerdas inextensibles y los pernos son ejemplos de conectores internos que no realizan trabajo, mientras que los resortes y la fricción originan fuerzas internas que sí pueden realizarlo. (En el apartado 15.5 se analizaron las fuerzas internas que no efectúan trabajo y las fuerzas internas que pueden hacerlo.) Por tanto, el principio de trabajo-energía para el movimiento de un sistema de cuerpos rígidos conectados debe emplearse en su forma general

$$(U_{1-2})_{\text{ext}} + (U_{1-2})_{\text{int}} = \Delta T \tag{18.9}$$

En esta ecuación, T representa la energía cinética *del sistema*, que es igual a la suma de las energías cinéticas de los cuerpos constituyentes.

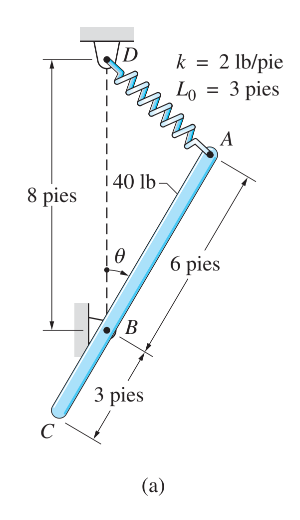
El principio de conservación de la energía mecánica para un sistema de partículas, que se estableció en el apartado 15.5, también se aplica a un cuerpo rígido (o a un sistema de cuerpos rígidos conectados): si todas las fuerzas, tanto internas como externas, son conservativas, la energía mecánica del cuerpo rígido (o sistema de cuerpos rígidos conectados) se mantiene. Este principio puede escribirse en la forma

$$V_1 + T_1 = V_2 + T_2 \tag{18.10}$$

donde V_1 y V_2 son las energías potenciales inicial y final, y T_1 y T_2 son las energías cinéticas inicial y final.

Problema de ejemplo **18.4**

La barra delgada uniforme AC de 40 lb que se muestra en la figura (a) rota en un plano vertical respecto al perno en B. El resorte ideal AD tiene una constante del resorte $k = 2$ lb/pie y una longitud no deformada $L_0 = 3$ pies. Cuando la barra está en reposo en la posición $\theta = 0$, se le da un pequeño desplazamiento angular y se suelta. Encuentre la velocidad angular de la barra cuando llega a la posición horizontal.



(a)

Solución

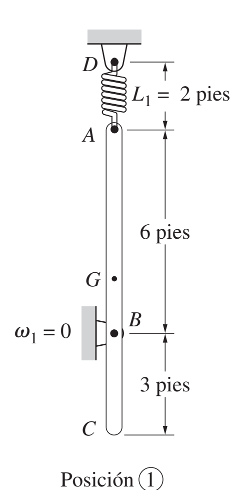
Es adecuado resolver este problema con el método de trabajo-energía, ya que concierne al cambio en la velocidad que ocurre durante una variación en la posición. Debido a que el sistema es conservativo es posible analizarlo con los principios de trabajo-energía o de conservación de la energía mecánica. Se empleará el primero de esos métodos; como ejercicio se puede intentar el segundo método.

La figura (b) muestra las posiciones inicial y final de la barra, designadas con 1 y 2, respectivamente. El trabajo sobre la barra es efectuado por su peso y por el resorte lineal. Si se observa que el centro de masa G de la barra se mueve hacia abajo una distancia de 1.5 pies entre las posiciones 1 y 2, entonces el trabajo del peso es

$$U_{1-2} = 40(1.5) = 60 \text{ lb} \cdot \text{pie} \tag{a}$$

A partir de la figura (b) se aprecia que la longitud del resorte es $L_1 = 2$ pies en la posición inicial y $L_2 = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ pies en la posición final. La longitud no deformada del resorte es $L_0 = 3$ pies, las deformaciones inicial y final del resorte son $\delta_1 = L_1 - L_0 = 2 - 3 = -1$ pie y $\delta_2 = L_2 - L_0 = 10 - 3 = 7$ pies. (Los signos indican que el resorte está comprimido en la posición inicial y en tensión en la posición final.) Por tanto, el trabajo realizado por el resorte sobre la barra, es

$$U_{1-2} = -\frac{1}{2}k(\delta_2^2 - \delta_1^2) = -\frac{1}{2}(2)[7^2 - (-1)^2] = -48 \text{ lb} \cdot \text{pie} \tag{b}$$



Posición ①

Debido a que el punto B es fijo, la energía cinética de la barra puede calcularse a partir de $T = (1/2)I_B\omega^2$. Al utilizar el teorema de los ejes paralelos, se encuentra que

$$I_B = \bar{I} + md^2 = m\left(\frac{L^2}{12} + d^2\right) = \frac{40}{32.2}\left(\frac{9^2}{12} + 1.5^2\right) = 11.180 \text{ slug} \cdot \text{pie}^2$$

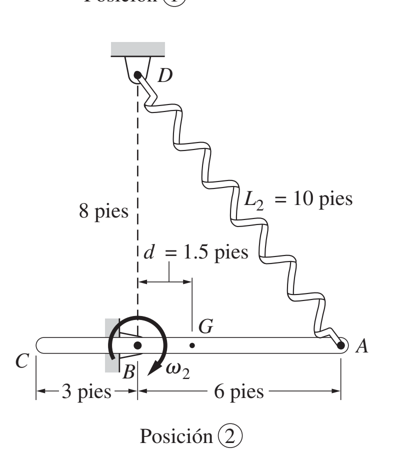
De las ecuaciones (a) y (b) y sabiendo que la barra se libera a partir del reposo ($T_1 = 0$), el principio de trabajo-energía será

$$U_{1-2} = T_2 - T_1 = \frac{1}{2}I_B\omega_2^2 - 0$$

$$60 - 48 = \frac{1}{2}(11.180)\omega_2^2$$

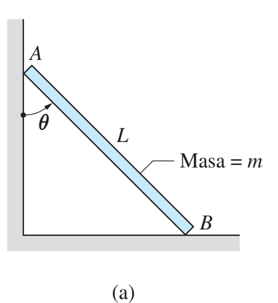
de donde resulta

$$\omega_2 = 1.465 \text{ rad/s}$$ *Respuesta*



Posición ②

(b)



(a)

Problema de ejemplo **18.5**

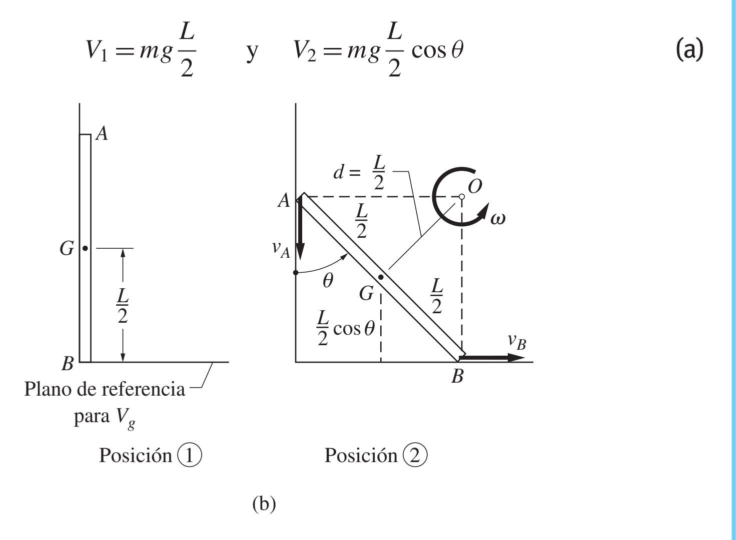
La figura (a) muestra una barra delgada homogénea *AB* de masa *m* y longitud *L*. Cuando la barra estaba en reposo en la posición $\theta = 0$, se desplazó ligeramente y se liberó. Determine la velocidad y la aceleración angulares de la barra como funciones del ángulo θ. Desprecie la fricción y suponga que el extremo *A* no pierde contacto con la superficie vertical.

Solución

Esta solución utiliza la conservación de la energía mecánica (el peso de la barra es la única fuerza que efectúa trabajo conforme cae la barra). Podría obtenerse fácilmente una solución idéntica con el principio de trabajo-energía.

La figura (b) muestra la barra al soltarse en la posición 1 ($\theta = 0$) y en una posición 2 arbitraria definida por el ángulo θ. Si se utiliza el plano horizontal como base para la energía potencial, las energías potenciales de la barra en las dos posiciones son

$$V_1 = mg\frac{L}{2} \qquad \text{y} \qquad V_2 = mg\frac{L}{2}\cos\theta \tag{a}$$



(b)

La energía cinética inicial es obviamente $T_1 = 0$, ya que la barra se libera a partir del reposo. La energía cinética en la posición 2 puede calcularse fácilmente al observar que el punto *O*, que se muestra en la figura (b), es el centro instantáneo para las velocidades de la barra. (El punto *O* se localiza donde se intersecan las perpendiculares a los vectores de velocidad de los extremos *A* y *B*.) Si se usa el teorema de los ejes paralelos, el momento de inercia de masa de la barra respecto de *O* es $I_O = \bar{I} + md^2 = (mL^2/12) + m(L/2)^2 = mL^2/3$. En consecuencia, las energías cinéticas en las dos posiciones son

$$T_1 = 0 \qquad \text{y} \qquad T_2 = \frac{1}{2}I_O\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{mL^2}{3}\omega^2 \tag{b}$$

donde ω es la velocidad angular de la barra en la posición 2.

Debido a que la energía mecánica se conserva, entonces

$$V_1 + T_1 = V_2 + T_2$$

Al sustituir de las ecuaciones (a) y (b), se obtiene

$$mg\frac{L}{2} + 0 = mg\frac{L}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}\frac{mL^2}{3}\omega^2$$

de lo que se encuentra que la velocidad angular en la posición 2 es

$$\omega = \left[\frac{3g}{L}(1 - \cos\theta)\right]^{1/2} \qquad \textit{Respuesta}$$

La aceleración angular α se obtiene al tomar las derivadas temporales de ω, es decir

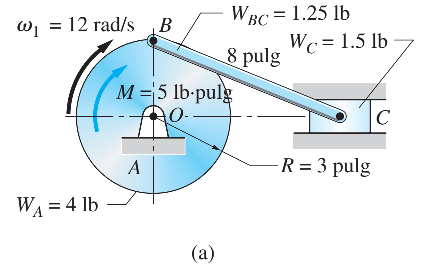
$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{2}\left[\frac{3g}{L}(1 - \cos\theta)\right]^{-(1/2)} \frac{3g}{L}\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Al sustituir la expresión que se encontró para $\dot{\theta} = \omega$, la aceleración angular se reduce a

$$\alpha = \frac{3g}{2L}\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad \textit{Respuesta}$$

Problema de ejemplo **18.6**

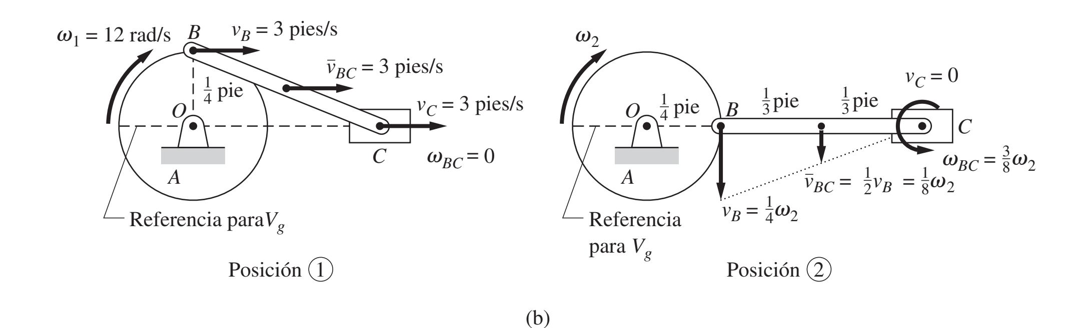
La figura (a) muestra un mecanismo manivela-deslizador que está alimentado por un par constante $M = 5$ lb · pulg, en sentido negativo. Todas las componentes son homogéneas, con los pesos y dimensiones que se indican. Cuando el mecanismo está en la posición que se muestra en la figura (a), la velocidad angular de la manivela es $\omega_1 = 12$ rad/s en sentido negativo. Determine la velocidad angular de la manivela después de que ha girado 90º desde la posición que se indica. Desprecie la fricción y suponga que el movimiento ocurre en un plano vertical.



(a)

Solución

La solución de este problema conduce a un análisis de trabajo-energía porque se ocupa del cambio en la velocidad entre dos posiciones. El problema puede resolverse con el principio de trabajo-energía o al observar que la energía mecánica se conserva (aquí se utilizará este último método). Sin importar cuál se aplique, es conveniente analizar todo el mecanismo eliminando así la necesidad de considerar el trabajo realizado en las conexiones (pernos B y C). Las posiciones inicial y final del mecanismo, designadas con 1 y 2, respectivamente, se muestran en la figura (b).



(b)

Análisis cinemático

Los pasos en el análisis cinemático que resultaron en las velocidades que se muestran en la figura (b) son

Posición 1

1. Debido a que O es un punto fijo, $v_B = R\omega_1 = (1/4)12 = 3$ pies/s.
2. Al reconocer que tanto $\mathbf{v}_B$ como $\mathbf{v}_C$ son horizontales, se concluye que $\omega_{BC} = 0$; es decir, que en esta posición la barra BC se traslada.
3. Ya que la barra BC se traslada, las velocidades de todos los puntos sobre la barra son iguales. En particular, la velocidad del centro de masa de BC es $\bar{v}_{BC} =$ 3 pies/s.

Posición 1

1. Debido a que O es un punto fijo, $v_B = R\omega_2 = (1/4)\omega_2$ pies/s (dirigida hacia abajo). Se supuso que ω_2 va en sentido negativo.
2. Ya que $\mathbf{v}_B$ es vertical y la trayectoria de C es horizontal, se concluye que C es el centro instantáneo para la barra BC; es decir, $v_C = 0$.
3. Puesto que $v_C = 0$, se sabe que $\omega_{BC} = v_B/L_{BC} = (\omega_2/4)/(2/3) = 3\omega_2/8$ rad/s (sentido positivo) y que la velocidad del centro de masa de BC es $\bar{v}_{BC} = v_B/2 = \omega_2/8$ pies/s.

Energía potencial

El sistema tiene energía potencial gravitacional debido a los pesos de sus componentes; además, existe la energía potencial del par constante.

Como se indica en la figura (b), se elige el plano horizontal que pasa por OC como la base para la energía potencial gravitacional V_g. En la posición 1, los centros de masa de A y C están en el plano de referencia, mientras que el centro de masa de la barra BC está a 1/8 pie sobre este plano. Por tanto, se obtiene $(V_g)_1 = W_{BC}h = 1.25(1/8) = 0.1563$ lb · pie. En la posición 2, no hay energía potencial gravitacional porque el centro de masa de cada parte está en el plano de referencia; es decir, $(V_g)_2 = 0$.

El par constante M es conservativo porque su trabajo $U_{1-2} = M\,\Delta\theta$ sólo depende de la magnitud M y de las posiciones angulares inicial y final de la manivela A. El trabajo realizado por el par puede expresarse como $U_{1-2} = -[(V_M)_2 - (V_M)_1]$, donde V_M es la energía potencial del par. Al elegir la posición 1 como referencia, se tiene que $(V_M)_2 = (V_M)_1 - U_{1-2} = 0 - (5/12)(\pi/2) = -0.6545$ lb · pie.

En resumen, las energías potenciales inicial y final son

$$V_1 = (V_g)_1 + (V_M)_1 = 0.1563 + 0 = 0.1563 \text{ lb} \cdot \text{pie} \quad \text{(a)}$$

$$V_2 = (V_g)_2 + (V_M)_2 = 0 + (-0.6545) = -0.6545 \text{ lb} \cdot \text{pie} \quad \text{(b)}$$

Energía cinética

La energía cinética de todo el mecanismo es la suma de las energías cinéticas de las tres partes:

$$T = \left(\frac{1}{2}\bar{I}\omega^2\right)_A + \left(\frac{1}{2}\bar{I}\omega^2 + \frac{1}{2}m\bar{v}^2\right)_{BC} + \left(\frac{1}{2}mv^2\right)_C \quad \text{(c)}$$

Los momentos centrales de inercia de la manivela A y del brazo BC son

$$\bar{I}_A = \left(\frac{mR^2}{2}\right)_A = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{32.2}\right)\left(\frac{3}{12}\right)^2 = 3.882 \times 10^{-3}\ \text{slug} \cdot \text{pie}^2$$

$$\bar{I}_{BC} = \left(\frac{mL^2}{12}\right)_{BC} = \frac{1}{12}\left(\frac{1.25}{32.2}\right)\left(\frac{8}{12}\right)^2 = 1.438 \times 10^{-3}\ \text{slug} \cdot \text{pie}^2$$

Posición 1 Al sustituir los valores de $\bar{I}_A$, $\bar{I}_{BC}$, $\omega_A = \omega_1 = 12$ rad/s, $\omega_{BC} = 0$ y $\bar{v}_{BC} = v_C = 3$ pies/s en la ecuación (c), se obtiene

$$T_1 = \left[\frac{1}{2}(3.882 \times 10^{-3})(12)^2\right] + \left[0 + \frac{1}{2}\left(\frac{1.25}{32.2}\right)(3)^2\right] + \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1.5}{32.2}\right)(3)^2\right]$$

de lo que resulta

$$T_1 = 0.2795 + 0.1747 + 0.2096 = 0.6638\ \text{lb} \cdot \text{pie} \qquad \text{(d)}$$

Posición 2 Sustituyendo los valores de $\bar{I}_A$, $\bar{I}_{BC}$, $\omega_A = \omega_2$ rad/s, $\omega_{BC} = 3\omega_2/8$ rad/s, $\bar{v}_{BC} = \omega_2/8$ pies/s, y $v_C = 0$ en la ecuación (c), se encuentra

$$T_2 = \left[\frac{1}{2}(3.882 \times 10^{-3})\omega_2^2\right] + \left[\frac{1}{2}(1.438 \times 10^{-3})\left(\frac{3}{8}\omega_2\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1.25}{32.2}\right)\left(\frac{\omega_2}{8}\right)^2\right] + 0$$

que se simplifica a

$$T_2 = (2.345 \times 10^{-3})\omega_2^2 \qquad \text{(e)}$$

Observe que la energía cinética de la barra BC en la posición 2 también puede calcularse de $(1/2)I_C\omega^2$ porque $v_C = 0$.

Conservación de la energía mecánica

Al utilizar los resultados de las ecuaciones (a), (b), (d) y (e), el principio de conservación de la energía mecánica será

$$V_1 + T_1 = V_2 + T_2$$

$$0.1563 + 0.6638 = -0.6545 + (2.345 \times 10^{-3})\omega_2^2$$

de donde se encuentra que la velocidad angular en la posición final es

$$\omega_2 = 25.1\ \text{rad/s} \qquad \textit{Respuesta}$$

Problemas

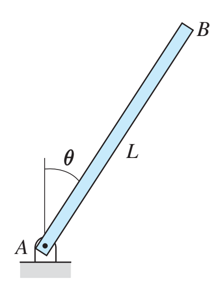


Fig. P18.25

18.25 A la barra delgada uniforme *AB* de masa *m* se le da un pequeño desplazamiento angular a partir de la posición $\theta = 0$ y entonces se libera. Determine su velocidad angular como una función de θ.

18.26 El sistema que consta de dos bloques y una polea compuesta se libera a partir del reposo. Encuentre la velocidad angular de la polea después de que ha rotado 90º.

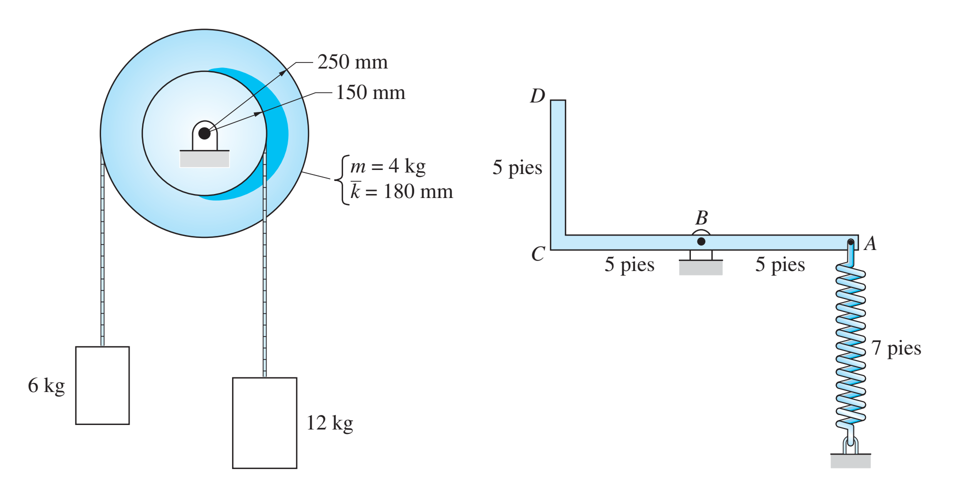


Fig. P18.26 **Fig. P18.27**

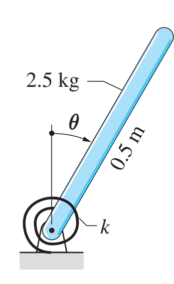


Fig. P18.28

18.27 La barra delgada *ABCD* en forma de *L* pesa 10 lb/pie y puede rotar libremente respecto al perno *B*. El resorte conectado a la barra en *A* tiene una longitud libre de 7 pies, y su rigidez es de 12 lb/pie. Si el sistema parte del reposo en la posición que se muestra, obtenga la velocidad angular de la barra cuando *A* está directamente encima de *B*.

18.28 El resorte de torsión aplica el par $C = -k\theta$ a la barra uniforme de 2.5 kg. La posición angular θ (rad) de la barra se mide desde la vertical, y *k* (N · m/rad) es la rigidez del resorte. Si la barra se rota a la posición $\theta = 30°$ y se suelta, determine el valor menor de *k* para el que la barra regresaría a la posición vertical.

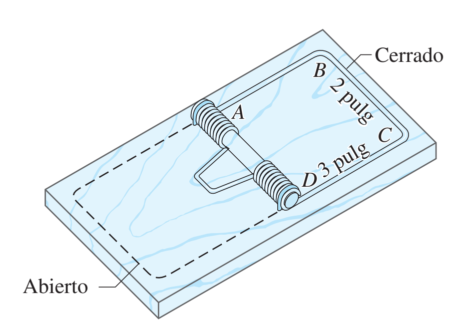


Fig. P18.29

18.29 La trampa *ABCD* de la ratonera está hecha de un alambre uniforme de acero cuyo peso es de 2.22×10^{-3} lb/pulg. El par de torsión ejercido por el resorte sobre la trampa en la posición cerrada es 0.50 lb · pie y es 0.88 lb · pie en la posición abierta. Si la trampa se libera de la posición abierta, encuentre la rapidez del segmento *BC* cuando llegue a la posición cerrada. Suponga que la relación par de torsión-desplazamiento angular para el resorte es lineal.

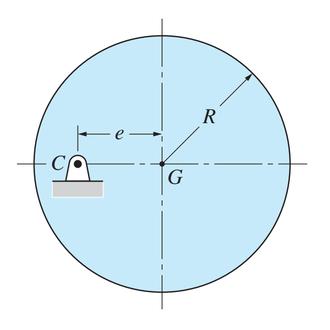


Fig. P18.30

***18.30** El disco homogéneo de masa *m* y radio *R* se libera a partir del reposo en la posición que se indica. (a) Deduzca la expresión para la velocidad angular del disco cuando *CG* es vertical. (b) Encuentre la distancia *e* que maximizaría la velocidad angular que se obtuvo en el inciso (a), y (c) determine esta máxima velocidad angular.

18.31 La varilla uniforme BC está soldada al tambor A, que pesa 10 lb y tiene un radio de giro de 4 pulg respecto a C. El sistema está inicialmente en reposo en la posición $\theta = 0$ cuando se aplica el par constante $M_0 = 1.5$ lb · pie, en sentido negativo. (a) Deduzca la velocidad angular (en rad/s) y la aceleración angular (en rad/s^2) del sistema como funciones de θ. (b) Determine la máxima velocidad angular y el valor de θ donde esto ocurre.

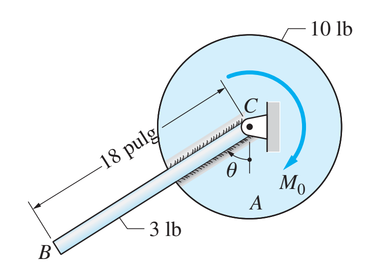


Fig. P18.31

18.32 Una cadena de bicicleta, de 6 pies de longitud y que pesa 0.5 lb/pie, cuelga sobre una rueda dentada como se muestra. La rueda pesa 6.4 lb y su radio de giro central es 7.42 pulg. Si se da a ésta un pequeño desplazamiento angular en sentido negativo desde la posición que se indica y luego se suelta, calcule la velocidad angular después de que toda la cadena ha salido de la rueda dentada.

18.33 Para el sistema que se describe en el problema 18.32, ¿cuál es la velocidad angular de la rueda dentada cuando el extremo A de la cadena alcanza el punto C?

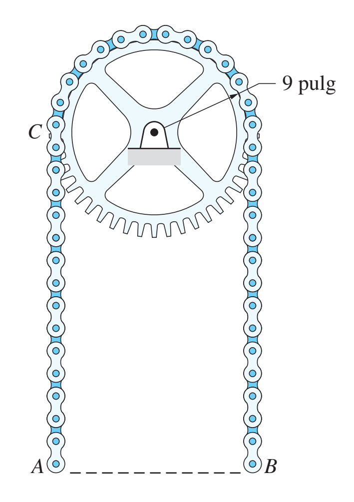


Fig. P18.32, P18.33

18.34 Un cilindro de radio R_C y masa m_C, y una esfera de radio R_S y masa m_S se liberan a partir del reposo sobre una superficie rugosa que está inclinada un ángulo β con la horizontal. Ambos cuerpos son homogéneos y ruedan sin deslizarse. Determine $\bar{v}_C/\bar{v}_S$ (la razón de las velocidades centrales) después de que cada cuerpo se ha movido la misma distancia d hacia abajo del plano.

18.35 El momento de inercia de masa del carrete de 40 kg respecto a su centro de masa G es 1.6 kg · m^2. El carrete está en reposo sobre una superficie rugosa cuando la fuerza constante P se aplica al cable enrollado alrededor de su cubo. Determine P si el carrete debe tener una rapidez angular de 6 rad/s después de dar una revolución. Suponga que rueda sin deslizarse.

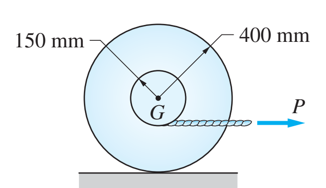


Fig. P18.35

18.36 El extremo de la cuerda enrollada alrededor del cubo del carrete está unida a un soporte fijo. El carrete pesa 6 lb y su radio de giro respecto a G es 3.75 pulg. (a) Si el carrete se libera a partir del reposo, determine la velocidad de G después de una caída de 6 pies. (b) ¿Cuál sería la velocidad de G si el carrete cayera 6 pies a partir del reposo sin la cuerda?

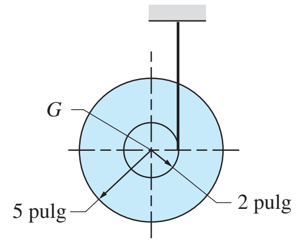


Fig. P18.36

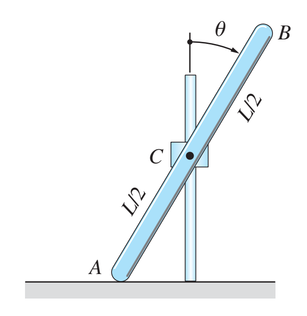


Fig. P18.37

18.37 La varilla uniforme AB de masa m está asegurada con pernos en su punto medio al collar C deslizante. Si la varilla se suelta a partir del reposo cuando $\theta = \theta_0$, encuentre su velocidad angular como una función de θ. Desprecie la fricción y la masa del collar.

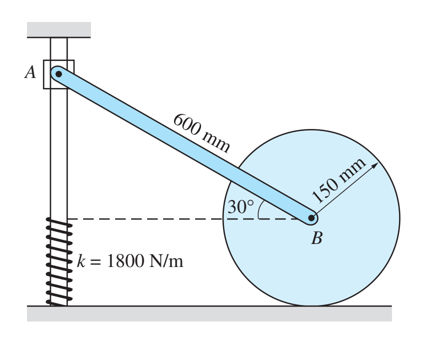


Fig. P18.38

18.38 La barra uniforme *AB* de masa 4.5 kg conecta el pequeño collar deslizante *A* con el disco homogéneo de masa 6.8 kg. Cuando el sistema se libera a partir del reposo en la posición que se muestra, el collar se desliza hacia abajo de la varilla vertical y el disco rueda sin deslizarse sobre la superficie horizontal. Obtenga: (a) la velocidad del collar cuando está a punto de chocar con el resorte y (b) la máxima deflexión del resorte después del choque.

18.39 El centro de masa de la rueda desbalanceada de 16 lb se localiza en *G*. El momento de inercia de masa de la rueda respecto a su centro *O* es $I_O = 0.23$ slug · pie^2. En la posición que se muestra, la velocidad angular de la rueda es 3 rad/s en sentido negativo y el resorte horizontal no está deformado. Encuentre la velocidad angular de la rueda después de que ha girado 180º, en sentido negativo, de esta posición. Suponga que la rueda no se desliza.

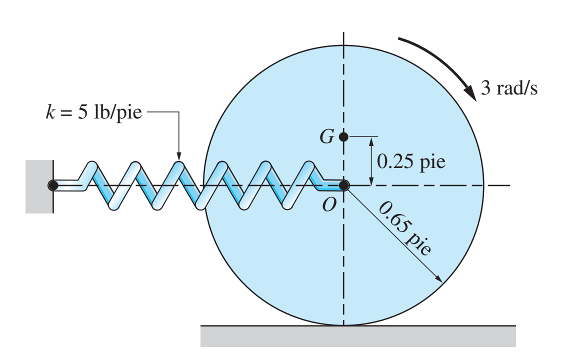


Fig. P18.39

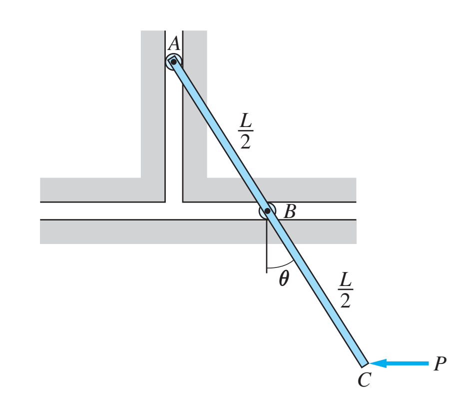
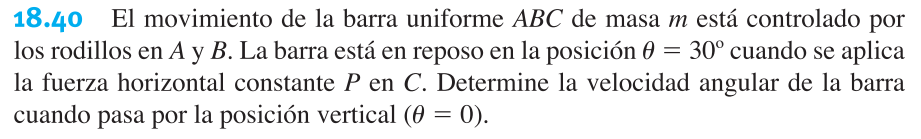


Fig. P18.40



18.40 El movimiento de la barra uniforme *ABC* de masa *m* está controlado por los rodillos en *A* y *B*. La barra está en reposo en la posición $\theta = 30º$ cuando se aplica la fuerza horizontal constante *P* en *C*. Determine la velocidad angular de la barra cuando pasa por la posición vertical ($\theta = 0$).

18.41 La rueda excéntrica de masa $M = 300$ kg y radio $R = 1.2$ m gira sin deslizarse. El radio de giro de la rueda respecto a su centro de masa *G* es $\bar{k} = 0.5$ m y su excentricidad es $e = 0.4$ m. Si se sabe que la velocidad angular de la rueda es $\omega = 2.69$ rad/s (en sentido negativo) cuando $\theta = 0$, calcule: (a) la máxima velocidad angular y (b) la mínima velocidad angular.

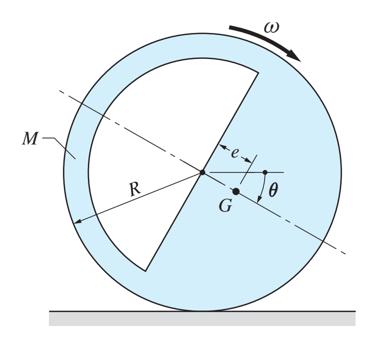


Fig. P18.41

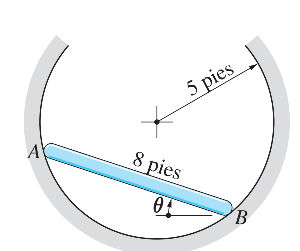


Fig. P18.42

18.42 La barra uniforme *AB* de 24 lb se desliza dentro de una superficie cilíndrica sin fricción. Si la barra parte del reposo en la posición $\theta = 35º$, determine su velocidad angular (en rad/s) y su aceleración angular (en rad/s^2) como funciones de θ.

18.43 Una barra de masa despreciable está sujeta con un perno al centro del disco uniforme de 4 oz. El resorte de torsión conectado entre la barra y el disco tiene una rigidez de 300×10^{-6} lb · pie/rad. El resorte se precarga girando la barra tres revoluciones en sentido negativo respecto al disco. Entonces el sistema se coloca sobre la superficie horizontal y se libera a partir del reposo en la posición que se muestra. Determine la máxima rapidez alcanzada por el centro del disco. Suponga que éste rueda sin deslizarse.

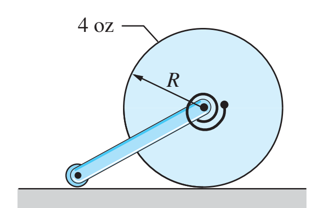


Fig. P18.43

18.44 La barra uniforme AB de 200 lb está unida al disco homogéneo de 600 lb mediante un perno en A. El peso del deslizador unido en B es despreciable. El disco rueda sin deslizarse sobre el plano horizontal. En la posición que se muestra, la energía cinética del sistema es de 1800 lb · pie. Después de que el disco ha girado 180º en sentido negativo, calcule: (a) la energía cinética del sistema y (b) la velocidad angular del disco.

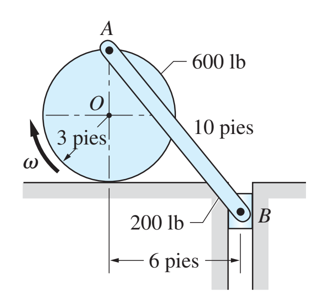


Fig. P18.44

18.45 La conexión articulada que se muestra consiste en dos barras idénticas, cada una de longitud L y masa m. Si la articulación se suelta a partir del reposo en $\theta = 0$, encuentre la velocidad angular de cada unión cuando $\theta = 90º$. Desprecie la fricción.

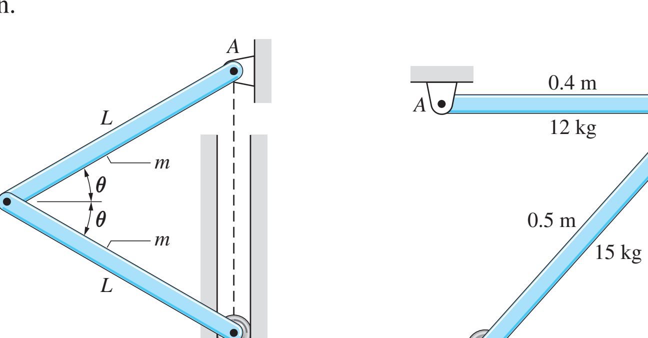


Fig. P18.45 **Fig. P18.46**

18.46 El mecanismo consiste en dos barras uniformes y se libera a partir del reposo en la posición que se muestra. Despreciando la fricción, obtenga la velocidad del rodillo C cuando AB llega a la posición vertical.

18.47 Las tres barras del mecanismo pesan w_0 lb/pulg. Si el mecanismo parte del reposo en la posición que se muestra, determine la velocidad angular de la barra AB cuando llega a la posición vertical.

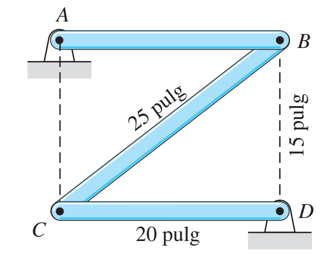


Fig. P18.47

18.48 La barra uniforme (masa m_2) está sujeta con un perno a la circunferencia del disco homogéneo (masa m_1). El sistema se desplaza ligeramente de la posición que se indica y se suelta a partir del reposo. Encuentre la máxima velocidad angular del disco. Suponga que rueda sin deslizarse.

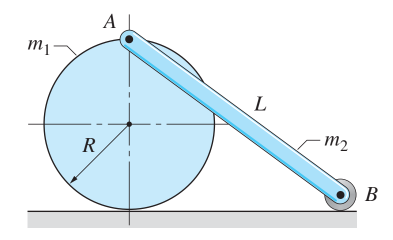


Fig. P18.48

18.49 Las tres barras de la conexión articulada son uniformes y de peso igual. Si la articulación se libera a partir del reposo en la posición que se muestra, determine la velocidad angular de la barra *AB* cuando alcanza la posición horizontal.

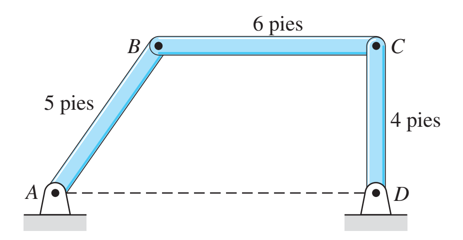


Fig. P18.49

18.50 La barra homogénea *AC* de 60 lb está sujeta con un perno a las barras paralelas *AB* y *CD* de peso despreciable. El mecanismo está en reposo en la posición $\theta = 60°$ cuando el par constante de 240 lb · pie se aplica a *AB*. Determine la rapidez de la barra *AC* cuando $\theta = 90°$.

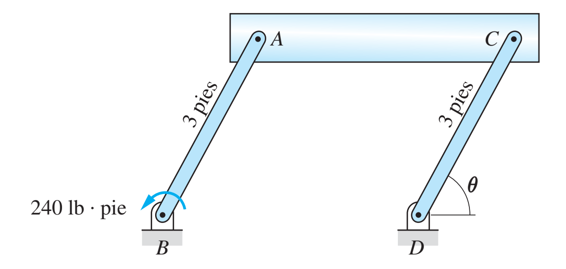


Fig. P18.50

18.51 El disco homogéneo *A* de 80 kg está conectado por un cable al bloque *B* de 80 kg. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la superficie inclinada es 0.4. Si el sistema se libera a partir del reposo cuando $x = 0$, determine x cuando la velocidad del bloque es 5 m/s. Suponga que el disco rueda sin deslizarse.

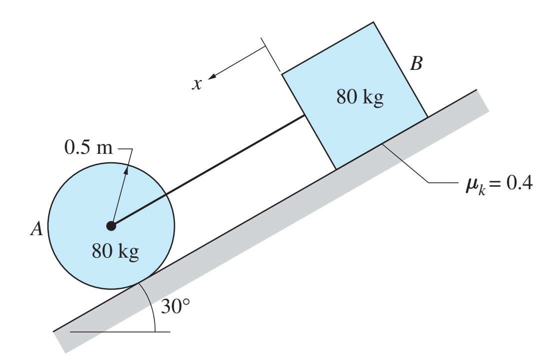


Fig. P18.51

18.52 El extremo *B* de la barra uniforme *AB* de 2.7 kg está conectado a un pequeño rodillo que se mueve en una ranura horizontal. El otro extremo está anclado al disco homogéneo de 1.8 kg que rueda sin deslizarse sobre la superficie vertical. El resorte unido a *A* tiene una longitud libre de 0.3 m y una rigidez de 58 N/m. Después

de que el sistema se suelta a partir del reposo en la posición que se muestra, la velocidad de A es 3 m/s cuando AB queda horizontal. Determine la magnitud de la fuerza P que actúa sobre la barra en B.

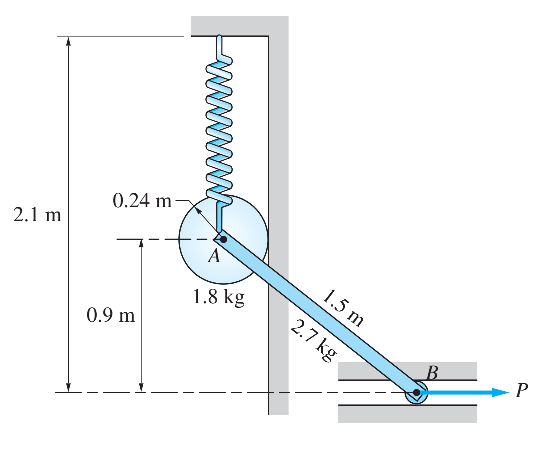


Fig. P18.52

18.53 Una cubeta de 120 lb se encuentra suspendida de un cable que está enrollado en la periferia del tambor de 400 lb. El radio de giro del tambor respecto al punto O es de 0.8 pies. El sistema se libera a partir del reposo en la posición 1 y se mueve con fricción despreciable hasta que la cubeta llega a la posición 2 y entonces se aplica un freno al tambor que ejerce un par constante de 576 lb · pie. (a) Encuentre la altura h para la que la cubeta llega al suelo con velocidad cero. (b) Determine la velocidad de la cubeta en la posición 2.

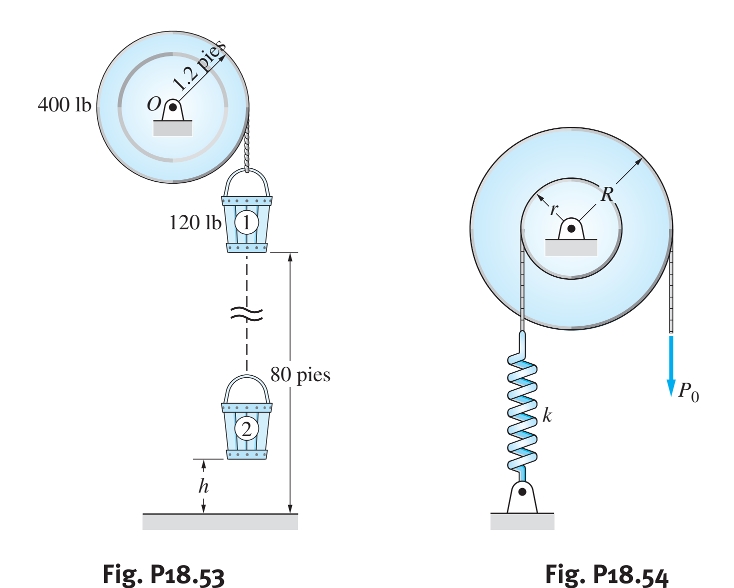


Fig. P18.53 **Fig. P18.54**

***18.54** El momento de inercia de la polea compuesta respecto a su centro es $\bar{I}$. Una cuerda enrollada alrededor de la polea interna de radio r está unida a un resorte de rigidez k. Una fuerza constante P_0 actúa sobre la cuerda enrollada alrededor de la polea exterior, cuyo radio es R. Si la polea está en reposo con el resorte sin defor-

mación cuando P_0 se aplica, deduzca la expresión para la máxima velocidad angular de la polea.

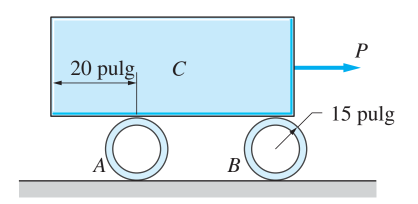


Fig. P18.55

18.55 La losa de piedra C de 1500 lb está apoyada en dos tubos cilíndricos de pared delgada de acero A y B que pesan 250 lb cada uno. El sistema está en reposo en la posición que se muestra cuando se aplica la fuerza constante $P = 180$ lb. Determine la velocidad de la losa C cuando el cilindro A llega al vértice izquierdo de la misma. Suponga que no hay deslizamiento.

18.56 El engrane A, con masa de 4 kg y un radio de giro central de 90 mm, rueda sobre el engrane fijo B. Un par constante M_0 actúa sobre el brazo CD, de masa despreciable. Determine la magnitud del par, si se sabe que la rapidez angular de CD se incrementó de 200 a 320 rev/min, ambas en sentido positivo, después de efectuar seis revoluciones.

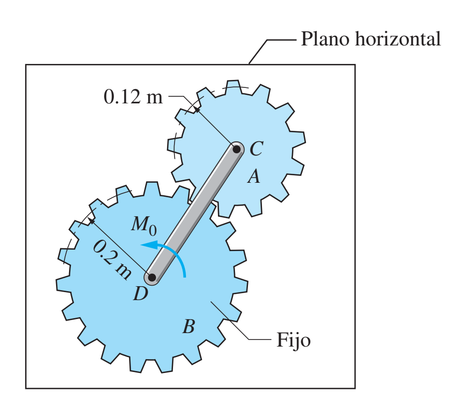


Fig. P18.56

PARTE B: *Método de impulso-cantidad de movimiento*

18.5 *Diagramas de la cantidad de movimiento*

En el apartado 17.3 se dedujo la cantidad de movimiento angular de un cuerpo rígido. Para el movimiento en un plano, se encontró que la cantidad de movimiento angular del cuerpo respecto a su centro de masa G es

$$h_G = \bar{I}\omega \tag{18.11}$$

donde $\bar{I}$ es el momento de inercia de masa respecto a G y ω representa la velocidad angular del cuerpo.

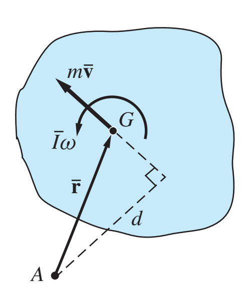


Fig. 18.3

También se encontró que la cantidad de movimiento angular respecto a un punto arbitrario A puede obtenerse del diagrama de la cantidad de movimiento del cuerpo, que se muestra en la figura 18.3. El diagrama es un esquema del cuerpo que muestra las siguientes cantidades de movimiento:

- El vector de la cantidad de movimiento lineal $\mathbf{p} = m\bar{\mathbf{v}}$ del cuerpo que actúa en G, donde m es la masa del cuerpo y $\bar{\mathbf{v}}$ es la velocidad de G.

- La cantidad de movimiento angular $h_G = \bar{I}\omega$ del cuerpo, que se representa como un par.

El momento resultante de estas cantidades de movimiento respecto de A es igual a la cantidad de movimiento angular del cuerpo respecto de A. Por ejemplo, si hacemos que d sea el "brazo de momento" de la cantidad de movimiento lineal, como se muestra en la figura 18.3, la cantidad de movimiento angular respecto de A será

$$h_A = \bar{I}\omega + m\bar{v}d \quad (A\text{: punto arbitrario}) \tag{18.12}$$

Un caso especial importante ocurre cuando A es un punto en el cuerpo (o cuerpo extendido) que tiene velocidad cero. En el apartado 17.3 se demostró que la ecuación (18.12) entonces se reduce a

$$h_A = I_A\omega \quad (A\text{: centro instantáneo}) \tag{18.13}$$

donde I_A es el momento de inercia del cuerpo respecto de A.

Se recomienda que se utilice un diagrama de la cantidad de movimiento para calcular las cantidades de movimiento de un cuerpo rígido. Estos diagramas no sólo proporcionan una representación pictórica conveniente de las cantidades de movimiento lineal y angular del cuerpo, también eliminan la necesidad de memorizar fórmulas como la ecuación (18.12).

Para ilustrar el uso de los diagramas de la cantidad de movimiento, considere la barra delgada homogénea de masa m y longitud L que se muestra en la figura 18.4(a). La barra rota respecto al punto fijo A con velocidad angular ω, en sentido positivo, en el instante que se muestra. El diagrama de la cantidad de movimiento para la barra, que se muestra en la figura 18.4(b), consiste en la cantidad de movimiento lineal $m\bar{v} = m(L/2)\omega$ y el par $\bar{I}\omega = (mL^2/12)\omega$. La cantidad de movimiento angular resultante (momento de la cantidad de movimiento) respecto de A es

$$\circlearrowleft + \quad h_A = \frac{mL^2}{12}\omega + \left(m\frac{L}{2}\omega\right)\frac{L}{2} = \frac{mL^2}{3}\omega$$

Ya que $I_A = mL^2/3$, entonces $h_A = I_A\omega$, como se esperaría, porque la velocidad de A es cero.

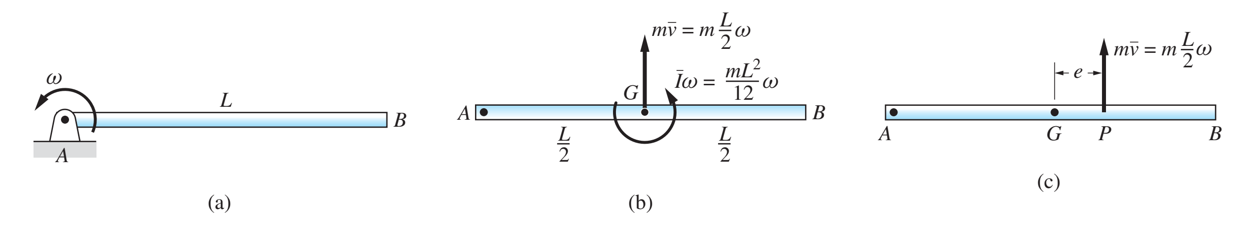


Fig. 18.4

Haciendo referencia de nuevo a la figura 18.4(b), la cantidad de movimiento angular respecto a B es

$$\circlearrowleft+ \quad h_B = \frac{mL^2}{12}\omega - \left(m\frac{L}{2}\omega\right)\frac{L}{2} = -\frac{mL^2}{6}\omega$$

Observe que la cantidad de movimiento angular respecto a B es negativa, es decir, en sentido negativo (recuerde que la velocidad angular de la barra es en sentido positivo). Además, note que h_B no es igual a $I_B\omega = (mL^2/3)\,\omega$. Debido a que la velocidad de B no es cero, es evidente que la ecuación (18.13) no es aplicable.

En la figura 18.4(c) se muestra una forma equivalente del diagrama de la cantidad de movimiento, donde las cantidades de movimiento de la figura (b) se han reducido a un solo vector de la cantidad de movimiento equivalente $m\bar{\mathbf{v}}$ que actúa en el punto P. La distancia e que localiza a P se encuentra a partir de la condición $h_P = 0$; es decir, $m\bar{v}e - \bar{I}\,\omega = 0$. Sustituyendo $\bar{v} = (L/2)\omega$ e $\bar{I} = mL^2/12$, se obtiene $e = L/6$. Si un cuerpo rota respecto a un eje fijo, se conoce como *centro de percusión* a un punto respecto al cual la cantidad de movimiento angular del cuerpo es cero, tal como P en la figura 18.4(c).

18.6 Principios de impulso-cantidad de movimiento

a. Relaciones de impulso-cantidad de movimiento

Si se supone que un cuerpo rígido consiste en un gran número de partículas, entonces los análisis previos de impulso y cantidad de movimiento para los sistemas de partículas pueden aplicarse al movimiento del cuerpo rígido. Las ecuaciones que se presentan en este apartado son válidas para el movimiento tridimensional, pero se restringirán las aplicaciones al movimiento en un plano.

Al repetir los resultados obtenidos para los sistemas de partículas del apartado 14.6, la ecuación de impulso-cantidad de movimiento lineal para el movimiento del cuerpo rígido es

$$\mathbf{L}_{1-2} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = \Delta\mathbf{p} \tag{18.14}$$

donde $\mathbf{L}_{1-2}$ representa el impulso lineal de las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo durante el intervalo de tiempo de t_1 a t_2 y $\Delta\mathbf{p}$ es el cambio en la cantidad de movimiento lineal del cuerpo durante el mismo intervalo de tiempo. Recuerde que la cantidad de movimiento lineal del cuerpo es

$$\mathbf{p} = m\bar{\mathbf{v}} \tag{18.15}$$

donde m es la masa del cuerpo y $\bar{\mathbf{v}}$ es la velocidad de su centro de masa.

Al aplicar la ecuación de impulso-cantidad de movimiento angular para los sistemas de partículas (apartado 15.7) al movimiento del cuerpo rígido, se tiene

$$(\mathbf{A}_A)_{1-2} = (\mathbf{h}_A)_2 - (\mathbf{h}_A)_1 = \Delta\mathbf{h}_A \tag{18.16}$$
(A: punto fijo* o centro de masa)

donde $(\mathbf{A}_A)_{1-2}$ es el impulso angular de las fuerzas externas alrededor del punto A para el intervalo de tiempo de t_1 a t_2 y $\Delta\mathbf{h}_A$ es el cambio en la cantidad de movimiento angular del cuerpo rígido respecto de A durante el mismo periodo.

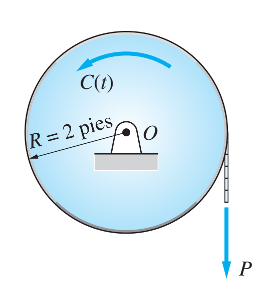
Los resultados precedentes también pueden aplicarse a los sistemas de cuerpos rígidos siempre que: 1. los impulsos se refieran sólo a las fuerzas que sean externas al sistema; 2. las cantidades de movimiento se interpreten como la suma de las cantidades de movimiento de los cuerpos que constituyen el sistema, y 3. el centro de masa que se menciona en la ecuación (18.16) sea el del sistema.

b. *Conservación de la cantidad de movimiento*

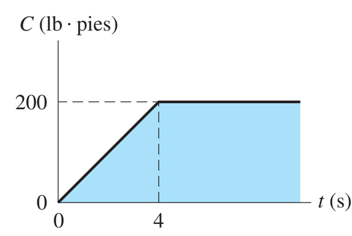
Como ocurre con los sistemas de partículas, la cantidad de movimiento lineal para un cuerpo rígido (o un sistema de cuerpos rígidos) se conserva cuando el impulso lineal de las fuerzas externas es cero. De manera similar, la cantidad de movimiento angular de un cuerpo rígido (o sistema de cuerpos rígidos) respecto a un punto se conserva cuando el impulso angular de las fuerzas externas respecto a ese punto es cero. El punto de referencia puede ser fijo en el espacio o ser el centro de masa, porque la ecuación (18.16) sólo es válida si A se restringe a esos puntos. Por supuesto, el mejor método para determinar si el impulso lineal o angular respecto a un punto es cero es examinar el diagrama de cuerpo libre del cuerpo o sistema de cuerpos.

*El punto A está fijo en el espacio; no es necesariamente un punto en el cuerpo.

Problema de ejemplo **18.7**



El disco homogéneo de 300 lb rota respecto a un eje fijo en O. El disco está bajo la acción de la fuerza constante $P = 70$ lb (aplicada a una cuerda enrollada alrededor del disco) y el par $C(t)$, en sentido positivo, que varía con el tiempo como se muestra en el diagrama. Si el disco estaba en reposo en el tiempo $t = 0$, determine: 1. su velocidad angular cuando $t = 4$ s, y 2. el tiempo en que la velocidad angular invierte su dirección.



Solución

El impulso angular resultante respecto de O se obtiene al sumar los impulsos angulares de todas las fuerzas que actúan sobre el disco. Las reacciones en los apoyos y el peso del disco no contribuyen al impulso angular respecto de O (que pasan por O). Por tanto, sólo es necesario considerar el impulso angular de la fuerza P y el par $C(t)$.

Ya que P es constante, su impulso angular respecto de O en el intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$ es $(A_O)_{1-2} = PR\,\Delta t$ (sentido negativo). Sin embargo, como $C(t)$ depende del tiempo, su impulso angular debe obtenerse por integración: $(A_O)_{1-2} = \int_{t_1}^{t_2} C(t)\,dt$ (sentido positivo). Para fines de cálculo, es útil observar que la integral representa el *área bajo el diagrama $C-t$* entre t_1 y t_2.

Parte

El momento de inercia del disco respecto a su centro de masa O es

$$\bar{I} = \frac{1}{2}mR^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{300}{32.2}\right)(2)^2 = 18.634 \text{ slug} \cdot \text{pie}^2$$

Con $t_1 = 0$ y $t_2 = 4$ s, el impulso angular resultante respecto de O es

$$\circlearrowleft^{+} \quad (A_O)_{1-2} = PR\,\Delta t - \int_{t_1}^{t_2} C(t)\,dt = (70)(2)(4) - \frac{1}{2}(200)(4) = 160 \text{ lb} \cdot \text{pie} \cdot \text{s}$$

Al aplicar al disco la ecuación de impulso-cantidad de movimiento angular, se obtiene

$$(A_O)_{1-2} = \Delta h_O = \bar{I}(\omega_2 - \omega_1)$$

$$\circlearrowleft^{+} \quad 160 = 18.634(\omega_2 - 0)$$

que resulta

$$\omega_2 = 8.59 \text{ rad/s (SMR)}$$ *Respuesta*

Parte 2

Sea t_3 el tiempo en que la velocidad angular del disco es cero. Si se observa que la velocidad angular inicial también es cero, se concluye que no existe cambio en el momento angular entre t_1 y t_3. En consecuencia, el impulso angular resultante debe ser cero; es decir

$$(A_O)_{1-3} = PR\,\Delta t - \int_{t_1}^{t_3} C(t)\,dt = 0 \qquad \text{(a)}$$

Para evaluar la integral (el área bajo el diagrama $C-t$), es preciso saber si $t_3 < 4$ s o $t_3 > 4$ s. Al observar que $C = 0$ en $t = 0$, se concluye que la velocidad angular inicial tiene sentido negativo, porque ésta es la dirección del impulso angular de P. Ya que el disco sigue girando en sentido negativo en $t = 4$ s (véase la solución de la parte 1), se concluye que $t_3 > 4$ s. Por tanto, la ecuación (a) es

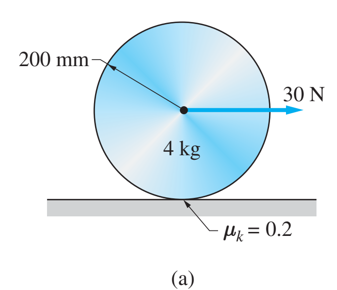
$$\circlearrowleft^{+} \quad (70)(2)t_3 - \left[\frac{1}{2}(200)(4) + 200(t_3 - 4)\right] = 0$$

La solución es

$$t_3 = 6.67 \text{ s}$$ *Respuesta*

Problema de ejemplo **18.8**

En la figura (a), el disco uniforme de 4 kg está en reposo cuando la fuerza de 30 N se aplica al centro del disco por un periodo de 1.5 s, después de que se elimina la fuerza. Durante el periodo de 1.5 s, la fricción es insuficiente para evitar que el disco se deslice. Determine el tiempo en que el deslizamiento termina y la velocidad angular del disco correspondiente. El coeficiente de fricción cinética entre el disco y la superficie horizontal es 0.2.

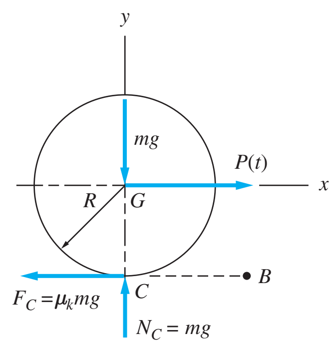


(a)

Solución

Diagrama de cuerpo-libre (DCL)

La figura (b) muestra el DCL del disco en un tiempo arbitrario t durante el periodo de deslizamiento. Debido a que no existe aceleración en la dirección y, la fuerza normal en el punto de contacto C se obtiene de $\Sigma F_y = 0$, que resulta en $N_C = mg$. Como el disco se desliza, la fuerza de fricción es $F_C = \mu_k mg$.



DCL (durante el deslizamiento)

Diagrama de la cantidad de movimiento final

En la figura (b) también se muestra el diagrama de la cantidad de movimiento final del disco en el instante ($t = t_2$) cuando el deslizamiento termina. Este diagrama representa la cantidad de movimiento angular respecto al centro de masa G: $\bar{I}\omega_2 = (mR^2/2)\omega_2$ y la cantidad de movimiento lineal del disco: $m\bar{v}_2 = m(R\omega_2)$, donde $\bar{v}_2 = R\omega_2$ es la condición cinemática para rodar sin deslizarse.

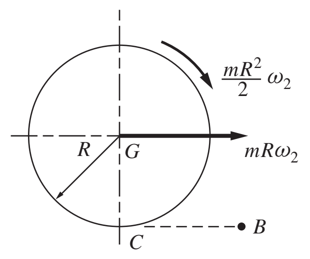


Diagrama de la cantidad de movimiento final

(b)

Análisis de impulso-cantidad de movimiento

Se empieza por aplicar la ecuación de impulso-cantidad de movimiento angular respecto al centro de masa G del disco, cubriendo el periodo $t_1 = 0$ (cuando se aplica la fuerza de 30 N) a t_2 (cuando termina el deslizamiento). Al hacer referencia a la figura (b), se tiene:

$$(A_G)_{1-2} = (h_G)_2 - (h_G)_1$$

$$\circlearrowleft^{+} \quad \int_0^{t_2} (\mu_k mg) R\, dt = \frac{mR^2}{2}\omega_2 - 0$$

$$\mu_k g t_2 = \frac{R}{2}\omega_2$$

Por tanto,

$$\omega_2 = \frac{2\mu_k g}{R} t_2 = \frac{2(0.2)(9.81)}{0.2} t_2 = 19.62 t_2 \qquad \text{(a)}$$

La ecuación de impulso-cantidad de movimiento lineal en la dirección x da

$$(L_x)_{1-2} = (p_x)_2 - (p_x)_1$$

$$\xrightarrow{+} \quad \int_0^{t_2} P(t)\,dt - \mu_k m g t_2 = m R \omega_2 - 0 \qquad \text{(b)}$$

Al observar que $P(t) = 30$ N cuando $0 < t < 1.5$ s y cero en otro caso, se tiene $\int_0^{t_2} P(t)\,dt = (30)(1.5) = 45 \text{ N} \cdot \text{s}$. Por tanto, la ecuación (b) es

$$45 - (0.2)(4)(9.81)t_2 = (4)(0.2)\omega_2$$

$$\omega_2 = 56.25 - 9.81 t_2 \qquad \text{(c)}$$

La solución de las ecuaciones (a) y (c) es

$$t_2 = 1.911 \text{ s} \qquad \omega_2 = 37.5 \text{ rad/s}$$ *Respuesta*

Solución alternativa

También es posible aplicar la ecuación de impulso-cantidad de movimiento angular respecto a cualquier punto fijo, como el B que se muestra en la figura (b). El resultado es

$$(A_B)_{1-2} = (h_B)_2 - (h_B)_1$$

$$\circlearrowright + \quad \int_0^{t_2} R P(t)\,dt = \left[\frac{mR^2}{2}\omega_2 + (mR\omega_2)R\right] - 0$$

$$\int_0^{t_2} P(t)\,dt = \frac{3}{2} m R \omega_2$$

que da

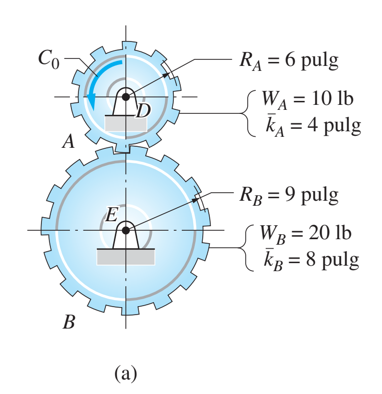
$$\omega_2 = \frac{2}{3mR}\int_0^{t_2} P(t)\,dt = \frac{2}{3(4)(0.2)}(45) = 37.5 \text{ rad/s}$$

como antes. Ahora se puede calcular el tiempo t_2, cuando finaliza el deslizamiento, con las ecuaciones (a) o (c).

Problema de ejemplo **18.9**

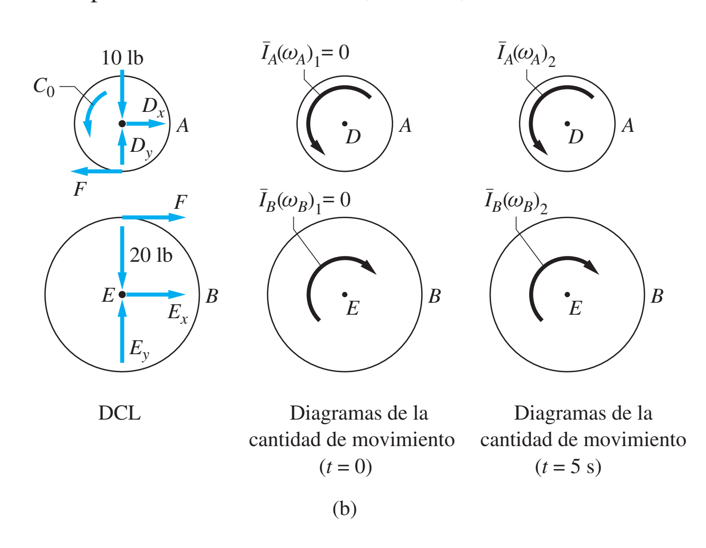
La figura (a) muestra dos engranes A y B que están sujetos con pernos en D y E. Los engranes se encuentran estacionarios cuando el par constante C_0, en sentido positivo, se aplica en el tiempo $t = 0$. Determine el valor de C_0 para el que la velocidad angular del engrane A será 50 rad/s cuando $t = 5$ s y obtenga la fuerza de contacto tangencial correspondiente entre los engranes.

Solución



(a)

La figura (b) muestra los DCL y diagramas de la cantidad de movimiento en $t = 0$ y $t = 5$ s para cada engrane. Los DCL contienen los pesos de los engranes, el par aplicado C_0, la fuerza de contacto tangencial F y las reacciones en los soportes. (Ya que C_0 es constante, F también lo es.) Observe que cada diagrama de la cantidad de movimiento sólo contiene la cantidad de movimiento angular $\bar{I}\omega$, porque cada engrane rota respecto a su centro de masa; es decir, $m\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$.



(b)

El método de fuerza-masa-aceleración (FMA), que se describió en el capítulo 17 o el método de impulso-cantidad de movimiento pueden utilizarse con la misma facilidad para resolver este problema. Aquí el método FMA sería más adecuado porque las fuerzas, y, por tanto, las aceleraciones, son constantes. El método de impulso-cantidad de movimiento, que se usará es conveniente de modo similar, porque se requiere calcular el cambio en velocidad que ocurre durante un intervalo de tiempo dado.

Los momentos de inercia de los engranes son $\bar{I}_A = m_A\bar{k}_A^2 = (10/32.2)(4/12)^2 = 0.03451$ slug · pie^2 e $\bar{I}_B = m_B\bar{k}_B^2 = (20/32.2)(8/12)^2 = 0.2761$ slug · pie^2. Al utilizar la figura (b), la ecuación de impulso-cantidad de movimiento angular para el engrane A respecto al punto D es

$$(A_D)_{1-2} = \Delta h_D$$

$$\circlearrowleft+ \quad C_0(\Delta t) - FR_A\Delta t = \bar{I}_A[(\omega_A)_2 - (\omega_A)_1]$$

$$C_0(5) - F\left(\frac{6}{12}\right)(5) = 0.03451(50 - 0) \qquad \text{(a)}$$

Note que los impulsos angulares se calcularon fácilmente porque C_0 y F son constantes.

Si se observa que el punto de contacto sobre cada engrane tiene la misma velocidad, se concluye que $6\omega_A = 9\omega_B$, que da $(\omega_B)_2 = (2/3)(\omega_A)_2 = (2/3)(50) = 33.33$ rad/s. Por tanto, de la figura (b), la ecuación de impulso-cantidad de movimiento angular para el engrane B respecto al punto E es

$$(A_E)_{1-2} = \Delta h_E$$

$$\circlearrowleft+ \quad FR_B\Delta t = \bar{I}_B[(\omega_B)_2 - (\omega_B)_1]$$

$$F\left(\frac{9}{12}\right)(5) = 0.2761(33.33 - 0) \qquad \text{(b)}$$

De la ecuación (b) se encuentra que la fuerza de contacto es

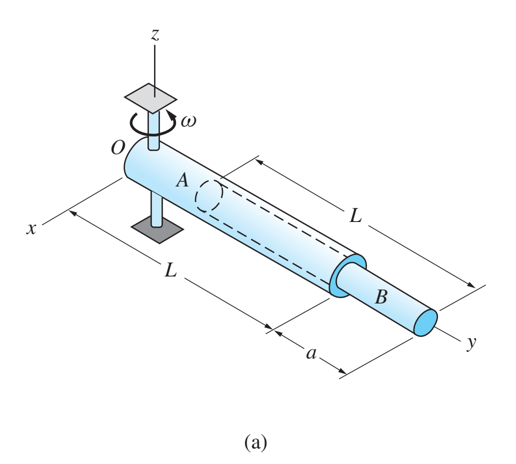
$$F = 2.454 \text{ lb} \qquad \textit{Respuesta}$$

Al sustituir este valor en la ecuación (a), se obtiene

$$C_0 = 1.572 \text{ lb} \cdot \text{pie} \qquad \textit{Respuesta}$$

Problema de ejemplo **18.10**

La figura (a) muestra una varilla B de masa m_B que se ha colocado dentro del tubo A de masa m_A. Ambos cuerpos son delgados, homogéneos y de longitud L. Al principio, B se mantiene dentro de A ($a = 0$) mediante un tapón ligero (que no se muestra) que cubre el extremo de A mientras el montaje rota libremente con velocidad angular ω_1 respecto al eje z. Entonces el tapón se cae, permitiendo que la varilla salga del tubo. Determine la velocidad angular ω_2 del montaje cuando la varilla está por completo fuera del tubo ($a = L$). Desprecie la fricción.



(a)

Solución

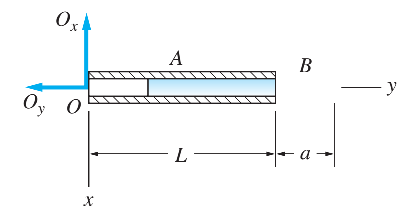
Diagrama de cuerpo libre (DCL)

La figura (b) muestra el DCL del montaje cuando la varilla B se extiende una distancia arbitraria a más allá del extremo del tubo A. Este DCL sólo muestra las fuerzas que actúan en el plano xy. El DCL completo también incluiría los pesos de los cuerpos, una reacción O_z y un par reactivo C_x que actúa sobre O. Sin embargo, como éstos no tienen efecto sobre el movimiento en el plano xy, se omiten. Es preciso observar que las fuerzas de contacto entre el tubo y la varilla no aparecen en el DCL porque son internas al sistema. Esta es la razón principal por la que se decide analizar el movimiento del montaje completo en lugar de considerar a cada cuerpo por separado.

Diagrama de la cantidad de movimiento inicial

La figura (b) también muestra el diagrama de la cantidad de movimiento inicial, cuando la varilla B se encuentra completamente en el interior del tubo A, antes de

que el tapón se caiga. Vea que este diagrama incluye los vectores de cantidad de movimiento angular y lineal de A y B. Las velocidades angulares de ambos cuerpos son ω_1, de modo que las velocidades de sus centros de masa son iguales a $(L/2)\omega_1$.



DCL (posición arbitraria)

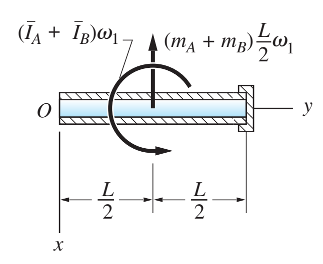


Diagrama de la cantidad de movimiento inicial

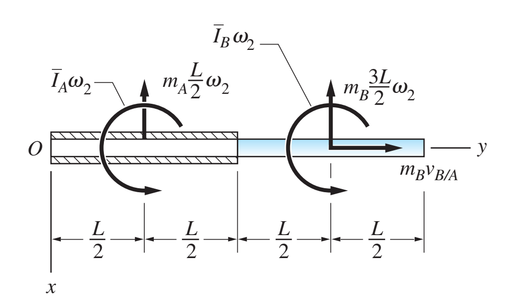


Diagrama de la cantidad de movimiento final

(b)

Diagrama de la cantidad de movimiento final

En el diagrama de la cantidad de movimiento final de la figura (b), la varilla B sale del tubo A con la velocidad relativa $v_{B/A}$. Las velocidades angulares de los dos cuerpos son iguales a ω_2, lo que da origen a las cantidades de movimiento angular que se muestran. El vector de la cantidad de movimiento lineal de A resulta del hecho de que la velocidad de su centro de masa es $(L/2)\omega_2$. Las dos componentes del vector de la cantidad de movimiento lineal de B corresponden a las componentes polares de la velocidad de su centro de masa, a saber, $v_R = v_{B/A}$ y $v_\theta = (3L/2)\omega_2$.

Análisis de impulso-cantidad de movimiento

El resto del análisis consiste en escribir y resolver las ecuaciones de impulso-cantidad de movimiento empleando los tres diagramas que se muestran en la figura (b). Debido a que sólo interesa ω_2, la solución más conveniente utiliza la ecuación de impulso-cantidad de movimiento angular con O como el punto de referencia, lo que elimina las reacciones desconocidas O_x y O_y. A partir del DCL de la figura (b), se ve

que $(A_O)_{1-2} = 0$ (O_x y O_y no contribuyen al impulso angular respecto de O). Al observar que O es un punto fijo, es posible aplicar la ecuación de impulso-cantidad de movimiento angular $(A_O)_{1-2} = \Delta h_O$, que en este caso se reduce a $\Delta h_O = 0$. En otras palabras, se conserva la cantidad de movimiento angular del sistema respecto de O.

Al igualar los momentos de las cantidades de movimiento respecto de O en los dos diagramas de la cantidad de movimiento que se muestran en la figura (b), se obtiene

$$(h_O)_1 = (h_O)_2$$

$$\circlearrowleft + \quad (\bar{I}_A + \bar{I}_B)\omega_1 + (m_A + m_B)\frac{L}{2}\omega_1\left(\frac{L}{2}\right)$$

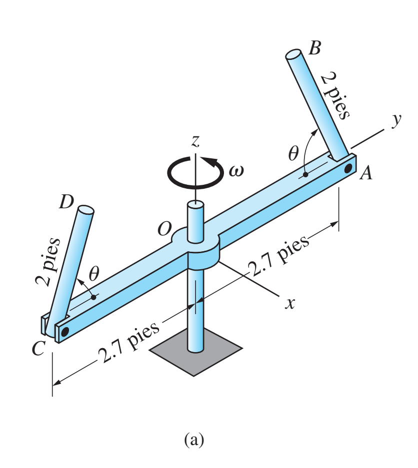
$$= \left[\bar{I}_A\omega_2 + \left(m_A\frac{L}{2}\omega_2\right)\left(\frac{L}{2}\right)\right] + \left[\bar{I}_B\omega_2 + \left(m_B\frac{3L}{2}\omega_2\right)\left(\frac{3L}{2}\right)\right]$$

Al sustituir $\bar{I} = mL^2/12$ para cada barra y despejar a ω_2, resulta

$$\omega_2 = \frac{m_A + m_B}{m_A + 7m_B}\omega_1 \qquad \textit{Respuesta}$$

Es preciso mencionar que esta solución sería válida aun si existiera fricción entre la varilla y el tubo; siempre y cuando el coeficiente de fricción sea suficientemente pequeño para permitir el movimiento relativo entre ellos.

Problema de ejemplo 18.11



(a)

El montaje que se muestra en la figura (a) consiste en un brazo AOC, sujeto con pernos a dos delgadas varillas homogéneas AB y CD. El montaje rota respecto al eje z en un cojinete sin fricción en O. Un mecanismo interno (que no se muestra en la figura) puede posicionar y fijar las dos varillas en cualquier ángulo θ. El momento de inercia del brazo AOC respecto al eje z es 0.8 slug · pie^2 y las varillas AB y CD pesan 3 lb cada una. Al principio el montaje rota libremente respecto al eje z con velocidad angular $\omega_1 = 10$ rad/s con $\theta = 90^\circ$. Calcule la velocidad angular del montaje cuando las varillas se han movido a la posición $\theta = 180^\circ$.



Solución

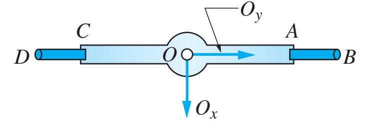
La figura (b) contiene el DCL del montaje en una posición arbitraria, que muestra sólo las fuerzas que actúan en el plano xy, a saber, O_x y O_y, las dos componentes de la reacción del cojinete en O. Observe que este DCL no cambia durante el movimiento del montaje. En la figura (b) también se muestran los diagramas de las cantidades de movimiento inicial ($\theta = 90^\circ$) y final ($\theta = 180^\circ$). Los valores numéricos que se muestran en los diagramas de la cantidad de movimiento se calcularon como se describe a continuación.



Diagrama de la cantidad de movimiento inicial

Brazo AOC:

$$\bar{I}_z\omega_1 = 0.8(10) = 8 \text{ lb} \cdot \text{pie} \cdot \text{s}$$



DCL (posición arbitraria)

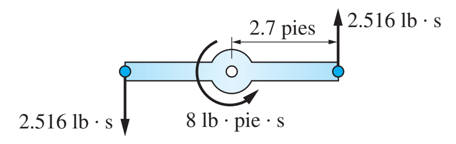


Diagrama de la cantidad de movimiento inicial

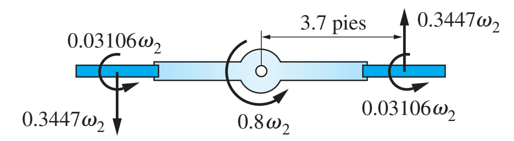


Diagrama de la cantidad de movimiento final

(b)

Las varillas *AB* y *CD* (ambas son perpendiculares al plano de la figura):

$$m\bar{v}_1 = mr_1\omega_1 = \frac{3}{32.2}(2.7)(10) = 2.516 \text{ lb} \cdot \text{s}$$

Diagrama de la cantidad de movimiento final

Brazo *AOC*:

$$\bar{I}_z\omega_2 = 0.8\omega_2$$

Las varillas *AB* y *CD* (ambas están en el plano de la figura):

$$m\bar{v}_2 = mr_2\omega_2 = \frac{3}{32.2}(3.7)\omega_2 = 0.3447\omega_2$$

$$\bar{I}_z\omega_2 = \frac{1}{12}mL^2\omega_2 = \frac{1}{12}\frac{3}{32.2}(2)^2\omega_2 = 0.03106\omega_2$$

Conservación de la cantidad de movimiento angular

Del DCL de la figura (b) se ve que no existe impulso angular respecto al eje z. Por tanto se conserva la cantidad de movimiento angular respecto al eje z. Al referirse a los diagramas de la cantidad de movimiento de la figura (b) se tiene

$$(h_z)_1 = (h_z)_2$$

$$\circlearrowleft + \quad 8 + 2[2.7(2.516)]] = 0.8\omega_2 + 2(0.03106\omega_2) + 2[3.7(0.3447\omega_2)]$$

que da

$$\omega_2 = 6.32 \text{ rad/s}$$ *Respuesta*

Problemas

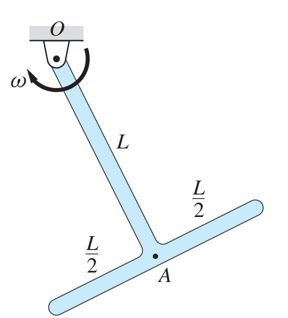


Fig. P18.57

18.57 El cuerpo en forma de T está hecho de dos varillas uniformes idénticas, cada una de masa $m/2$. Si el cuerpo rota respecto de O con velocidad angular ω, calcule su cantidad de movimiento angular respecto de: (a) el centro de masa del cuerpo; (b) el punto O, y (c) el punto A.

18.58 La placa uniforme de masa m rota respecto al vértice O con rapidez angular ω. Determine la cantidad de movimiento angular de la placa respecto a: (a) el centro de masa; (b) el vértice O y (c) el vértice A.

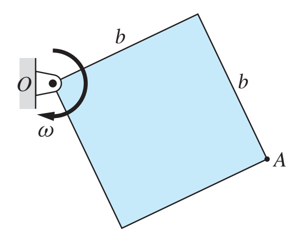


Fig. P18.58

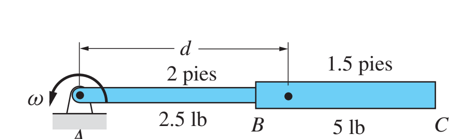


Fig. P18.59

18.59 Las varillas delgadas uniformes AB y BC están conectadas de manera rígida entre sí. Si el montaje rota con libertad respecto al perno en A, encuentre la distancia d que localiza su centro de percusión.

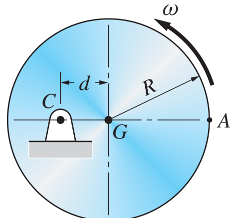
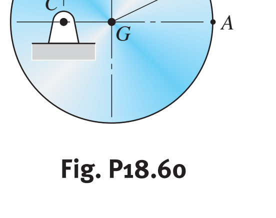



Fig. P18.60

18.60 El disco uniforme de masa m y radio R rota respecto al perno en C, ubicado a una distancia d de su centro. Determine d de manera que el centro de percusión esté en el punto A sobre el borde del disco.

18.61 En la parte (a) de la figura, el radio de giro respecto de O de la polea de 20 kg es 0.16 m. El extremo de la cuerda enrollada alrededor de la polea se jala con la fuerza $P(t)$, que varía con el tiempo como se muestra en la parte (b). Si se supone que la polea parte del reposo en $t = 0$, determine su velocidad angular en $t = 12$ s.

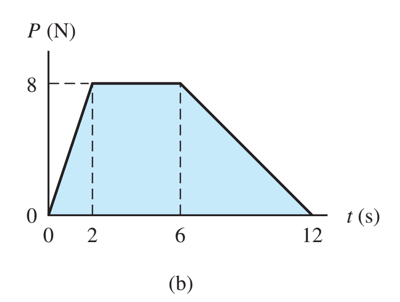


Fig. P18.61

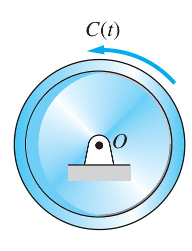


Fig. P18.62

18.62 El radio de giro del volante de inercia de 40 lb que gira respecto de O es $\bar{k} = 9$ pulg. El par que actúa sobre el volante es $C(t) = 12(1 - e^{-2t})$ lb · pie, donde t es el tiempo en segundos. Si el volante está en reposo cuando $t = 0$, encuentre su rapidez angular cuando $t = 60$ s.

18.63 El bloque B está suspendido de un cable unido al centro de la polea A. La fuerza vertical de 75 N se aplica a un extremo del cable que pasa alrededor de A. Si en el tiempo $t = 0$ la velocidad angular de la polea es 3 rad/s en sentido negativo, determine el tiempo en que el sistema llegará momentáneamente al reposo.

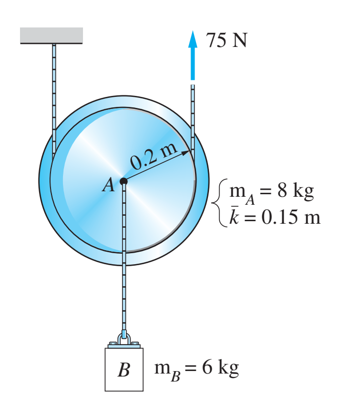


Fig. P18.63

18.64 El par de torsión M que actúa sobre el eje de entrada de un generador varía con el tiempo t como $M(t) = M_0 \exp(-t/t_0)$, donde $M_0 = 4.6$ N · m y $t_0 = 3.8$ s. Si el generador está en reposo en $t = 0$, calcule su rapidez angular terminal. Suponga que el generador rota sin resistencia y utilice $\bar{I} = 0.72$ kg · m^2 para su rotor.

18.65 El disco uniforme de masa m y radio R está inicialmente en reposo sobre una superficie horizontal sin fricción. La fuerza constante de magnitud P se aplica al tiempo $t = 0$ a la cuerda enrollada alrededor del disco. Para un tiempo arbitrario t, determine la expresión para la velocidad de B (el punto sobre el borde en donde la cuerda deja al disco).

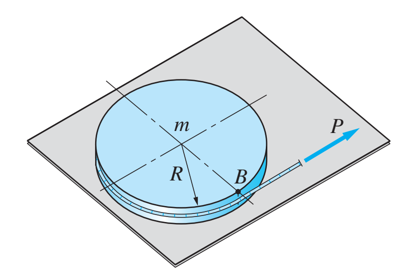
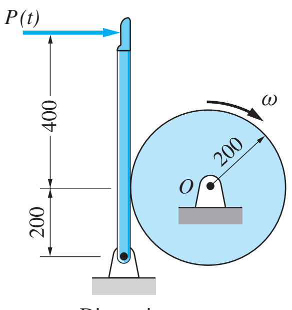
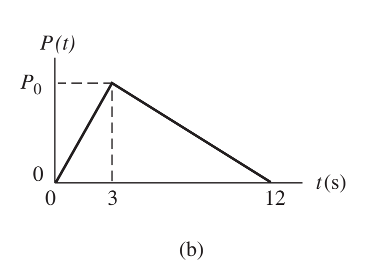


Fig. P18.65



(a)



(b)

Fig. P18.66

18.66 El disco en la parte (a) de la figura tiene una masa de 20 kg y su radio de giro respecto de O es 160 mm. El disco gira libremente en $\omega = 400$ rev/min cuando la fuerza $P(t)$ se aplica a la palanca del freno en $t = 0$. En la parte (b) se muestra la relación P-t. Determine el valor pico P_0 de la fuerza para la cual el disco llegará al reposo en $t = 12$ s. El coeficiente de fricción cinética entre el disco y el freno es 0.3.

18.67 Un disco homogéneo A de 36 lb está unido a la varilla uniforme BC de 12 lb por un cojinete en B, cuyo eje es vertical. La varilla rota libremente respecto al eje vertical en C. El sistema está en reposo cuando el par constante $M_0 = 4$ lb · pie se aplica a la barra. Encuentre la velocidad angular de la varilla BC después de 2 s, suponiendo que el cojinete en B está: (a) en libertad para girar y (b) bloqueado.

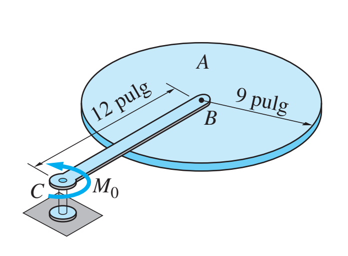


Fig. P18.67

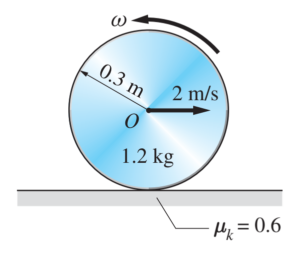
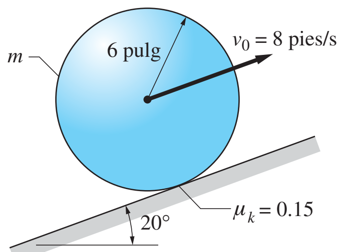


Fig. P18.68

18.68 El cilindro homogéneo de 1.2 kg se lanza sobre la superficie horizontal con una rapidez de avance de 2 m/s y un contragiro de ω rad/s. Determine el valor

requerido de ω si el cilindro debe detenerse por completo. El coeficiente de fricción cinética entre el cilindro y la superficie es 0.6.



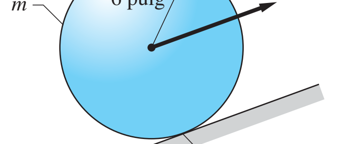


Fig. P18.69

18.69 La pelota sólida homogénea de masa m se lanza sobre el plano inclinado en el tiempo $t = 0$ con una rapidez de avance de 8 pies/s sin girar. El coeficiente de fricción cinética entre la pelota y el plano es 0.15. Calcule el tiempo en que la pelota deja de deslizarse sobre el plano y su velocidad angular en ese tiempo.

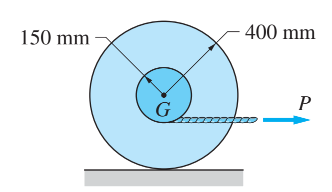


Fig. P18.70

***18.70** El momento de inercia de masa del carrete de 60 kg, respecto a su centro de masa G es 1.35 kg · m^2. El carrete está en reposo sobre la superficie horizontal cuando la fuerza constante $P = 200$ N se aplica al cable que se encuentra enrollado en su masa. Obtenga la velocidad angular del carrete 2 s después, suponiendo que el coeficiente de fricción estática y cinética entre el carrete y la superficie es: (a) $\mu = 0.2$ y (b) $\mu = 0.1$.

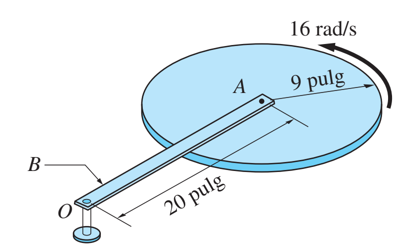


Fig. P18.71

18.71 El disco homogéneo A de 6 lb está sujeto con pernos al brazo uniforme B cuyo peso es de 4 lb. El montaje es libre para rotar respecto al eje vertical en O. Al principio el brazo está en reposo con el disco girando con una velocidad angular de 16 rad/s. Si un freno interno (que no se muestra) bloquea al disco y al brazo juntos, ¿cuál será la velocidad angular final del montaje?

18.72 La barra uniforme AB de 1.2 lb y el pequeño deslizador C de 0.2 lb rotan libremente respecto al eje vertical en A. La velocidad angular del sistema es 5 rad/s cuando se rompe la cuerda que sujeta a C. Determine la velocidad angular de AB cuando (a) C está a punto de dejar la barra y (b) inmediatamente después de que C abandona la barra.

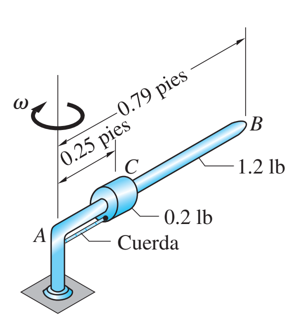


Fig. P18.72

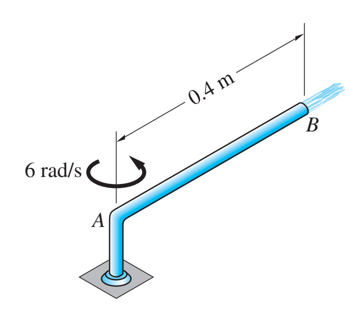


Fig. P18.73

***18.73** El tubo AB de diámetro interno 10 mm rota sin fricción respecto al eje vertical en A. El agua fluye por el tubo con rapidez constante de 1.8 m/s relativa al tubo. Encuentre el par que debe aplicarse a este último para mantener su rapidez angular en 6 rad/s.

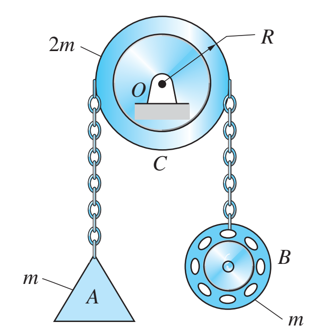


Fig. P18.74

18.74 Una cadena que pasa por la polea C sostiene el peso A y el carrete motorizado B, ambos de masa m. La polea puede modelarse como un disco uniforme de masa $2m$. El sistema está en reposo cuando el carrete empieza a embobinar la cadena con una rapidez v_0 relativa al carrete. Determine las velocidades de A y B en términos de v_0.

18.75 El disco estacionario B de 15 lb se coloca sobre el disco A de 10 lb, que rota libremente a 3000 rev/min. Suponiendo que ambos discos son homogéneos, obtenga su rapidez angular final.

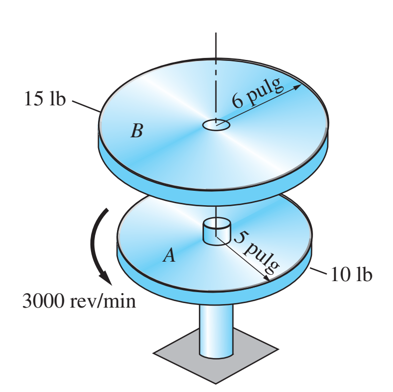


Fig. 18.75

18.76 El péndulo en la parte (a) de la figura consiste en la varilla delgada de 0.8 kg y el cilindro homogéneo de 3.2 kg. El péndulo está en reposo cuando recibe un breve impulso de la fuerza $F(t)$, que varía con el tiempo como se muestra en la parte (b). Determine su rapidez angular inmediatamente después de recibir el impulso. Desprecie el pequeño desplazamiento angular durante este último.

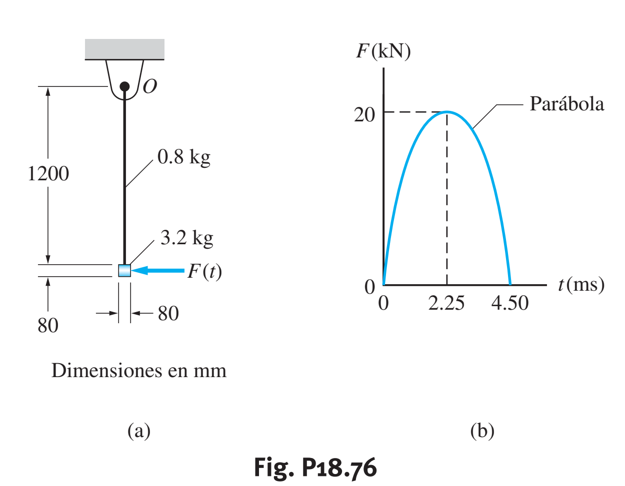


Fig. P18.76

18.77 La barra delgada uniforme AB de 15 kg se coloca en un collar liso en O. Un perno mantiene a la barra en la posición que se muestra conforme el conjunto rota libremente a 12 rad/s respecto al eje vertical en O. Si se quita el perno, permitiendo que la barra resbale en el collar, determine la velocidad angular final del conjunto. Observe que el deslizamiento está limitado por los pequeños collares en los extremos de la varilla.

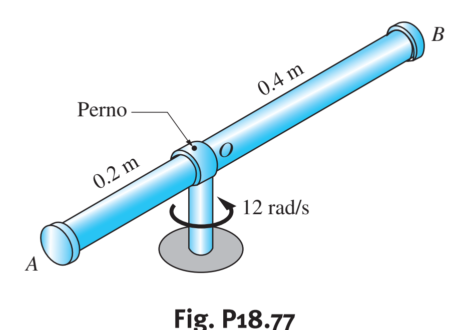


Fig. P18.77

18.78 El deslizador en A de 0.35 lb está unido al aro delgado uniforme de 2.2 lb con un perno. El conjunto rota en el plano horizontal respecto de O con rapidez angular $\omega_1 = 40$ rad/s cuando se elimina el perno del deslizador. Entonces éste se mueve sobre el aro en rotación, finalizando en el punto B. Determine la rapidez angular final del montaje.

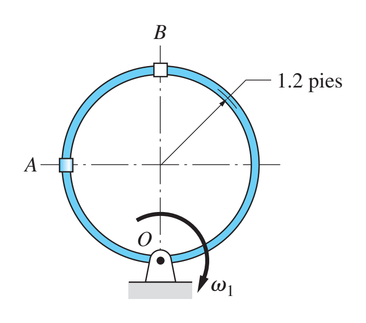


Fig. P18.78

***18.79** El peso combinado del ciclista y la bicicleta sin las ruedas es de 172 lb. Cada rueda pesa 5 lb, lo que se debe principalmente a los pesos del aro y el neumático. Si la bicicleta parte del reposo, obtenga su rapidez después de 10 s, suponiendo que la cadena suministra un par constante de 15 lb · pie sobre la rueda trasera y que las ruedas no se deslizan sobre el suelo.

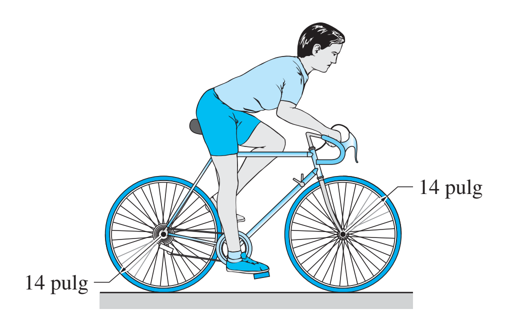


Fig. P18.79

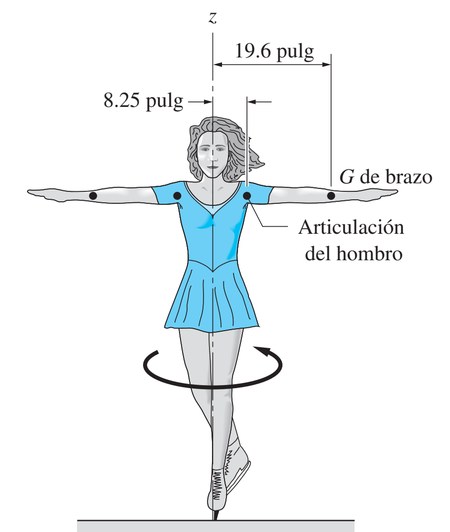
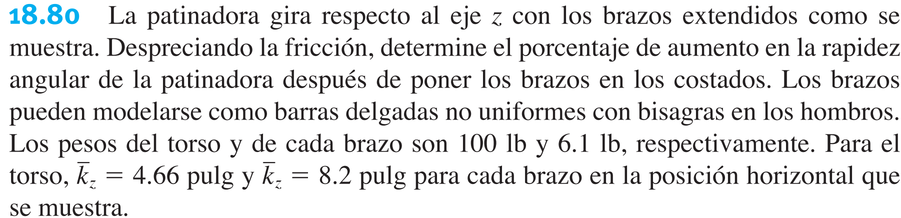


Fig. P18.80



18.80 La patinadora gira respecto al eje z con los brazos extendidos como se muestra. Despreciando la fricción, determine el porcentaje de aumento en la rapidez angular de la patinadora después de poner los brazos en los costados. Los brazos pueden modelarse como barras delgadas no uniformes con bisagras en los hombros. Los pesos del torso y de cada brazo son 100 lb y 6.1 lb, respectivamente. Para el torso, $\bar{k}_z = 4.66$ pulg y $\bar{k}_z = 8.2$ pulg para cada brazo en la posición horizontal que se muestra.

18.81 Una barra AB cuyo peso es despreciable soporta dos discos delgados uniformes idénticos de 10 kg. El ángulo ϕ entre cada disco y la barra puede variarse lentamente con un mecanismo interno (que no se muestra). El conjunto completo tiene libertad para rotar respecto al eje z. Si la velocidad angular del montaje respecto al eje z es ω_0 cuando $\phi = 0$, determine ϕ para el que la velocidad angular sea $\omega_0/2$.

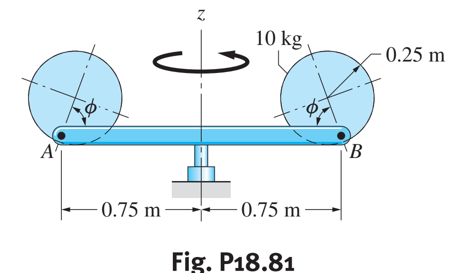


Fig. P18.81

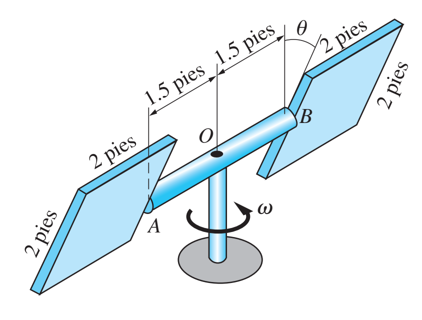


Fig. P18.82

18.82 Dos placas cuadradas delgadas, que pesan 12 lb cada una, están unidas a los extremos de una barra uniforme AB de 8 lb. Un mecanismo interno puede rotar las placas de manera simultánea respecto al eje de la barra AB. Cuando $\theta = 0$, el montaje rota con libertad respecto al eje vertical en O con velocidad angular $\omega = 12$ rad/s. Encuentre la velocidad angular después de que las placas han rotado a la posición $\theta = 90^\circ$.

18.7 Impacto del cuerpo rígido

En los apartados 15.8 a 15.10 se analizó el impacto de los sistemas de partículas, donde se introdujo un análisis simplificado del impacto elástico que utilizó el coeficiente de restitución, una constante experimental. El impacto del cuerpo rígido es un problema más complejo que depende de las geometrías de los cuerpos que chocan y de sus superficies características, así como de sus velocidades relativas. Cualquier intento para extender el concepto de un coeficiente de restitución constante al impacto del cuerpo rígido provoca que el problema real se simplifique en exceso dando resultados de significado dudoso. Por tanto, no se considerarán problemas de impacto del cuerpo rígido que requieran el uso de una constante experimental análoga al coeficiente de restitución.

En el análisis de impacto de cuerpo rígido surge una simplificación útil cuando se supone que el movimiento es impulsivo, es decir, que la duración del impacto es despreciable, véase el apartado 15.9. Como ya se indicó, la expresión "el impulso angular es igual al cambio en la cantidad de movimiento angular" es válida, en general, sólo respecto al centro de masa o a un punto fijo. Sin embargo, para el movimiento impulsivo, "el impulso angular es igual al cambio en la cantidad de movimiento angular" es válido respecto a *todos* los puntos. La razón para esta simplificación es que al suponer que el tiempo de impacto es infinitesimal, se desprecian todos los desplazamientos durante éste. En consecuencia, todos los puntos están, en efecto, fijos durante el impacto.

Los pasos generales en el análisis de los problemas de impacto del cuerpo rígido son similares a aquellos que se dieron en el apartado 15.9 para el impacto de partículas.

Paso 1: Dibuje el DCL de los cuerpos que chocan y/o del sistema de cuerpos que chocan. Identifique las fuerzas impulsivas, utilice un símbolo especial, como un acento circunflejo (ˆ), para etiquetar a cada fuerza impulsiva. (Es aconsejable reestructurar el DCL, que muestra sólo las fuerzas impulsivas.)

Paso 2: Dibuje los diagramas de la cantidad de movimiento de los cuerpos en el instante inmediatamente anterior al impacto.

Paso 3: Dibuje los diagramas de la cantidad de movimiento para los cuerpos en el instante inmediatamente posterior al impacto.

Paso 4: Con los diagramas que se elaboraron en los pasos del 1 al 3, deduzca y resuelva las ecuaciones de impulso-cantidad de movimiento apropiadas para los cuerpos individuales y/o el sistema de cuerpos.

Problema de ejemplo **18.12**

La figura (a) muestra una bala C de 0.025 lb que se dispara en el extremo B de una barra delgada homogénea AB de 15 lb. La barra al principio está en reposo y la velocidad inicial de la bala es $v_1 = 1500$ pies/s, dirigida como se muestra. Suponiendo que la bala queda incrustada en la barra, calcule: 1. la velocidad angular ω_2 de la barra inmediatamente después del impacto; 2. el impulso ejercido sobre la barra en A durante el impacto y 3. el porcentaje de pérdida de energía como resultado del impacto. Desprecie la duración de este último.

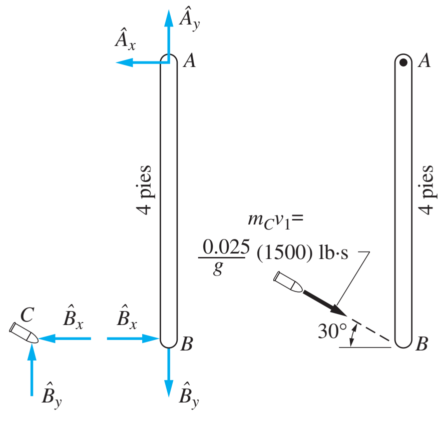
(a)

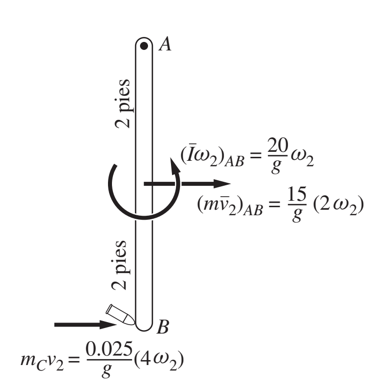
Solución

Comentarios introductorios

Debido a que la duración del impacto es despreciable, el movimiento es impulsivo, con la barra y la bala ocupando en esencia las mismas posiciones antes, durante y después del impacto.

En la figura (b) se muestran los DCL para la bala y la barra durante el impacto y sólo se indican las fuerzas impulsivas (que se designan con los acentos circunflejos). Ya que los pesos de C y AB son fuerzas finitas, éstas no entrarán en el análisis de impacto y en consecuencia se omiten en el DCL. Observe que el diagrama contiene $\hat{B}_x$ y $\hat{B}_y$, las componentes de la fuerza de contacto impulsiva en B, y $\hat{A}_x$ y $\hat{A}_y$, las componentes de la reacción impulsiva del perno en A.





DCL durante el impacto (sólo fuerzas impulsivas)

Diagrama de la cantidad de movimiento antes del impacto

Diagrama de la cantidad de movimiento después del impacto

(b)

La figura (b) también contiene los diagramas de la cantidad de movimiento inmediatamente antes y después del impacto. El diagrama de la cantidad de movimiento antes del impacto sólo contiene la cantidad de movimiento lineal inicial de la bala C.

El diagrama de la cantidad de movimiento después del impacto contiene tanto la cantidad de movimiento final de la bala y las cantidades de movimiento lineal y angular finales de la barra AB (se supone que la velocidad angular ω_2 se mide en rad/s). Observe que las relaciones cinemáticas que se emplean en el diagrama, $v_2 = 4\omega_2$ y $(\bar{v}_2)_{AB} = 2\omega_2$, resultan del hecho de que A es un punto fijo. Además, el momento de

inercia central de AB es $\bar{I}_{AB} = mL^2/12 = (1/12)(15/g)(4)^2 = 20/g$ slug · pie^2, que da $(\bar{I}\,\omega_2)_{AB} = (20/g)\omega_2$ lb · pie · s, como se indica en el diagrama.

Al analizar la figura (b) se ve que hay un total de cinco incógnitas: los impulsos de $\hat{A}_x$, $\hat{A}_y$, $\hat{B}_x$ y $\hat{B}_y$ y la velocidad angular ω_2. También existe un total de cinco ecuaciones de impulso-cantidad de movimiento independientes: dos para la bala C y tres para la barra AB. Por tanto, las cinco incógnitas pueden determinarse a partir de las cinco ecuaciones independientes. Sin embargo, sólo se requiere encontrar tres incógnitas (ω_2 y los impulsos de $\hat{A}_x$ y $\hat{A}_y$), entonces no será necesario emplear todas las ecuaciones.

Parte 1

El medio más eficaz para calcular ω_2 es considerar el sistema compuesto de la bala y la barra, en lugar de cada uno por separado. Para el sistema, $\hat{B}_x$ y $\hat{B}_y$ son fuerzas internas; en consecuencia, $\hat{A}_x$ y $\hat{A}_y$ son las únicas fuerzas externas. Por tanto, el impulso angular que actúa sobre el sistema respecto de A es cero, lo que lleva a concluir que se conserva la cantidad de movimiento angular respecto de A. Refiriéndose a los diagramas de la cantidad de movimiento de la figura (b), se obtiene para el sistema

$$(h_A)_1 = (h_A)_2$$

$$\circlearrowleft+ \quad \frac{0.025}{g}(1500\cos 30°)(4) = \left[\frac{20}{g}\omega_2 + \frac{15}{g}(2\omega_2)(2)\right] + \left[\frac{0.025}{g}(4\omega_2)(4)\right]$$

Al despejar a ω_2 se tiene

$$\omega_2 = 1.616 \text{ rad/s}$$ *Respuesta*

Parte 2

Como ya se mencionó, $\hat{A}_x$ y $\hat{A}_y$ son las únicas fuerzas externas que actúan sobre el sistema durante el impacto, debido a que $\hat{B}_x$ y $\hat{B}_y$ son fuerzas internas. Al referirse a la figura (b), la componente x de la ecuación de impulso-cantidad de movimiento lineal para el sistema es

$$(L_x)_{1-2} = (p_x)_2 - (p_x)_1$$

$$\xrightarrow{+} \quad -\int \hat{A}_x\,dt = \left[\frac{15}{g}(2\omega_2) + \frac{0.025}{g}(4\omega_2)\right] - \left[\frac{0.025}{g}(1500\cos 30°)\right]$$

Al sustituir $\omega_2 = 1.616$ rad/s de la solución de la parte 1 resulta

$$\int \hat{A}_x\,dt = -0.502 \text{ lb} \cdot \text{s} \qquad \text{(a)}$$

Por supuesto, el signo "menos" significa que la dirección del impulso de $\hat{A}_x$ es opuesta a la de $\hat{A}_x$ que se ha supuesto en el DCL.

La componente y de la ecuación de impulso-cantidad de movimiento lineal para el sistema es

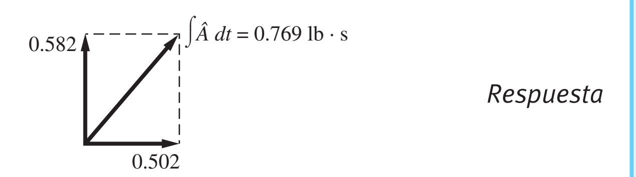
$$(L_y)_{1-2} = (p_y)_2 - (p_y)_1$$

$$+\!\uparrow \quad \int \hat{A}_y\,dt = 0 - \left[-\frac{0.025}{g}(1500 \text{ sen } 30°)\right]$$

o

$$\int \hat{A}_y \, dt = 0.582 \text{ lb} \cdot \text{s} \qquad \text{(b)}$$

De los resultados que se han dado en las ecuaciones (a) y (b), el impulso resultante que actúa sobre la barra en A durante el impacto es



Respuesta

Parte 3

La energía cinética del sistema antes del impacto es

$$T_1 = \frac{1}{2} m_C v_1^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{0.025}{32.2}\right)(1500)^2 = 873.45 \text{ lb} \cdot \text{pie}$$

Después del impacto, la energía cinética es

$$T_2 = \frac{1}{2} m_C v_2^2 + \left[\frac{1}{2}\bar{I}\omega_2^2 + \frac{1}{2} m \bar{v}_2^2\right]_{AB}$$

lo que, al sustituir los valores numéricos, queda

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{2}\left(\frac{0.025}{32.2}\right)(4 \times 1.616)^2 \\ &+ \left[\frac{1}{2}\left(\frac{20}{32.2}\right)(1.616)^2 \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2}\left(\frac{15}{32.2}\right)(2 \times 1.616)^2\right] \\ &= 3.26 \text{ lb} \cdot \text{pie} \end{aligned}$$

Por tanto, el porcentaje de pérdida de energía durante el impacto es

$$\frac{T_1 - T_2}{T_1} \times 100\% = \frac{873.45 - 3.26}{873.45} \times 100\% = 99.6\%$$

Respuesta

Método alterno para calcular $\int \hat{A}_x \, dt$

El impulso de la reacción $\hat{A}_x$ también puede calcularse de una ecuación de impulso-cantidad de movimiento angular. Al referirse a la figura (b) y considerar el sistema completo o sólo la barra AB, se tiene

$$(A_B)_{1-2} = (h_B)_2 - (h_B)_1$$

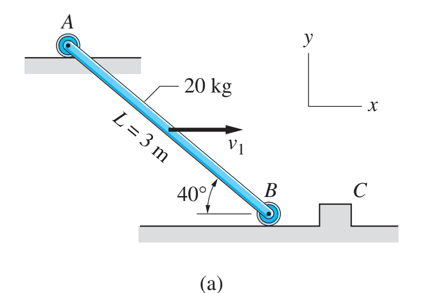
$$\circlearrowleft + \quad 4\int \hat{A}_x \, dt = \left[\frac{20}{g}\omega_2 - \frac{15}{g}(2\omega_2)(2)\right] - 0$$

que da

$$\int \hat{A}_x\,dt = -\frac{10}{g}\omega_2 = -\frac{10}{32.2}(1.616) = -0.502 \text{ lb}\cdot\text{s} \qquad \textit{Respuesta}$$

Esto concuerda con el resultado que se dio en la ecuación (a). Observe que es legítimo usar B como el punto de referencia, no obstante que no es un punto fijo ni el centro de masa. Como se mencionó en el apartado 18.7, no hay restricciones acerca de la ubicación del punto de referencia para el movimiento impulsivo (en efecto, todos los puntos son "fijos" durante el periodo infinitesimal de impacto).

Problema de ejemplo 18.13

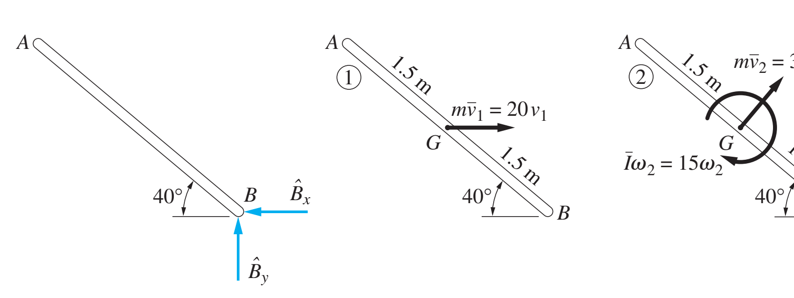


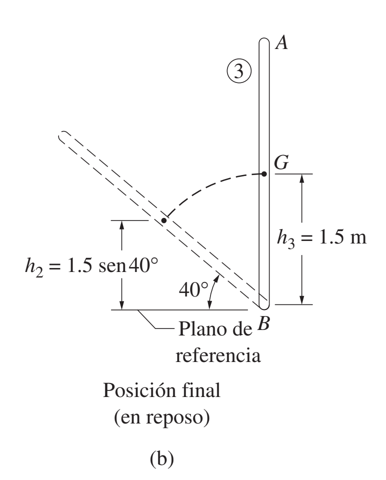
(a)

En la figura (a), la barra delgada uniforme de 20 kg se mueve hacia la derecha sobre rodillos sin fricción en A y B con la velocidad v_1 cuando el rodillo en B golpea la pequeña obstrucción C sin rebotar. Calcule el valor mínimo de v_1 para el cual la barra llegará a la posición vertical después del impacto.

Solución

La figura (b) muestra el DCL de la barra durante el impacto y los diagramas de cantidad de movimiento de la barra antes e inmediatamente después del impacto, marcados con 1 y 2, respectivamente.





(b)

También muestra la posición vertical final 3, que es de reposo. Se despreciará el tiempo de impacto, esto significa la suposición de que el movimiento es impulsivo. Por tanto, la barra ocupa la misma posición espacial durante el impacto.

Es preciso utilizar el método de impulso-cantidad de movimiento para analizar el impacto que ocurre entre las posiciones 1 y 2. Para estudiar el movimiento que se da entre las posiciones 2 y 3 se usa el principio de conservación de la energía mecánica.

En la figura (b) el DCL muestra las reacciones $\hat{B}_x$ y $\hat{B}_y$, que son las únicas fuerzas impulsivas que actúan sobre la barra durante el impacto. El peso de la barra se omite en el DCL, ya que es una fuerza finita cuyo impulso puede despreciarse debido a la duración muy pequeña del impacto. La reacción del rodillo en A no aparece en el DCL por la misma razón (la reacción no es impulsiva porque el rodillo está próximo a levantarse del plano durante el impacto).

Como se indica en la figura (b), el diagrama de la cantidad de movimiento para la posición 1 sólo consiste en el vector de la cantidad de movimiento lineal, cuya magnitud es $mv_1 = 20\ v_1$ N · s, donde v_1 se mide en m/s. El diagrama de la cantidad de movimiento para la posición 2 representa las cantidades de movimiento lineal y angular. Se tiene $\bar{I} = mL^2/12 = 20(3)^2/12 = 15$ N · m^2, de manera que la cantidad de movimiento angular es $\bar{I}\omega_2 = 15\omega_2$ N · m · s, donde ω_2 se mide en rad/s. Como la barra rota respecto al extremo B después del impacto, $\bar{v}_2 = 1.5\omega_2$ m/s; en consecuencia, la magnitud del vector de la cantidad de movimiento lineal es $m\bar{v}_2 = 20(1.5)\omega_2 = 30\ \omega_2$ N · s.

En la figura (b), del DCL se observa que el impulso angular respecto de B es cero, porque $\hat{B}_x$ y $\hat{B}_y$ pasan por B. Ya que el impulso angular es igual al cambio en la cantidad de movimiento angular respecto a cada punto durante el periodo de impacto, se concluye que la cantidad de movimiento angular respecto a B se conserva entre las posiciones 1 y 2. Al referirse a los diagramas de la cantidad de movimiento de la figura (b), se tiene

$$(h_B)_1 = (h_B)_2$$

$$\circlearrowright + \quad 20v_1(1.5\,\text{sen}\,40°) = 15\omega_2 + 30\omega_2(1.5)$$

que da la siguiente relación entre v_1 y ω_2:

$$v_1 = 3.111\omega_2 \tag{a}$$

Debido a que todas las fuerzas que actúan sobre la barra después del impacto son conservativas, el valor de ω_2 puede calcularse al aplicar el principio de conservación de la energía mecánica entre las posiciones 2 y 3 (recuerde que la barra está en reposo en la posición vertical).

Como se muestra en la figura (b), se elige el plano horizontal que pasa por B como el plano de referencia de la energía potencial gravitacional. Por tanto, las energías potenciales en las posiciones 2 y 3 son

$$V_2 = Wh_2 = 20(9.81)(1.5\,\text{sen}\,40°) = 189.2\ \text{J} \tag{b}$$

$$V_3 = Wh_3 = 20(9.81)(1.5) = 294.3\ \text{J} \tag{c}$$

Las energías cinéticas para las dos posiciones son

$$T_2 = \frac{1}{2}\bar{I}\omega_2^2 + \frac{1}{2}m\bar{v}_2^2$$
$$= \frac{1}{2}(15)\omega_2^2 + \frac{1}{2}(20)(1.5\omega_2)^2$$
$$= 30.0\omega_2^2 \text{ J} \qquad \text{(d)}$$

y

$$T_3 = 0 \qquad \text{(e)}$$

Al utilizar las ecuaciones de la (b) a la (e), la conservación de la energía mecánica resulta

$$V_2 + T_2 = V_3 + T_3$$
$$189.2 + 30.0\omega_2^2 = 294.3 + 0$$

de donde

$$\omega_2 = 1.872 \text{ rad/s}$$

Al sustituir este valor en la ecuación (a) se encuentra que la menor velocidad inicial para la cual la barra alcanza la posición vertical es

$$v_1 = 3.111\omega_2 = 3.111(1.872) = 5.82 \text{ m/s} \qquad \textit{Respuesta}$$

Problemas

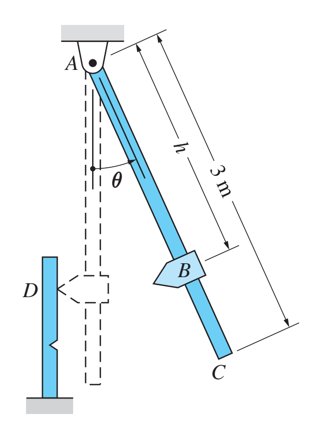


Fig. P18.83

18.83 Un probador de impactos consta de un percusor B de 20 kg que está unido a la varilla delgada AC uniforme de 16 kg. El probador se suelta de una posición inclinada y rompe el espécimen de prueba D. Encuentre la distancia h para la que la reacción del perno en A no tenga componente horizontal durante el impacto con el espécimen.

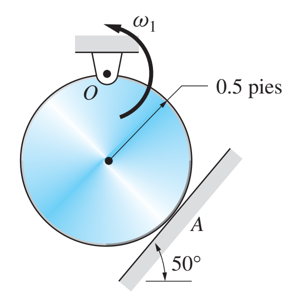


Fig. P18.84

18.84 Un disco uniforme de 30 lb rota en el plano vertical respecto de O. Inmediatamente antes de golpear la superficie inclinada en A, su velocidad angular es ω_1 = 4 rad/s en sentido positivo. Justo después del impacto, la velocidad angular del disco es ω_2 = 2 rad/s en sentido negativo. Determine la magnitud del impulso que actuó durante el impacto sobre (a) la superficie en A y (b) el perno en O. Desprecie la fricción.

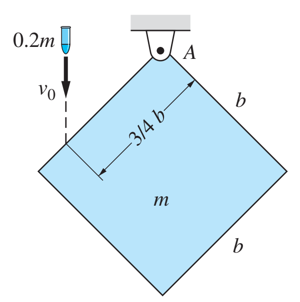


Fig. P18.85

18.85 Una placa cuadrada homogénea de masa m está sostenida de un perno en A. La placa está en reposo cuando es golpeada por el pequeño proyectil de masa $0.2m$ que viaja en sentido vertical con velocidad v_0. Si se supone que el proyectil queda incrustado en la placa, determine la velocidad angular de la placa inmediatamente después del impacto.

18.86 La varilla uniforme AB de 26 lb se encuentra estacionaria cuando es golpeada por la bala D de 0.14 lb que viaja horizontalmente a 1800 pies/s. Si se supone que la bala queda incrustada en la varilla, calcule: (a) la velocidad angular de AB inmediatamente después del impacto y (b) el máximo desplazamiento angular de AB siguiente al impacto.

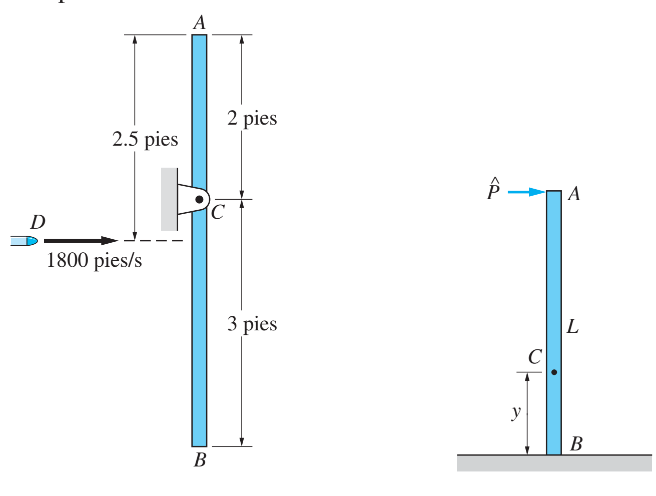


Fig. P18.86 **Fig. P18.87**

18.87 Una varilla uniforme AB de masa m y longitud L está en equilibrio sobre la superficie horizontal lisa cuando recibe un golpe horizontal en A. Determine la coordenada y del punto C que tiene velocidad cero inmediatamente después del impacto.

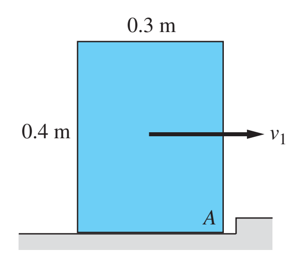


Fig. P18.88

18.88 La caja homogénea de masa m se desliza sobre la superficie horizontal con la rapidez v_1 cuando su vértice A golpea una pequeña obstrucción. Si se supone que la caja no rebota, determine: (a) la velocidad angular de la caja, inmediatamente después del impacto, en términos de v_1, y (b) el mayor valor de v_1 de manera que la caja no se vuelque después del impacto.

18.89 Una barra delgada uniforme de masa m se traslada hacia la izquierda con la rapidez $v_1 = 5$ m/s cuando el pequeño rodillo en A golpea el extremo de la ranura. Si se supone que no hay rebote, encuentre la velocidad angular de la barra (a) inmediatamente después del impacto y (b) cuando B está directamente sobre A.

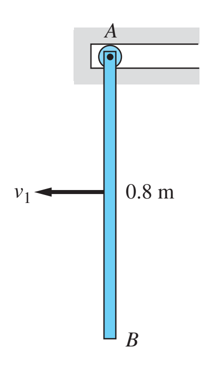


Fig. P18.89

18.90 El cilindro uniforme de masa m rueda sin deslizarse sobre la superficie horizontal cuando golpea el plano inclinado. Si la velocidad angular del cilindro antes del impacto es de 4 rad/s, ¿cuál es su velocidad angular inmediatamente después del impacto? Suponga que el cilindro no rebota ni se desliza sobre el plano inclinado.

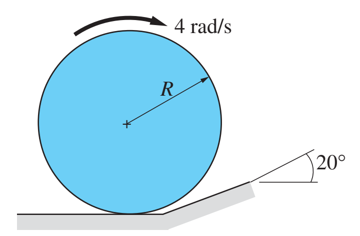


Fig. P18.90

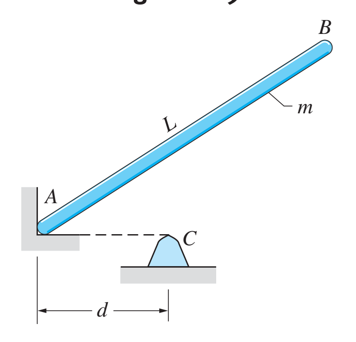


Fig. P18.91

18.91 La varilla uniforme AB de masa m y longitud L se suelta a partir del reposo con el extremo A posicionado en un vértice. La varilla golpea la obstrucción en C con velocidad angular ω_1 en sentido negativo y no hay rebote. Determine la mayor distancia d de modo que la velocidad angular de la varilla siga en sentido negativo después del impacto. Desprecie la fricción.

18.92 Una varilla homogénea AB de masa $3m$ es libre de rotar respecto al perno en C. La varilla se encuentra estacionaria cuando la pelota D de masa m golpea el extremo A de la varilla con velocidad vertical v_1. Si se sabe que la velocidad de D, inmediatamente después del impacto, es cero, determine: (a) la velocidad de A inmediatamente después del impacto y (b) el porcentaje de energía cinética perdida durante el impacto.

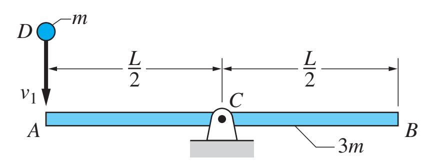


Fig. P18.92

18.93 La varilla uniforme AB de 9 lb rota libremente respecto al perno en A. Se suelta a partir del reposo en la posición que se muestra y choca con la obstrucción en C. Calcule los impulsos resultantes que actúan sobre la varilla en A y C, suponiendo que: (a) la varilla no rebota y (b) no se pierde energía durante el impacto.

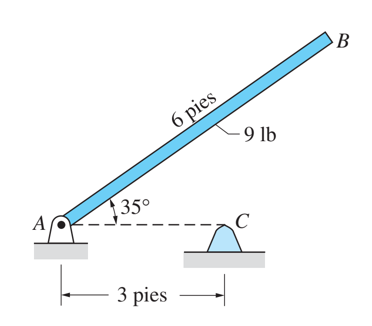


Fig. P18.93

18.94 Un disco uniforme de 2.5 lb rueda sin deslizarse con velocidad angular ω_1 antes de chocar con un tope de 1 pulg. Suponiendo que no hay rebote ni deslizamiento entre el disco y el tope, encuentre el valor mínimo de ω_1 de manera que el disco se suba al tope.

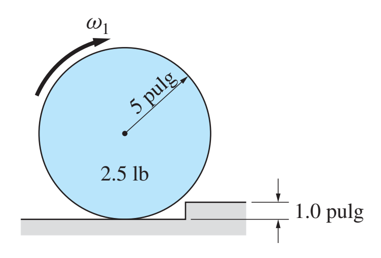


Fig. P18.94

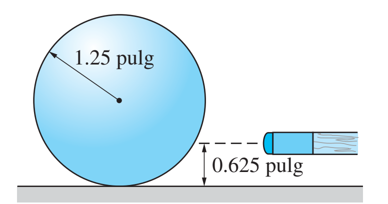


Fig. P18.95

18.95 La bola de billar de masa m está en reposo sobre una mesa cuando el taco la golpea en sentido horizontal. Inmediatamente después del impacto, la velocidad central de la bola es $v = 2.8$ pies/s. Obtenga su velocidad angular: (a) inmediatamente después del impacto y (b) después de que deja de deslizarse sobre la mesa.

18.96 El objetivo de un polígono de tiro consiste en dos discos delgados idénticos, cada uno de masa 2.5 kg, que están conectados por una varilla de masa despreciable. El mecanismo es libre de rotar respecto al eje z. El blanco está en reposo cuando una bala de 9.7 g entra al centro de uno de los discos con velocidad $v_1 = 850$ m/s y sale con velocidad v_2. Si la velocidad angular resultante del blanco es 2.61 rad/s, determine v_2.

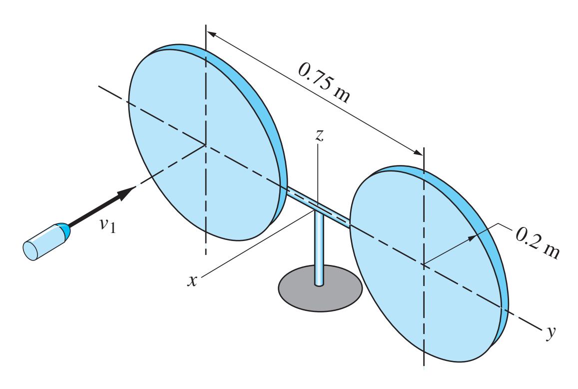


Fig. P18.96

Fig. P18.97

18.97 El péndulo, que consiste en una varilla delgada AB de 2 lb y una esfera C de 5 lb, golpea la esfera estacionaria D de peso W con velocidad angular ω_1. Todos los cuerpos son homogéneos. Si el péndulo se detiene por completo después del impacto, obtenga W. Desprecie la fricción y suponga que no se pierde energía durante el impacto.

18.98 Una barra uniforme AB de 80 lb al inicio está en reposo en la posición horizontal, sostenida por el perno en B y el resorte cuya rigidez es $k = 25$ lb/pulg en A. La pequeña bolsa de arena C de 40 lb (relativa a la longitud de la barra) se suelta sobre la barra con la velocidad inicial que se muestra. Si se supone que la bolsa de arena no rebota, calcule: (a) la velocidad angular de AB inmediatamente después del impacto y (b) el máximo desplazamiento angular de AB siguiente al impacto, suponiendo que es un ángulo pequeño.

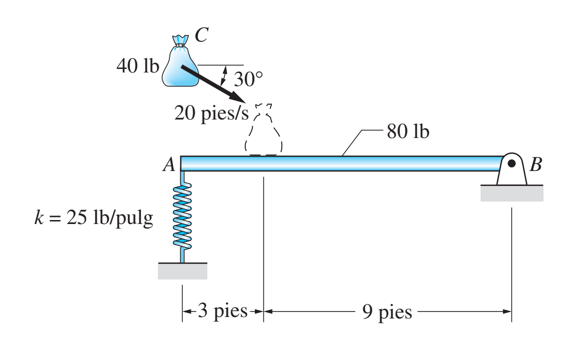


Fig. P18.98

Repaso de ecuaciones

Trabajo de un par (movimiento en un plano)

El trabajo del par C es

$$U_{1-2} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} C\,d\theta$$

$$U_{1-2} = C(\theta_2 - \theta_1) \qquad (C \text{ constante})$$

Potencia de un par (movimiento en un plano)

La potencia de un par C que actúa sobre un cuerpo rígido que rota con velocidad angular ω es

$$P = C\omega$$

Energía cinética de un cuerpo rígido en movimiento en un plano

$$T = \frac{1}{2}m\bar{v}^2 + \frac{1}{2}\bar{I}\omega^2$$

$$T = \frac{1}{2}I_A\omega^2 \qquad (A \text{ es el centro instantáneo para velocidades})$$

Principio de trabajo y energía cinética

$$(U_{1-2})_{\text{ext}} = T_2 - T_1 \qquad (\text{un solo cuerpo})$$

$$(U_{1-2})_{\text{ext}} + (U_{1-2})_{\text{int}} = T_2 - T_1 \qquad (\text{cuerpos conectados})$$

Conservación de la energía mecánica

$$V_1 + T_1 = V_2 + T_2$$

Ecuaciones de impulso-cantidad de movimiento

$$\mathbf{L}_{1-2} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$$

$$(\mathbf{A}_A)_{1-2} = (\mathbf{h}_A)_2 - (\mathbf{h}_A)_1 \qquad (A \text{ es un punto fijo o centro de masa})$$

$\mathbf{L}$ = impulso lineal de fuerzas externas
$\mathbf{p} = m\bar{\mathbf{v}}$ = cantidad de movimiento lineal del cuerpo
$\mathbf{A}_A$ = impulso angular de fuerzas externas respecto de A

Problemas de repaso

18.99 El disco uniforme de masa m y radio R está unido a un resorte de rigidez k. Si el disco se suelta a partir del reposo con el resorte sin deformar, determine la expresión para la máxima velocidad angular del disco. Suponga que el disco rueda sin deslizarse sobre la superficie inclinada.

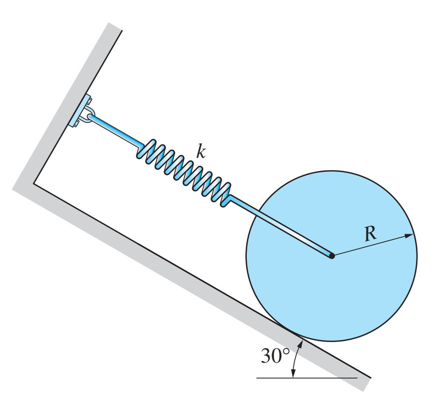


Fig. P18.99

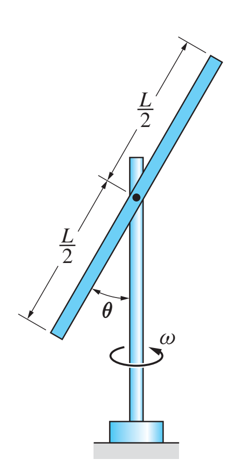


Fig. P18.100

18.100 Una barra uniforme de masa m y longitud L está unida a un eje vertical de masa despreciable. El ángulo θ entre la barra y el eje puede cambiarse mediante un mecanismo interno (que no se muestra). Si el conjunto rota libremente con velocidad angular ω cuando $\theta = 90°$, encuentre la velocidad angular del mecanismo cuando θ se cambia a 45°.

18.101 Una barra uniforme AB de 20 lb está suspendida de un rodillo en B, que viaja sobre un riel horizontal. La barra está en reposo en la posición vertical cuando es golpeada en el extremo A por la bala de 0.05 lb que se mueve horizontalmente a 3000 pies/s. Si se supone que la bala queda incrustada en la barra, determine: (a) la velocidad angular de ésta inmediatamente después del impacto y (b) su máximo desplazamiento angular después del impacto. Desprecie la masa del rodillo.

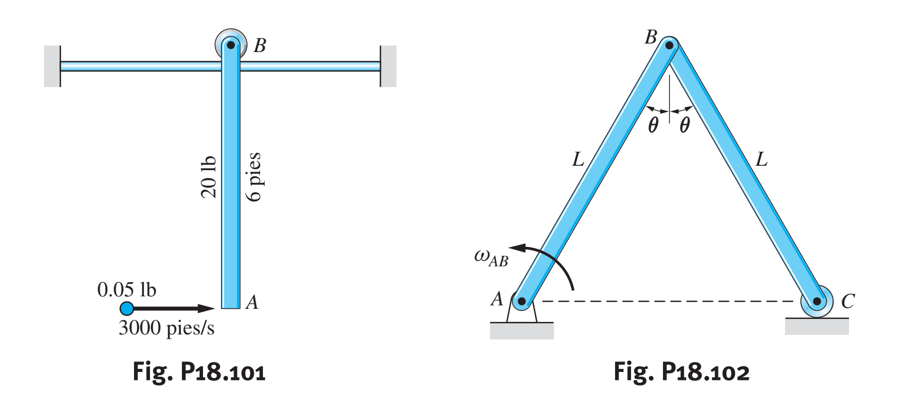


Fig. P18.101 **Fig. P18.102**

18.102 El mecanismo consta de dos barras uniformes de 30 kg, cada una de longitud $L = 2$ m. En la posición $\theta = 30°$ la velocidad angular de la barra AB es

$\omega_{AB} = 1.2$ rad/s. Determine la energía cinética del mecanismo en esta posición. Desprecie la masa del rodillo en *C*.

18.103 El mecanismo se libera a partir del reposo en la posición que se muestra. Determine la velocidad del deslizador *C* cuando la barra *BC* queda horizontal. Desprecie la fricción.

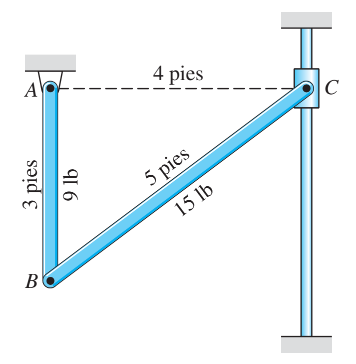


Fig. P18.103

18.104 Una barra uniforme *AB* de 15 kg está en la posición que se indica y se mueve con velocidad $\bar{v} = 16$ m/s y velocidad angular $\omega = 120$ rad/s cuando el extremo *A* golpea una obstrucción rígida. Determine la velocidad del extremo *B* justo después del impacto, suponiendo que la barra no rebota.

18.105 El radio de giro central del carrete es $\bar{k}$, y su radio interno es *R*. Si el carrete se suelta del reposo, encuentre su velocidad como una función de su desplazamiento *x*. Desprecie la fricción entre el carrete y la pared vertical.

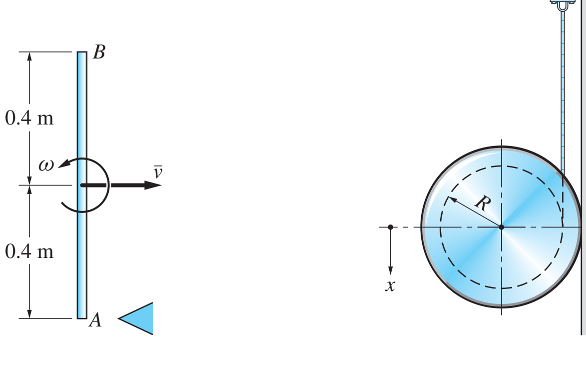
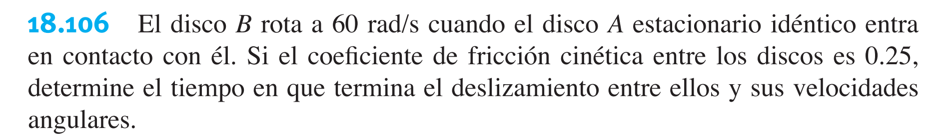


Fig. P18.104

Fig. P18.105



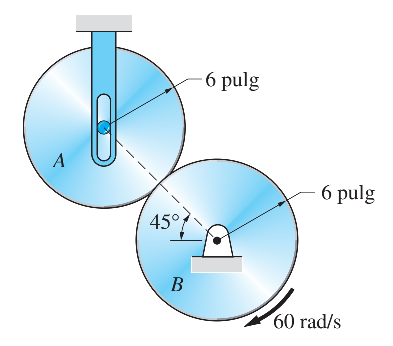


Fig. P18.106

18.106 El disco *B* rota a 60 rad/s cuando el disco *A* estacionario idéntico entra en contacto con él. Si el coeficiente de fricción cinética entre los discos es 0.25, determine el tiempo en que termina el deslizamiento entre ellos y sus velocidades angulares.

18.107 El disco uniforme de 20 lb se lanza sobre la superficie horizontal con velocidad de 15 pies/s y un giro de retroceso de 45 rad/s. El coeficiente de fricción cinética entre el disco y la superficie es 0.45. Determine: (a) la rapidez final del disco y (b) el tiempo requerido para lograr la rapidez final.

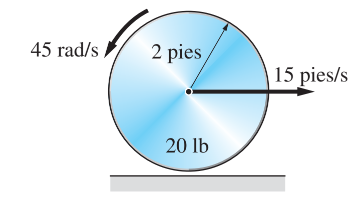


Fig. P18.107

18.108 La barra uniforme *AB* de peso *W* está conectada por un cable al bloque *C*, también de peso *W*. Si el sistema se libera a partir del reposo en la posición que se muestra, determine la velocidad de *C* cuando *AB* ha rotado 90º.

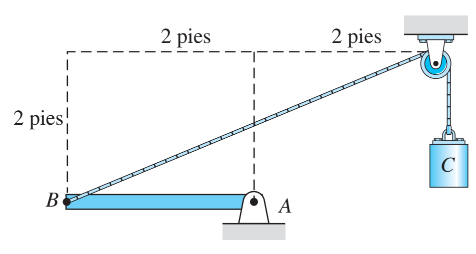


Fig. P18.108

18.109 La tabla homogénea de 15 kg sostenida por cables en A y B está en reposo cuando el costal de arena de 5 kg cae sobre ella, sin rebotar. Si la velocidad de impacto del costal es 6 m/s, determine la velocidad angular de la tabla inmediatamente después del impacto.

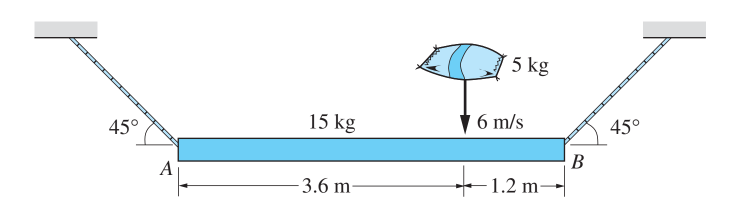


Fig. P18.109

18.110 El mecanismo que consta de dos varillas uniformes se mueve en el plano horizontal. El resorte conectado entre el deslizador A y el perno C tiene una rigidez de 200 N/m y su longitud libre es de 150 mm. Si el mecanismo se libera a partir del reposo en la posición que se indica, obtenga la rapidez angular de la varilla BC cuando A esté lo más cerca de C. Desprecie la fricción y la masa del deslizador.

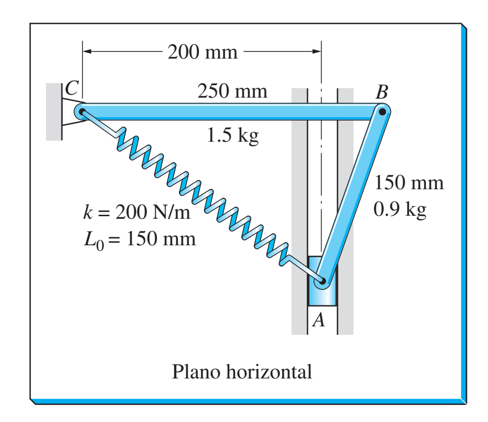


Fig. P18.110

18.111 El disco homogéneo, ranurado, de masa m rota libremente respecto al eje vertical con velocidad angular ω_0. Una canica pequeña de masa $0.05m$ se coloca cerca del centro del disco. Debido a la fuerza centrífuga, la canica se mueve hacia afuera sobre la ranura. Determine la velocidad angular del disco después de que la canica ha salido de la ranura. Desprecie el efecto de la ranura en el momento de inercia del disco.

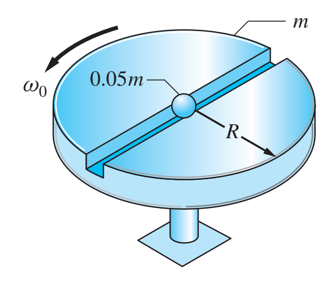


Fig. P18.111

18.112 La masa B de 10 kg está unida a un cable que pasa por una pequeña polea C y está enrollado en la periferia del disco desbalanceado A de 40 kg. El momento de inercia del disco respecto a su centro de masa G es 12 kg · m^2. Cuando el disco está en la posición que se muestra, su velocidad angular es $\omega_1 = 2.5$ rad/s en sentido ne-

gativo. Suponiendo que el disco rueda sin deslizarse, encuentre su velocidad angular después de que ha rotado 180º.

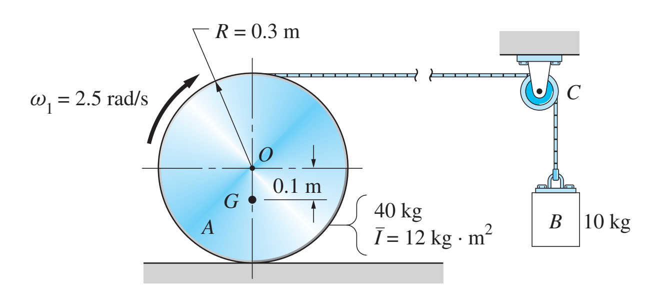


Fig. P18.112

18.113 Dos discos rotan libremente sobre el eje horizontal. La rigidez de torsión del resorte que los conecta es $k = 20$ lb · pie/rad. Al principio, el disco *A* se mantiene estacionario mientras que el *B* ha rotado dos revoluciones. Entonces ambos se liberan de manera simultánea. Determine la velocidad angular de cada uno en el instante en que el resorte retorna a su estado no deformado. Los momentos de inercia de los discos respecto al eje son $\bar{I}_A = 2.4$ slug · pie^2 e $\bar{I}_B = 7.2$ slug · pie^2.

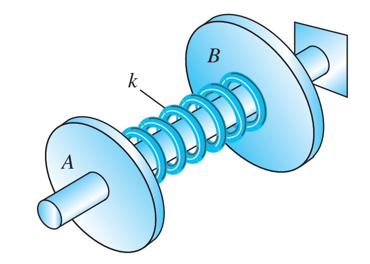


Fig. P18.113

18.114 Una barra uniforme de 40 lb está sostenida del perno en *O*. La barra está en reposo cuando la bala *B* de 6 oz se dispara al extremo *A* con velocidad de 2000 pies/s. La bala pasa a través de la barra, saliendo con una velocidad de 1500 pies/s. Encuentre el máximo desplazamiento angular de la barra.

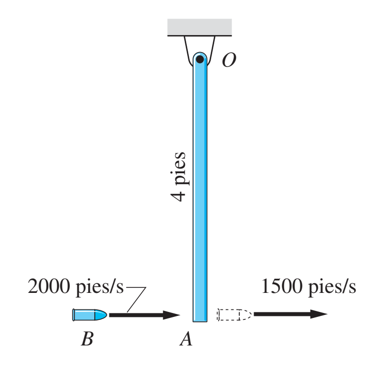


Fig. P18.114

18.115 Las barras uniformes *A* y *B* son libres para rotar respecto a los pernos en sus puntos medios. Al inicio, la velocidad angular de la barra *A* es 5 rad/s en sentido negativo y la barra *B* está en reposo. Determine la velocidad angular de cada barra inmediatamente después de que el extremo de la barra *A* golpea el extremo de *B*. Suponga que el impacto es plástico.

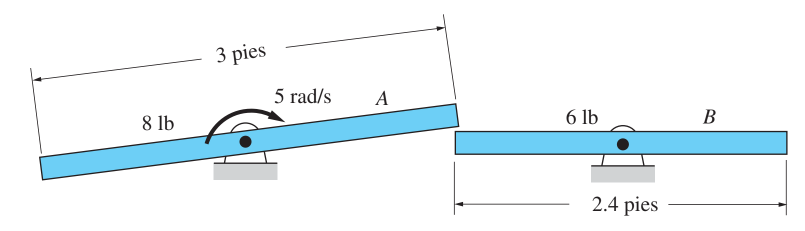


Fig. P18.115

18.116 La esfera homogénea de 12 kg está en reposo en el vértice cuando el par constante $C = 5$ N · m se aplica en $t = 0$. El coeficiente de fricción cinética entre la esfera y cada una de las superficies de contacto es 0.4. Calcule la velocidad angular de la esfera cuando $t = 3$ s.

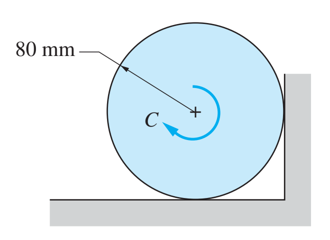


Fig. P18.116

18.117 Conforme el cilindro homogéneo de masa m entra a la superficie cilíndrica la velocidad de su centro es 1.5 m/s. Determine el ángulo θ en el cual el cilindro hace una parada momentánea. Suponga que el cilindro rueda sin deslizarse.

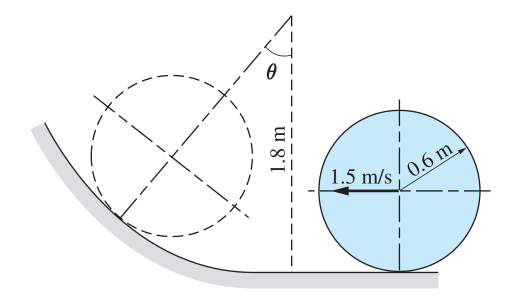


Fig. P18.117

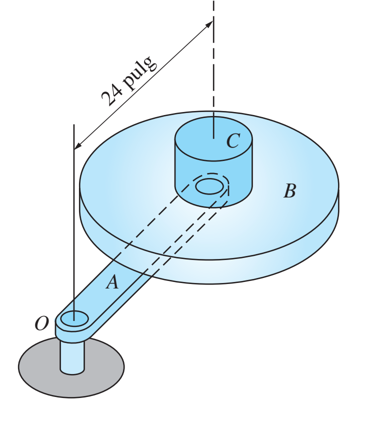
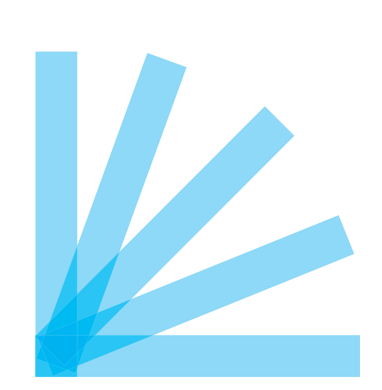


Fig. P18.118

18.118 El brazo A, que es libre para rotar respecto al eje vertical en O, sostiene un disco y un motor eléctrico. El disco y la armadura del motor, etiquetada con B en la figura, tienen un peso combinado de 20 lb y un radio de giro central de $\bar{k}_B = 10$ pulg. La carcasa C del motor, que está unida al brazo A, pesa 12 lb y su radio de giro central es $\bar{k}_C = 3$ pulg. El peso del brazo A puede despreciarse. El sistema está en reposo cuando se enciende el motor, lo que ocasiona que B gire a 25 rad/s respecto al brazo A. Obtenga la rapidez angular resultante del brazo A.

19

Dinámica de un cuerpo rígido en tres dimensiones





El giroscopio se utiliza de manera amplia en los instrumentos de navegación porque la dirección de su eje permanece fija. Sin embargo, si una fuerza se aplica a uno de los balancines, el giroscopio rotará respecto al eje que es paralelo a la fuerza. Este movimiento, que se denomina precesión*, se analiza en los problemas 19.80 y 19.81. (© iStockphoto.com Melissa Rodgers)*

*19.1 Introducción

La cinemática del movimiento en un plano se basa en la suposición de que todos los puntos del cuerpo se mueven en planos que son paralelos entre sí. En consecuencia, el estudio de la cinemática se redujo a un problema bidimensional, en el que sólo se tiene que considerar el plano del movimiento (en general el plano que contiene al centro de masa). En cinética se introdujo una restricción adicional sobre el movimiento en un plano: el cuerpo tenía que ser simétrico respecto al plano del movimiento.

Si las condiciones del movimiento en un plano no son aplicables surgen dos complicaciones. Primero, la cinemática se vuelve muy complicada debido a la na-

turaleza tridimensional del problema. Esto obliga a dejar la aritmética escalar y a utilizar por completo el poder del análisis vectorial.

La segunda complicación está asociada con la cinética. En el movimiento en un plano, la cinética sólo implica dos propiedades inerciales del cuerpo: la masa m y el momento de inercia central $\bar{I}$. En los problemas tridimensionales, la descripción del momento de inercia central requiere *seis* componentes (los momentos de inercia respecto a tres ejes más tres productos de inercia).*

Un estudio completo del movimiento tridimensional de los cuerpos rígidos corresponde a los libros avanzados. En este capítulo sólo se presenta una introducción que es suficiente para el análisis de varios problemas prácticos, como la maquinaria desbalanceada en rotación, el vuelo de los cuerpos giratorios y los efectos giroscópicos. Este capítulo inicia con la cinemática del movimiento tridimensional. Los apartados posteriores amplían los métodos que ya se han expuesto del análisis cinético (métodos de trabajo-energía, de impulso-cantidad de movimiento y de fuerza-masa-aceleración) a la dinámica espacial. El capítulo concluye con el análisis de un caso especial importante, el movimiento de un cuerpo con simetría axial.

*19.2 Cinemática

a. Movimiento relativo de dos puntos en un cuerpo rígido

La figura 19.1 muestra un cuerpo rígido sometido a un movimiento tridimensional. Los puntos A y B están inmersos en el cuerpo y $\boldsymbol{\omega}$ es la velocidad angular del cuerpo en el instante que se muestra. Ahora se investigará la velocidad del punto B relativa a A, que se denota con $\mathbf{v}_{B/A}$. Como en el caso del movimiento en un plano, esta velocidad relativa se debe sólo a la rotación del cuerpo. Para un observador que no gira, unido a A, el punto B

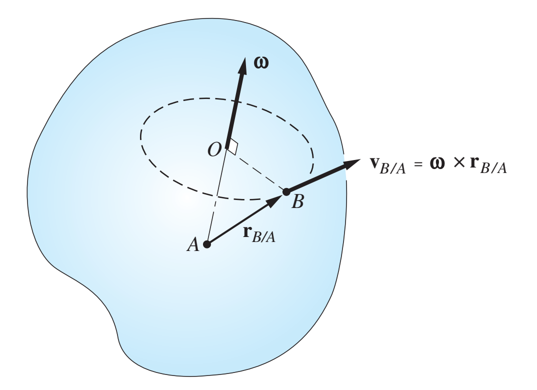


Fig. 19.1

*Esta complicación surge aun en los problemas que desde el punto de vista de la cinemática son bidimensionales si el cuerpo no es simétrico respecto al plano de movimiento.

parece viajar sobre una trayectoria circular centrada en O. Ésta es la misma situación que hay en el movimiento en un plano, que condujo al resultado

$$\mathbf{v}_{B/A} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A} \tag{19.1a}$$

donde $\mathbf{r}_{B/A}$ es el vector de posición de B relativo a A. En el apéndice D se presenta una deducción rigurosa de esta ecuación.

La aceleración de B relativa a A se obtiene al derivar la ecuación (19.1a) respecto al tiempo: $\mathbf{a}_{B/A} = \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}_{B/A} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_{B/A}$. Al sustituir $\dot{\mathbf{r}}_{B/A} = \mathbf{v}_{B/A} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$ e introducir la notación $\dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\alpha}$, donde $\boldsymbol{\alpha}$ es la aceleración angular del cuerpo, se obtiene

$$\mathbf{a}_{B/A} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}) + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A} \tag{19.1b}$$

En la figura 19.2 se muestran las dos componentes de la aceleración relativa. Observe que la primera es perpendicular a $\boldsymbol{\omega}$ y está dirigida hacia O, como se ilustra en la figura 19.2(a). La segunda, que se muestra en la figura 19.2(b), es perpendicular a $\boldsymbol{\alpha}$ y $\mathbf{r}_{B/A}$.

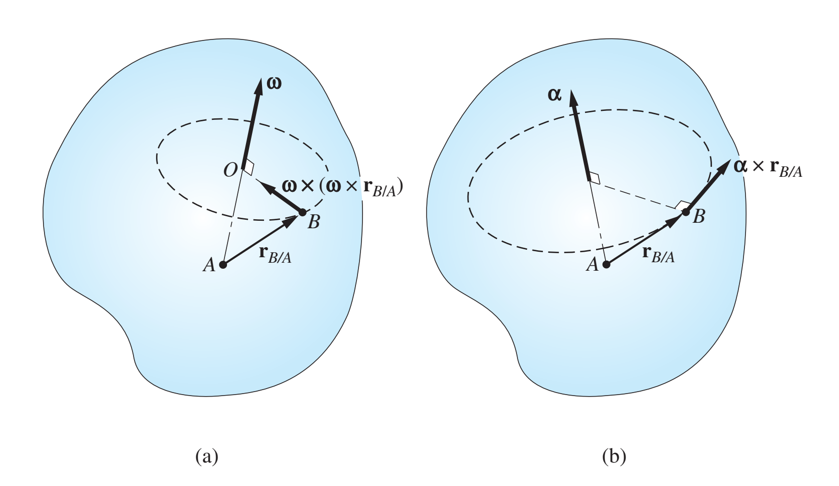


Fig. 19.2

No obstante que las ecuaciones (19.1) tienen la misma forma que sus contrapartes para el movimiento en un plano, existe una diferencia significativa en su contenido. En el movimiento en un plano, la dirección de $\boldsymbol{\omega}$ no cambia. Por tanto, $\boldsymbol{\alpha}$ tiene la misma dirección que $\boldsymbol{\omega}$ y su magnitud sólo se debe al cambio en la magnitud de $\boldsymbol{\omega}$; es decir, $\alpha = \dot{\omega}$. En el movimiento tridimensional, la dirección de $\boldsymbol{\omega}$ cambia continuamente, así $\boldsymbol{\alpha}$ refleja las variaciones en la magnitud y dirección de $\boldsymbol{\omega}$. En consecuencia, las direcciones de $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{\alpha}$ en general son diferentes, y $\alpha = \dot{\omega}$ ya no es válida. Por esta razón, en la figura 19.2 las dos componentes de $\mathbf{a}_{B/A}$ no son perpendiculares entre sí; entonces no pueden llamarse componentes “normal” y “tangencial” de la aceleración.

La velocidad y la aceleración absolutas de B pueden obtenerse a partir de la definición de movimiento relativo:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A} \tag{19.2a}$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A} = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}) + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A} \tag{19.2b}$$

b. Derivación de vectores en un marco de referencia en rotación

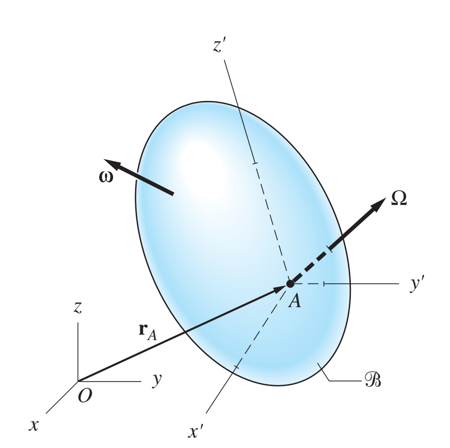


Fig. 19.3

Como se analizó en el apartado 16.8, algunas veces es conveniente describir los términos del movimiento relativo en las ecuaciones (19.1) dentro de un marco de referencia en rotación y traslación, en lugar de emplear un marco fijo en el espacio. La figura 19.3 muestra dos marcos de referencia: el sistema xyz, fijo en el espacio y el sistema $x'y'z'$, cuyo origen está en el punto A. Si los ejes $x'y'z'$ están inmersos en el cuerpo $\mathcal{B}$ (es decir, el origen de esos ejes se mueve con A y el sistema de coordenadas rota con el cuerpo), representan lo que se denomina *marco anclado al cuerpo*, mientras que los ejes xyz fijos constituyen el *marco espacial*. Observe que la velocidad angular del marco anclado es igual a la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ del cuerpo. Si las componentes de un vector $\mathbf{V}$ se describen respecto al marco anclado, entonces la derivada absoluta de $\mathbf{V}$ puede calcularse empleando la siguiente identidad deducida en el apartado 16.8.

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right)_{/\mathcal{B}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} \tag{19.3}$$

La notación "$/\mathcal{B}$" se utiliza para indicar que la derivada debe evaluarse respecto al marco anclado, es decir, como vista por un observador que se traslada y rota con el cuerpo $\mathcal{B}$.

Si el sistema de coordenadas $x'y'z'$ rota con la velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$, que no necesariamente es igual a la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ del cuerpo, entonces la ecuación (19.3) debe modificarse como sigue:

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right)_{/x'y'z'} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} \tag{19.4}$$

Al emplear la notación "$/x'y'z'$" se enfatiza que ahora la derivada relativa está referida a un sistema de coordenadas que no por fuerza está anclado al cuerpo.

c. Eje instantáneo de rotación

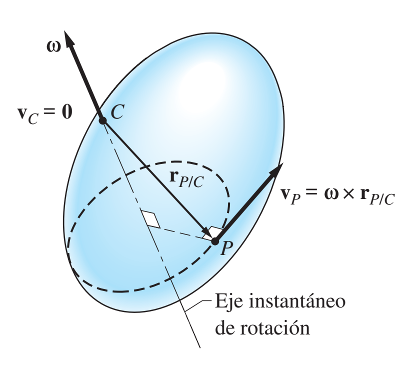


Fig. 19.4

Sea la velocidad de un punto C en un cuerpo rígido (o cuerpo extendido) cero en un instante particular (en el movimiento en un plano, este punto es el centro instantáneo para las velocidades). Como se muestra en la figura 19.4, la recta que pasa por C y es paralela a la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ del cuerpo es el *eje instantáneo de rotación* o simplemente el *eje instantáneo*.* Con $\mathbf{v}_C = \mathbf{0}$, la velocidad de cualquier punto P en el cuerpo es $\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{P/C} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{P/C}$, como se indica en la figura 19.4. De esto resulta que

*En el movimiento bidimensional, $\boldsymbol{\omega}$ es perpendicular al plano del movimiento. Por tanto, el eje instantáneo de rotación también es perpendicular a este plano y pasa por el centro instantáneo para las velocidades.

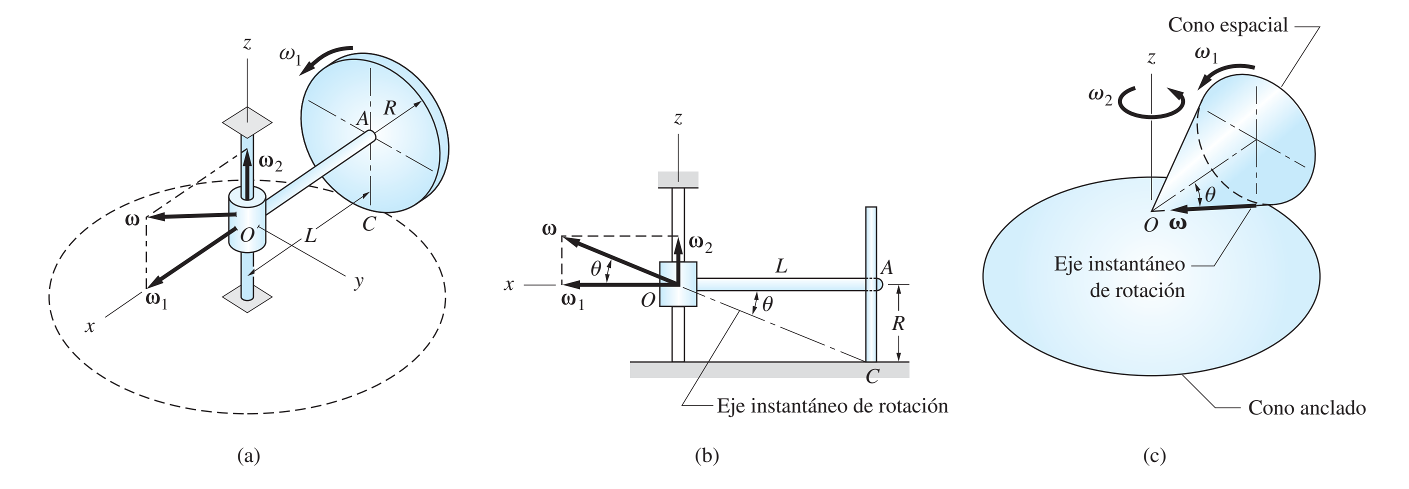


Fig. 19.5

las velocidades de todos los puntos se comportan como si el cuerpo rotara respecto al eje instantáneo, y las velocidades de los puntos sobre este eje son iguales a cero. En el movimiento en un plano siempre existe un punto que tiene velocidad cero y lo mismo ocurre para un cuerpo que rota respecto a un punto fijo. Sin embargo, es posible comprobar que tal punto no existe necesariamente para todos los movimientos.*

Cuando se analizan las velocidades es conveniente emplear el eje instantáneo de rotación si su localización puede determinarse por inspección. Por ejemplo, la figura 19.5(a) muestra una rueda de radio R que gira sin deslizarse en una trayectoria circular sobre un plano horizontal. El eje horizontal OA de longitud L está unido a un collarín que rota sobre el eje vertical fijo. Como se indica en la figura 19.5(a), la velocidad angular de la rueda está dada por $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2$, donde $\boldsymbol{\omega}_1$ es su *velocidad de giro* (su velocidad angular relativa al eje) y $\boldsymbol{\omega}_2$ es la velocidad angular del eje.

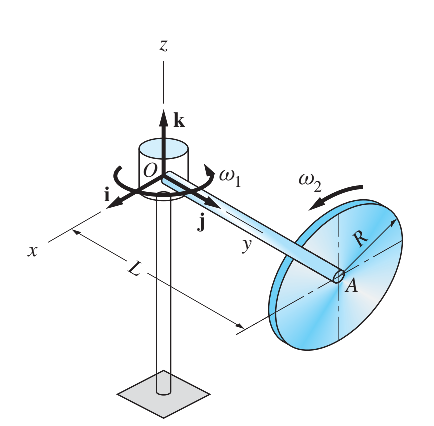
La figura 19.5(b) muestra otra vista del conjunto donde se ha identificado el eje instantáneo de la rueda. Se sabe que este eje pasa por los puntos C y O, porque ambos se encuentran sobre la rueda y tienen velocidad cero (la rueda debe ser "extendida" para incluir a O). Al referirse a la figura 19.5(b) se observa que el ángulo θ puede determinarse si se conocen L y R, lo que significa que es posible encontrar $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{\omega}_2$ si se conoce la velocidad de giro $\boldsymbol{\omega}_1$. (Un método alternativo para calcular las velocidades angulares es escribir la ecuación de la velocidad relativa empleando los puntos O y C, véase el problema de ejemplo 19.3).

Conforme la rueda se mueve, el eje instantáneo de rotación traza una superficie tridimensional en el espacio. Debido a que la rueda rota alrededor del punto fijo O, esta superficie es un cono, que se llama *cono espacial*, con su vértice en O. La traza de los ejes instantáneos en la rueda "extendida" también es una superficie cónica, que se denomina *cono anclado*. En la figura 19.5(c) se muestran ambos conos. Al analizar esta figura se observa que la cinemática de la rueda y del cono anclado son idénticas si la rueda se hace rodar sin deslizarse sobre este último con la velocidad de giro $\boldsymbol{\omega}_1$. Con frecuencia, la analogía cono anclado-cono espacial es una herramienta conveniente para visualizar el movimiento de un cuerpo.

*Véase, por ejemplo, *Advanced Engineering Dynamics*, J. H. Ginsberg, Harper y Row, 1988, p.115.

Problema de ejemplo 19.1

El brazo OA del sistema que se muestra rota respecto al eje vertical con velocidad angular ω_1. Al mismo tiempo, el disco delgado en A gira con velocidad angular ω_2 relativa a OA. Determine la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ del disco en la posición que se muestra. Suponga que ω_1 y ω_2 no son constantes.



Solución

Suponga que el origen del marco de referencia xyz que se muestra en la figura está unido al punto O y que los ejes de coordenadas están inmersos en el brazo OA. Así, el movimiento angular de este marco es idéntico al de OA. Los vectores base para el marco en rotación se denotan con **i**, **j** y **k**.

En la representación vectorial, las dos velocidades angulares que se indican en la figura (a) son:

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \omega_1 \mathbf{k} \qquad \text{(velocidad angular del brazo } OA\text{)}$$

$$\boldsymbol{\omega}_2 = \omega_2 \mathbf{j} \qquad \text{(velocidad angular del disco relativa a } OA\text{)}$$

La velocidad angular del disco es

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 \tag{a}$$

o

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \mathbf{k} + \omega_2 \mathbf{j} \text{ (válida para todos los tiempos)} \qquad \textit{Respuesta} \tag{b}$$

La ecuación (b) es válida para todos los tiempos, ya que el marco de referencia xyz rota con el brazo OA, de modo que los ejes y y z siempre están dirigidos a lo largo de OA y al eje vertical, respectivamente. La indicación de cuáles expresiones son válidas para todos los tiempos ayuda a evitar el error común de intentar derivar una expresión que sólo es correcta en un instante particular.

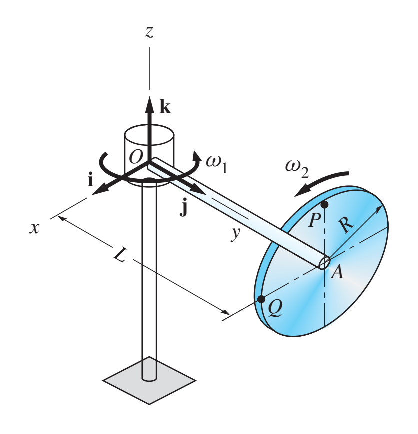
La aceleración angular del disco puede encontrarse al derivar la expresión para $\boldsymbol{\omega}$ que se dio en la ecuación (b). Al utilizar la ecuación (19.4), se obtiene

$$\boldsymbol{\alpha} = \dot{\boldsymbol{\omega}} = (\dot{\boldsymbol{\omega}})_{/xyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\omega} \tag{d}$$

donde $(\dot{\boldsymbol{\omega}})_{/xyz}$ es la aceleración angular del disco relativa al marco xyz y ω es la velocidad angular del marco xyz. De la ecuación (b), se observa que $(\dot{\boldsymbol{\omega}})_{/xyz} = \dot{\omega}_1 \mathbf{k} + \dot{\omega}_2 \mathbf{j}$ (ya que los vectores base **k** y **j** están fijos en el marco xyz, se anulan sus derivadas relativas a ese marco). Además, ya que $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_1$, se obtiene $\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\omega} = \omega_1 \mathbf{k} \times (\omega_1 \mathbf{k} + \omega_2 \mathbf{j}) = -\omega_1 \omega_2 \mathbf{i}$. Al sustituir este resultado en la ecuación (d), se encuentra que

$$\alpha = -\omega_1 \omega_2 \mathbf{i} + \dot{\omega}_2 \mathbf{j} + \dot{\omega}_1 \mathbf{k} \text{ (válida para todos los tiempos)} \qquad \textit{Respuesta}$$

Problema de ejemplo 19.2



La figura repite el sistema que se describió en el problema de ejemplo 19.1. Calcule la velocidad y la aceleración del punto P sobre el disco en la posición que se muestra.

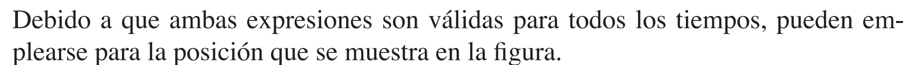
Solución

Suponga que el marco de referencia xyz que se indica en la figura está unido al punto O e inmerso en el brazo OA. De la solución del problema de ejemplo 19.1, se sabe que la velocidad y la aceleración angulares del disco son

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1\mathbf{k} + \omega_2\mathbf{j} \tag{a}$$

y

$$\boldsymbol{\alpha} = \dot{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\omega}_1\mathbf{k} + \dot{\omega}_2\mathbf{j} - \omega_1\omega_2\mathbf{i} \tag{b}$$



Debido a que ambas expresiones son válidas para todos los tiempos, pueden emplearse para la posición que se muestra en la figura.

El movimiento del punto P puede analizarse al relacionarlo con el del punto A. Al referirse a la figura, el vector de posición del punto fijo O al punto A es $\mathbf{r}_{A/O} = L\mathbf{j}$. Ya que la velocidad y la aceleración angulares del brazo OA son $\boldsymbol{\omega}_1$ y $\dot{\boldsymbol{\omega}}_1$, la velocidad y la aceleración del punto A son

$$\mathbf{v}_A = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_{A/O} = \omega_1\mathbf{k} \times L\mathbf{j} = -L\omega_1\mathbf{i} \tag{c}$$

y

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_A &= \dot{\boldsymbol{\omega}}_1 \times \mathbf{r}_{A/O} + \boldsymbol{\omega}_1 \times (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_{A/O}) \\ &= \dot{\omega}_1\mathbf{k} \times L\mathbf{j} + \omega_1\mathbf{k} \times (-L\omega_1\mathbf{i}) \\ &= -L\dot{\omega}_1\mathbf{i} - L\omega_1^2\,\mathbf{j}\end{aligned} \tag{d}$$

A partir de la figura se ve que el vector de posición de P relativo a A es $\mathbf{r}_{P/A} = R\mathbf{k}$. Ya que P y A pertenecen al disco, sus vectores de velocidad y aceleración relativas quedan como

$$\mathbf{v}_{P/A} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{P/A} = (\omega_1\mathbf{k} + \omega_2\mathbf{j}) \times R\mathbf{k} = R\omega_2\mathbf{i} \tag{e}$$

y

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_{P/A} &= \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{P/A} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{P/A}) \\ &= (\dot{\omega}_1\mathbf{k} + \dot{\omega}_2\mathbf{j} - \omega_1\omega_2\mathbf{i}) \times R\mathbf{k} + (\omega_1\mathbf{k} + \omega_2\mathbf{j}) \times R\omega_2\mathbf{i} \\ &= (R\dot{\omega}_2\mathbf{i} + R\omega_1\omega_2\mathbf{j}) + \left(R\omega_1\omega_2\mathbf{j} - R\omega_2^2\mathbf{k}\right)\end{aligned} \tag{f}$$

La velocidad de P se encuentra al sustituir las ecuaciones (c) y (e) en la ecuación $\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{P/A}$:

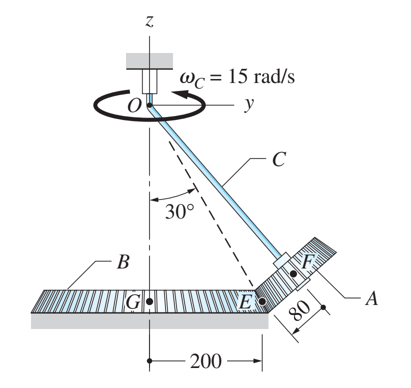
$$\mathbf{v}_P = (-L\omega_1 + R\omega_2)\,\mathbf{i} \qquad \textit{Respuesta} \tag{g}$$

De modo similar, al sustituir las ecuaciones (d) y (f) en $\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{P/A}$, el vector de aceleración de P queda (después de algún reacomodo de términos)

$$\mathbf{a}_P = (-L\dot{\omega}_1 + R\dot{\omega}_2)\mathbf{i} + \left(-L\omega_1^2 + 2R\omega_1\omega_2\right)\mathbf{j} - R\omega_2^2\mathbf{k} \qquad \textit{Respuesta} \text{ (h)}$$

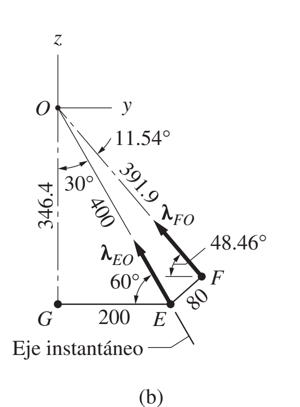
La velocidad y aceleración del punto P también podrían calcularse al reconocer que el disco rota respecto al punto fijo O (observe que la longitud de una recta que conecta al punto O con cualquier sitio sobre el disco permanece constante). En este caso sería conveniente considerar el disco extendido para incluir el punto O. Si se utiliza este concepto, la velocidad y aceleración del punto P podrían determinarse con $\mathbf{v}_P = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{P/O}$ y $\mathbf{a}_P = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{P/O} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{P/O})$. En este caso $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{\alpha}$ se han dado como en las ecuaciones (a) y (b), respectivamente y de la figura se observa que el vector de posición de P relativo a O es $\mathbf{r}_{P/O} = L\mathbf{j} + R\mathbf{k}$. Es posible comprobar que los resultados son idénticos a los que se muestran en las ecuaciones (g) y (h).

Problema de ejemplo 19.3



Dimensiones en mm

(a)



(b)

El engrane A que se muestra en la figura (a) rueda alrededor del engrane fijo B conforme gira respecto al brazo C. Si este último rota respecto al eje vertical a razón constante $\omega_C = 15$ rad/s, calcule: 1. la velocidad angular del engrane A y 2. aceleración angular del mismo.

Solución

El marco de referencia que se muestra en la figura (a) está unido al brazo C. La geometría del sistema se indica en la figura (b), donde las distancias y los ángulos se obtuvieron directamente de la figura (a) o se calcularon con trigonometría.

Parte 1

De la figura (a) se observa que el engrane A rota respecto al punto fijo O (observe que una recta de O a cualquier punto sobre el engrane A no cambia su longitud). Ya que el punto de contacto E no tiene velocidad, se concluye que el eje instantáneo de rotación del engrane A es la recta OE, como se indica en la figura (b).

La velocidad angular del engrane A es

$$\boldsymbol{\omega}_A = \boldsymbol{\omega}_C + \boldsymbol{\omega}_{A/C} \qquad \text{(a)}$$

donde $\boldsymbol{\omega}_C$ es la velocidad angular del brazo C y $\boldsymbol{\omega}_{A/C}$ es la velocidad de giro del engrane A, es decir, la velocidad angular del engrane A relativa al brazo C.

Al referirse a la figura (a) se observa que la velocidad angular del brazo C es

$$\boldsymbol{\omega}_C = \omega_C\mathbf{k} = 15\mathbf{k} \text{ rad/s} \quad \text{(válida para todos los tiempos)} \qquad \text{(b)}$$

Debido a que la dirección de la velocidad de giro del engrane A coincide con la del vector unitario $\boldsymbol{\lambda}_{FO}$ que se muestra en la figura (b), puede escribirse como

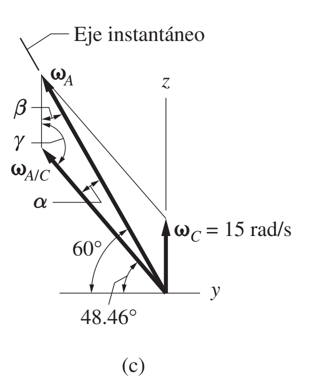
$$\boldsymbol{\omega}_{A/C} = \omega_{A/C}\boldsymbol{\lambda}_{FO} \quad \text{(válida para todos los tiempos)} \qquad \text{(c)}$$

Al sustituir las ecuaciones (b) y (c) en (a), la velocidad angular del engrane *A* queda

$$\boldsymbol{\omega}_A = 15\mathbf{k} + \omega_{A/C}\boldsymbol{\lambda}_{FO} \quad \text{(válida para todos los tiempos)} \qquad \text{(d)}$$

En la figura (c) se muestra el diagrama vectorial que representa a la ecuación (d). Observe que $\boldsymbol{\omega}_A$ está sobre el eje instantáneo de rotación y que $\boldsymbol{\omega}_{A/C}$ está dirigida sobre la recta *FO*, el eje del brazo *C*. Los ángulos α, β, y γ de la figura (c) se calcularon con los ángulos que se muestran en la figura (b).

Se observa que la figura (c) sólo contiene dos incógnitas, ω_A y $\omega_{A/C}$, que pueden calcularse con trigonometría. Al aplicar la ley de los senos resulta:



(c)

$$\frac{15}{\text{sen } 11.54°} = \frac{\omega_{A/C}}{\text{sen } 30°} = \frac{\omega_A}{\text{sen } 138.46°}$$

de donde se obtiene

$$\omega_{A/C} = 37.49 \text{ rad/s} \quad \text{y} \quad \omega_A = 49.72 \text{ rad/s} \qquad \text{(e)}$$

Si se toma en cuenta el hecho de que el vector de velocidad angular del engrane *A* coincide con el vector unitario $\boldsymbol{\lambda}_{EO}$ de la figura (b), entonces puede escribirse como:

$$\boldsymbol{\omega}_A = 49.72\boldsymbol{\lambda}_{EO} = 49.72(-\text{sen } 30°\mathbf{j} + \cos 30°\mathbf{k})$$

o

$$\boldsymbol{\omega}_A = -24.9\mathbf{j} + 43.1\mathbf{k} \text{ rad/s} \quad \text{(válida para todos los tiempos)} \quad \textit{Respuesta} \quad \text{(f)}$$

Un método alterno para calcular las velocidades angular y de giro de *A* consiste en resolver la ecuación vectorial $\mathbf{v}_E = \boldsymbol{\omega}_A \times \mathbf{r}_{E/O} = \mathbf{0}$, donde $\boldsymbol{\omega}_A$ se dio en la ecuación (d) y $\mathbf{r}_{E/O} = 200\mathbf{j} - 346.4\mathbf{k}$ mm.

Parte 2

La aceleración angular del engrane *A* puede obtenerse al derivar su velocidad angular:

$$\boldsymbol{\alpha}_A = \dot{\boldsymbol{\omega}}_A = (\dot{\boldsymbol{\omega}}_A)_{/xyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\omega}_A \qquad \text{(g)}$$

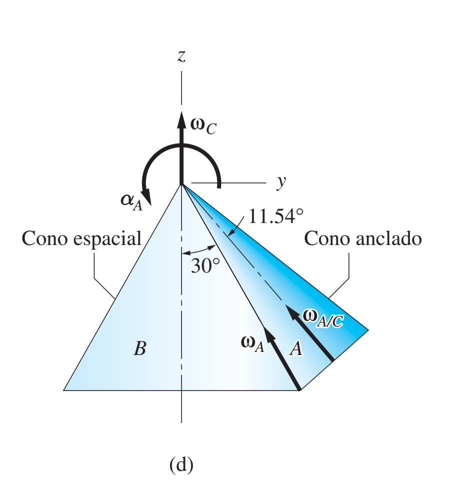
donde $(\dot{\boldsymbol{\omega}}_A)_{/xyz}$ es la aceleración angular de *A* relativa al marco de referencia *xyz* y $\boldsymbol{\Omega}$ es la velocidad angular del marco.

Al utilizar la ecuación (f), $\boldsymbol{\omega}_A = -24.9\mathbf{j} + 43.1\mathbf{k}$ rad/s (que es válida para todos los tiempos y entonces puede derivarse), se obtiene que $(\dot{\boldsymbol{\omega}}_A)_{/xyz} = \mathbf{0}$. Además, se tiene que $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_C$, y la ecuación (g) queda:

$$\boldsymbol{\alpha}_A = \dot{\boldsymbol{\omega}}_A = \boldsymbol{\omega}_C \times \boldsymbol{\omega}_A = 15\mathbf{k} \times (-24.9\mathbf{j} + 43.1\mathbf{k})$$

por lo que se obtiene

$$\boldsymbol{\alpha}_A = 374\mathbf{i} \text{ rad/s}^2 \qquad \textit{Respuesta}$$

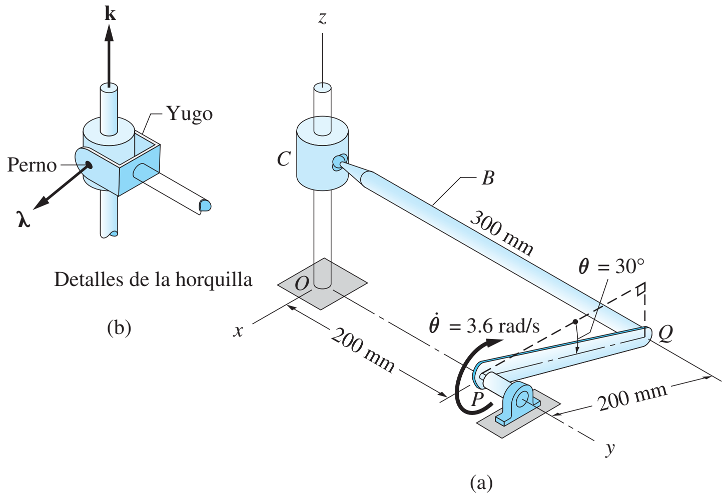


(d)

Como se muestra en la figura (d), el movimiento del engrane *A* puede modelarse como el cono anclado (que representa al engrane *A*) que rueda sin deslizarse sobre el exterior del cono espacial (que representa al engrane *B*). La figura también muestra la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_A$, sus componentes $\boldsymbol{\omega}_C$ y $\boldsymbol{\omega}_{A/C}$, y la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}_A$. Observe que $\boldsymbol{\alpha}_A$ siempre es perpendicular a $\boldsymbol{\omega}_A$.

Problema de ejemplo 19.4

El mecanismo que se muestra en la figura (a) consiste en la manivela *PQ*, que rota respecto al eje *OP* y de la varilla de control *B* conectada a la manivela y al collarín deslizante *C*. 1. Si las conexiones en *Q* y *C* son rótulas esféricas, calcule la velocidad del collarín *C* y la velocidad angular de la varilla *B*, dado que $\theta = 30^\circ$ y $\dot{\theta} = 3.6$ rad/s. 2. Resuelva la parte 1 suponiendo que la conexión en *C* es una horquilla, como se muestra en la figura (b).



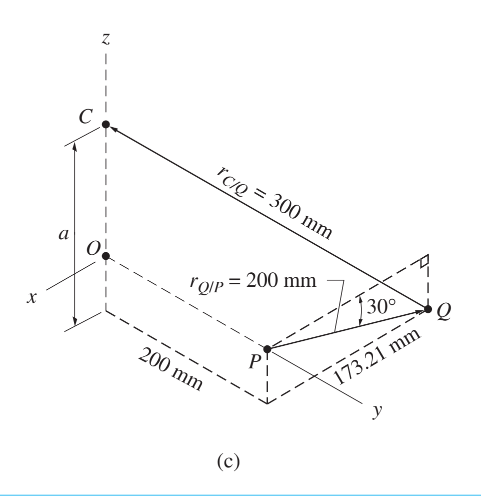
Solución

Parte 1

La ecuación de la velocidad relativa entre los puntos *C* y *Q* (observe que ambos están sobre la varilla *B*) es

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_Q + \mathbf{v}_{C/Q} = \boldsymbol{\omega}_{PQ} \times \mathbf{r}_{Q/P} + \boldsymbol{\omega}_B \times \mathbf{r}_{C/Q} \qquad \text{(a)}$$

donde $\boldsymbol{\omega}_{PQ}$ y $\boldsymbol{\omega}_B$ son las velocidades angulares de la manivela y la varilla de control, respectivamente, y los vectores de posición $\mathbf{r}_{Q/P}$ y $\mathbf{r}_{C/Q}$ están definidos en la figura (c).



(c)

Suponiendo que la velocidad del collarín se dirige hacia arriba, se tiene

$$\mathbf{v}_C = v_C\mathbf{k} \tag{b}$$

Con $\mathbf{r}_{Q/P} = -173.21\mathbf{i} - 100.0\mathbf{k}$ mm y $\boldsymbol{\omega}_{PQ} = -3.6\mathbf{j}$ rad/s, la velocidad de Q es

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_Q = \boldsymbol{\omega}_{PQ} \times \mathbf{r}_{Q/P} &= -3.6\mathbf{j} \times (-173.21\mathbf{i} - 100.0\mathbf{k}) \\ &= 360.0\mathbf{i} - 623.6\mathbf{k} \text{ mm/s}\end{aligned} \tag{c}$$

Antes de encontrar $\mathbf{r}_{C/Q}$, es necesario calcular la distancia a que se muestra en la figura (c). A partir de la geometría de esa figura se observa que $a = [(300)^2 - (173.21)^2 - (200)^2]^{1/2} = 141.42$ mm, que da

$$\mathbf{r}_{C/Q} = 173.21\mathbf{i} - 200.0\mathbf{j} + 141.42\mathbf{k} \text{ mm} \tag{d}$$

Al sustituir las ecuaciones de la (b) a la (d) en la ecuación (a) y usar la forma de determinante del segundo producto cruz, se tiene

$$v_C\mathbf{k} = (360.0\mathbf{i} - 623.6\mathbf{k}) + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ 173.21 & -200.0 & 141.42 \end{vmatrix}$$

donde $\boldsymbol{\omega}_B = \omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k}$ es la velocidad angular de la varilla B. Al desarrollar el determinante e igualar las componentes, se obtienen las tres ecuaciones escalares siguientes:

$$\begin{aligned} 0 &= 360.0 & & +141.42\omega_y & +200.0\omega_z \\ 0 &= & -141.42\omega_x & & +173.21\omega_z \\ v_C &= -623.6 & -200.0\omega_x & -173.21\omega_y & \end{aligned} \tag{e}$$

Ya que estas ecuaciones contienen cuatro incógnitas (v_C, ω_x, ω_y, ω_z), no es posible obtener una solución completa sin información adicional. La razón física para la indeterminación son las rótulas esféricas que permiten que la varilla B gire libremente respecto a su eje sin afectar a v_C. Por tanto, la ecuación de la velocidad relativa, ecuación (a), no puede determinar la velocidad de giro de la varilla B (la componente de $\boldsymbol{\omega}_B$ sobre el eje de la varilla). Una forma de superar esta dificultad consiste en *especificar* la velocidad de giro de B, proporcionando así una ecuación adicional. El valor seleccionado para la velocidad de giro afectará a $\boldsymbol{\omega}_B$, pero, no afecta a v_C.

La solución se completará suponiendo que la velocidad de giro de la varilla B respecto a su eje es cero; es decir, $\boldsymbol{\omega}_B \cdot \mathbf{r}_{C/Q} = 0$, o

$$\begin{aligned}(\omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k})\cdot (173.21\mathbf{i} - 200.0\mathbf{j} + 141.42\mathbf{k}) &= 0 \\ 173.21\omega_x - 200.0\omega_y + 141.42\omega_z &= 0\end{aligned} \tag{f}$$

Las ecuaciones (e) y (f) representan cuatro ecuaciones escalares con cuatro incógnitas, cuya solución da $v_C = -182.7$ mm/s, $\omega_x = -0.980$ rad/s, $\omega_y = -1.414$ rad/s, y $\omega_z = -0.800$ rad/s. Al expresarse en forma vectorial, los resultados son

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_C &= -182.7\mathbf{k} \text{ mm/s} \\ \boldsymbol{\omega}_B &= -0.980\mathbf{i} - 1.414\mathbf{j} - 0.800\mathbf{k} \text{ rad/s}\end{aligned}$$

Respuesta

Parte 2

De la figura (b) es evidente que la rotación de la varilla B respecto al collarín C sólo ocurre respecto al perno de la horquilla. Además, el collarín rota respecto al eje z. Así, la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_B$ de la varilla sólo puede tener componentes en la dirección de los vectores $\boldsymbol{\lambda}$ y $\mathbf{k}$, donde $\boldsymbol{\lambda}$ es un vector (no necesariamente unitario) en la dirección del perno, como se muestra en la figura (b). La componente de $\boldsymbol{\omega}_B$ que es perpendicular a $\boldsymbol{\lambda}$ y $\mathbf{k}$ es cero; es decir,

$$\boldsymbol{\omega}_B \cdot (\boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{k}) = 0 \qquad \text{(g)}$$

La ecuación (g) reemplaza la condición de giro cero ($\boldsymbol{\omega}_B \cdot \mathbf{r}_{C/Q} = 0$) que se usó en la parte 1 de la solución. Las ecuaciones (e) quedan sin modificación.

Debido a que el perno de la horquilla es perpendicular al eje z, se tiene que $\lambda = \lambda_x\mathbf{i} + \lambda_y\mathbf{j}$. El perno también es perpendicular a la varilla B, por lo que $\lambda \cdot \mathbf{r}_{C/Q} = 0$. Al sustituir para $\mathbf{r}_{C/Q}$ de la ecuación (d), se obtiene $173.21\ \lambda_x - 200.0\ \lambda_y = 0$. Haciendo $\lambda_x = 1$, se obtiene $\lambda_y = 173.21/200.0 = 0.8661$ y la ecuación (g) queda

$$\begin{vmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ 1 & 0.8661 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

que al desarrollarse da

$$0.8661\omega_x - 1.0\omega_y = 0 \qquad \text{(h)}$$

Al resolver las ecuaciones (e) y (h) de manera simultánea, se obtiene $v = -182.7$ mm/s, $\omega_x = -1.260$ rad/s, $\omega_y = -1.091$ rad/s, y $\omega_z = -1.029$ rad/s. En forma vectorial, la solución es

$$\mathbf{v}_C = 182.7\mathbf{k} \text{ mm/s} \qquad \textit{Respuesta}$$

$$\boldsymbol{\omega}_B = -1.260\mathbf{i} - 1.091\mathbf{j} - 1.029\mathbf{k} \text{ rad/s} \qquad \textit{Respuesta}$$

Se ve que la velocidad del collarín C es la misma que en la parte 1 de la solución, pero la velocidad angular de la varilla B es diferente, como se esperaba.

Problemas

19.1 Refiriéndose al problema de ejemplo 19.2, determine la velocidad y aceleración del punto Q sobre el disco en la posición que se muestra.

19.2 Calcule la aceleración del collarín deslizante C de la parte 1 en el problema de ejemplo 19.4.

19.3 La barra $OABC$ rota respecto a la rótula esférica en O. En la posición que se muestra, la velocidad angular y la aceleración angular de la barra son $\boldsymbol{\omega} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ rad/s y $\boldsymbol{\alpha} = 20\mathbf{i} - 30\mathbf{j}$ rad/s^2, respectivamente. Obtenga los vectores velocidad y aceleración del punto C.

19.4 La barra $OABC$ rota respecto a la rótula esférica en O. En la posición que se muestra, el vector de velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ de la barra es paralelo a OC. Encuentre la magnitud de $\boldsymbol{\omega}$ si la rapidez del punto B es 160 mm/s en esta posición.

19.5 La barra $OABC$ rota respecto a la rótula esférica en O. En la posición que se muestra, el vector de velocidad angular de la varilla es perpendicular a la recta OC y la velocidad del punto C es $\mathbf{v}_C = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}$ m/s. Para esta posición, determine v_z y el vector de velocidad angular.

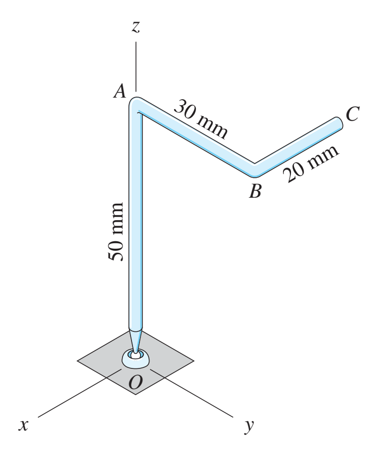


Fig. P19.3–P19.5

19.6 El cono rueda sobre el plano xy sin deslizarse. La velocidad de giro $\omega_1 = 2.4$ rad/s es constante. Para la posición que se muestra, obtenga: (a) la velocidad angular del cono; (b) la aceleración angular del cono y (c) la velocidad y aceleración del punto P.

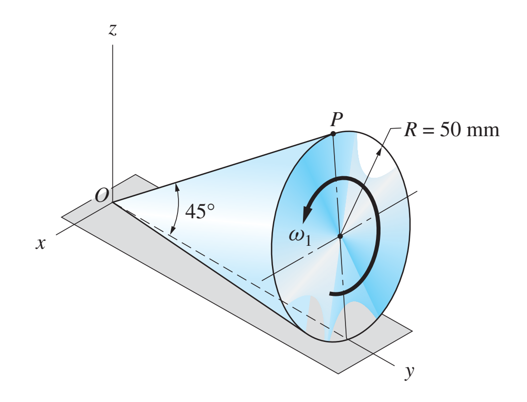


Fig. P19.6

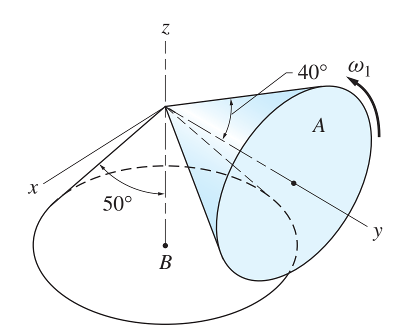


Fig. P19.7

19.7 El cono A rueda sin deslizarse sobre el lado exterior del cono estacionario B con velocidad de giro ω_1. En la posición que se muestra, $\omega_1 = 2$ rad/s y $\dot{\omega}_1 = -7$ rad/s^2. Para esta posición, determine: (a) la velocidad angular del cono A y (b) su aceleración angular.

19.8 El cono A rueda sin deslizarse en el interior del cono estacionario B con velocidad de giro constante $\omega_1 = 3.6$ rad/s. Calcule: (a) la velocidad angular del cono A y (b) su aceleración angular.

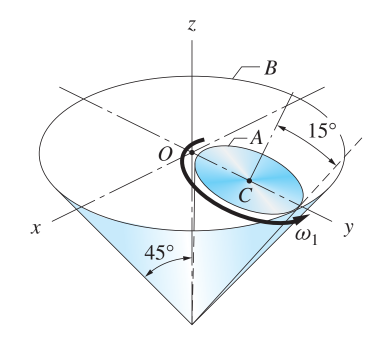


Fig. P19.8

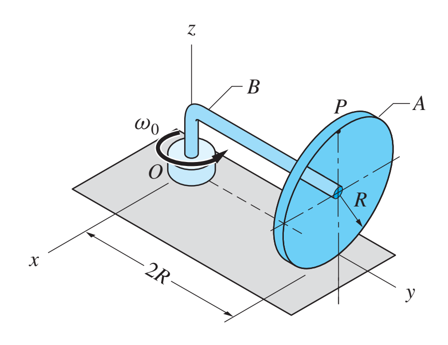


Fig. P19.9

19.9 El disco *A* tiene libertad para girar respecto al eje doblado *B*, que rota con velocidad angular constante ω_0 respecto al eje *z*. Suponiendo que el disco rueda sin deslizarse sobre la superficie horizontal, determine lo siguiente para la posición que se muestra: (a) la velocidad angular del disco; (b) la aceleración angular del disco y (c) la velocidad y aceleración del punto *P* sobre el disco.

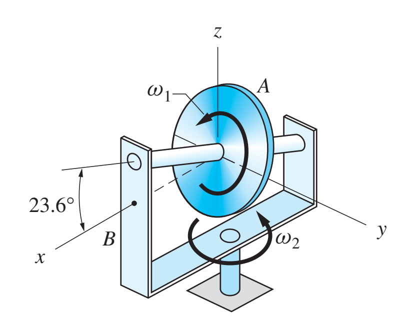


Fig. P19.10

19.10 El disco *A* del giroscopio gira respecto a su eje, que está inclinado a 23.6º relativo al plano *xy*, con rapidez angular constante $\omega_1 = 40$ rad/s. Al mismo tiempo, el marco *B* rota respecto al eje *z* con velocidad angular variable ω_2. En el instante cuando $\omega_2 = 16$ rad/s y $\dot{\omega}_2 = 400$ rad/s , calcule: (a) la velocidad angular del disco *A* y (b) la aceleración angular del disco *A*.

19.11 Dos engranes biselados unidos al brazo *C* ruedan sobre el engrane *A* fijo. El brazo rota respecto al eje *z* con velocidad angular constante de 25 rad/s. Calcule: (a) la velocidad angular del engrane *B* y (b) su aceleración angular.

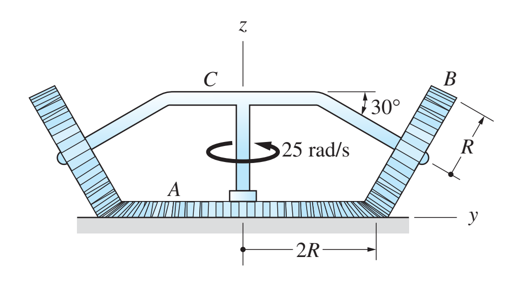


Fig. P19.11

19.12 Los engranes *A* y *B* giran libremente sobre el eje doblado *D*, mientras que el engrane *C* está fijo. El eje *D* rota respecto al eje *y* con velocidad angular constante ω_0. Para la posición que se muestra, calcule la velocidad angular del (a) engrane *A* y (b) engrane *B*.

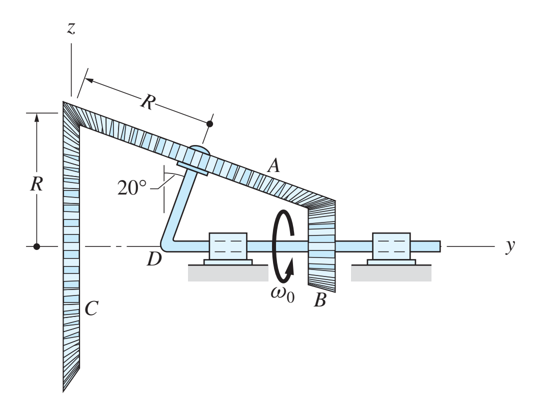


Fig. P19.12

19.13 La varilla *AB* está conectada por rótulas esféricas a los collarines deslizantes *A* y *B*. En la posición que se muestra, el collarín *A* se mueve hacia arriba con velocidad $v_A = 4$ pies/s. Determine la rapidez del collarín *B* en esta posición.

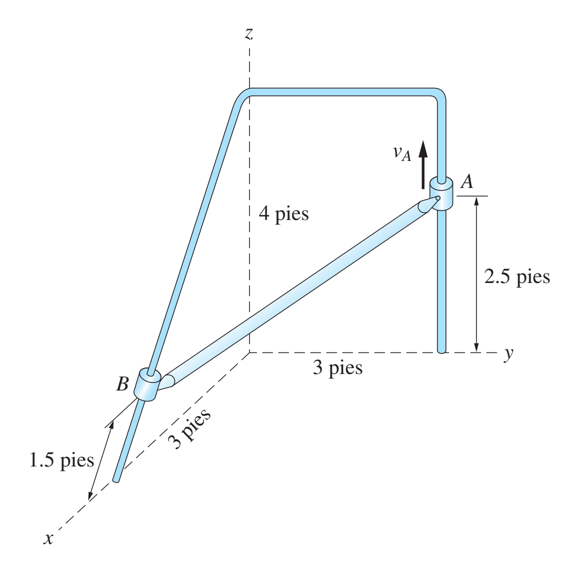


Fig. P19.13

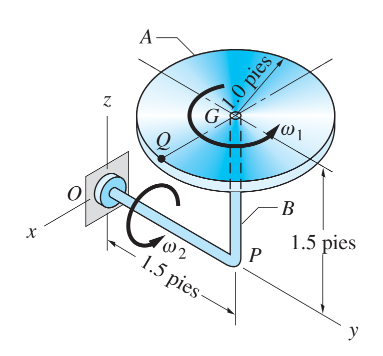


Fig. P19.14

19.14 El disco A gira respecto al brazo B con rapidez angular ω_1 conforme el brazo rota respecto al eje y con rapidez angular ω_2, ninguna rapidez es constante. Cuando el ensamblado está en la posición que se muestra, $\omega_1 = 3$ rad/s, $\omega_2 = 4$ rad/s, $\dot{\omega}_1 = -16$ rad/s^2 y $\dot{\omega}_2 = 25$ rad/s^2. Para esta posición, determine: (a) la velocidad del punto Q sobre el disco y (b) la aceleración del punto Q.

19.15 La barra PQ gira respecto al eje OA con velocidad angular constante $\omega_1 =$ 20 rad/s. Al mismo tiempo, OA rota respecto al eje z con velocidad angular constante $\omega_2 = 12$ rad/s. Para la posición que se muestra, determine: (a) la velocidad del extremo P y (b) su aceleración.

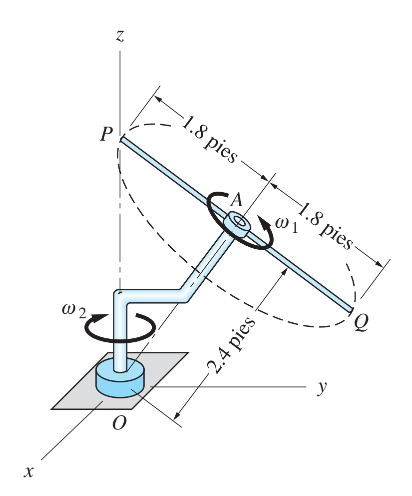


Fig. P19.15

19.16 Las manivelas AB y CD rotan respecto a ejes que son paralelos al eje y. La barra BD está unida a las manivelas mediante rótulas esféricas. Si la rapidez angular de AB es constante $\omega_0 = 12$ rad/s, determine para la posición que se muestra: (a) las velocidades angulares de CD y BD y (b) la aceleración angular de CD. Suponga que la barra BD no rota respecto a sus ejes; es decir, suponga que el vector de velocidad angular de BD es perpendicular a BD.

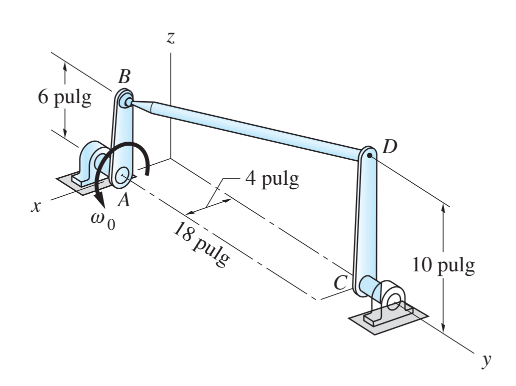


Fig. P19.16

19.17 La varilla *AB* está unida al borde del disco *C* y al collarín deslizante *B* con rótulas esféricas. El disco rota con velocidad angular constante de 6 rad/s respecto al eje vertical en *O*. Para la posición que se muestra, obtenga la velocidad del collarín *B*.

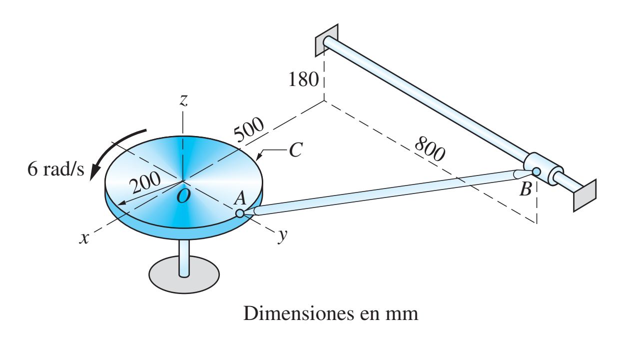


Fig. P19.17

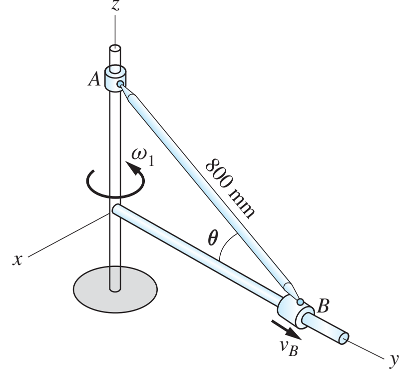
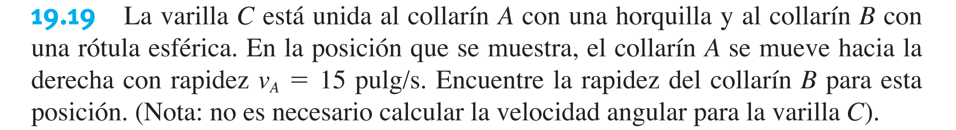


Fig. P19.18

19.18 Los extremos de la barra *AB* están conectados a collarines con rótulas esféricas. Los collarines se deslizan sobre los brazos del marco rígido. El marco rota respecto al eje *z* con velocidad angular constante $\omega_1 = 1.5$ rad/s. Si la velocidad del collarín en *B* relativa al marco es la constante $v_B = 0.2$ m/s, determine la aceleración angular de la barra *AB* en la posición $\theta = 30°$.



19.19 La varilla *C* está unida al collarín *A* con una horquilla y al collarín *B* con una rótula esférica. En la posición que se muestra, el collarín *A* se mueve hacia la derecha con rapidez $v_A = 15$ pulg/s. Encuentre la rapidez del collarín *B* para esta posición. (Nota: no es necesario calcular la velocidad angular para la varilla *C*).

19.20 Para el mecanismo que se describió en el problema 19.19, obtenga las velocidades angulares del collarín *A* y la varilla *C* en la posición que se muestra.

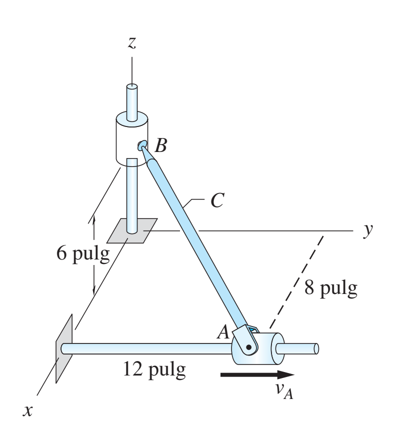


Fig. P19.19-P19.21

19.21 Suponga que se intercambian las conexiones para la varilla descrita en el problema 19.19 (es decir, la rótula esférica está en *A* y la horquilla está en *B*). Para la posición que se muestra, determine la velocidad angular de la varilla *C* y la velocidad del collarín *B*.

19.22 El brazo *AB* rota alrededor del eje *z* con velocidad angular constante $\omega_1 = 3$ rad/s. El disco gira respecto al brazo con velocidad angular constante $\omega_2 = 10$ rad/s.

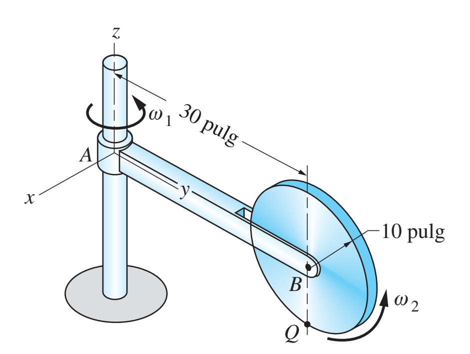


Fig. P19.22

Para la posición que se muestra, calcule: (a) la aceleración angular del disco y (b) la aceleración del punto Q sobre el disco.

19.23 El disco gira con velocidad angular constante $\omega_2 = 6$ rad/s relativa al brazo OA. En la posición que se muestra, el brazo OA rota respecto al eje z con velocidad angular $\omega_1 = 4$ rad/s y aceleración angular $\dot{\omega}_1 = -15$ rad/s^2. Para esta posición, encuentre: (a) la aceleración angular del disco y (b) la velocidad de P, el punto más alto sobre el disco.

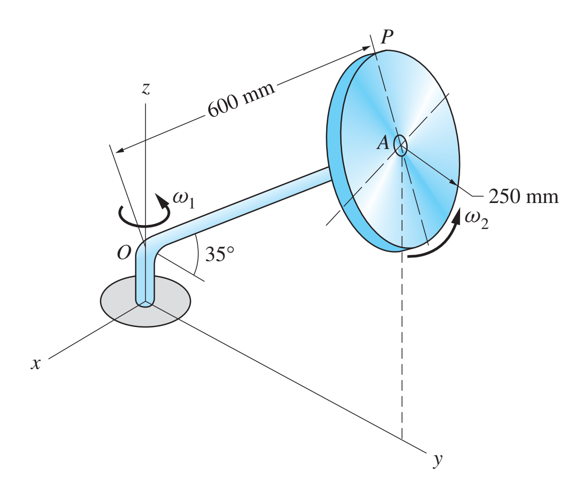


Fig. P19.23

19.24 Se usa una horquilla para unir la varilla AB con el eje vertical. Como este último rota respecto al eje z con velocidad angular constante $\omega_1 = 12$ rad/s, la varilla rota con velocidad angular constante $\omega_2 = 9$ rad/s relativa a la horquilla. Para la posición que se muestra, calcule: (a) la aceleración angular de la varilla y (b) la aceleración del extremo B de la varilla.

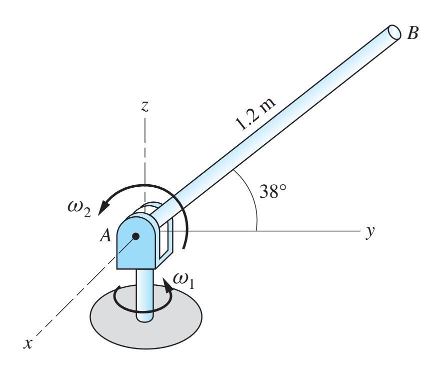


Fig. P19.24

*19.3 Método de impulso-cantidad de movimiento

a. *Cantidad de movimiento angular*

En el capítulo 17 se presentó la cantidad de movimiento angular de un cuerpo rígido respecto a un punto. Se enfatizó que la cantidad de movimiento angular $\mathbf{h}_A$ respecto al punto A se obtiene al sumar las cantidades de movmientos angulares de los elementos diferenciales que constituyen el cuerpo:

$$\mathbf{h}_A = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r} \times (\mathbf{v}\, dm) \tag{19.5}$$

Como se muestra en la figura 19.6, $\mathbf{v}\, dm$ es la cantidad de movimiento lineal de un elemento diferencial típico de masa dm y velocidad $\mathbf{v}$, y $\mathbf{r}$ es el vector de posición del elemento relativo a A. El integrando de la ecuación (19.5) es así la cantidad de movimiento angular (es decir, el momento de la cantidad de movimiento lineal) del elemento respecto de A. La integral se forma sobre la región $\mathcal{V}$ que ocupa el cuerpo.

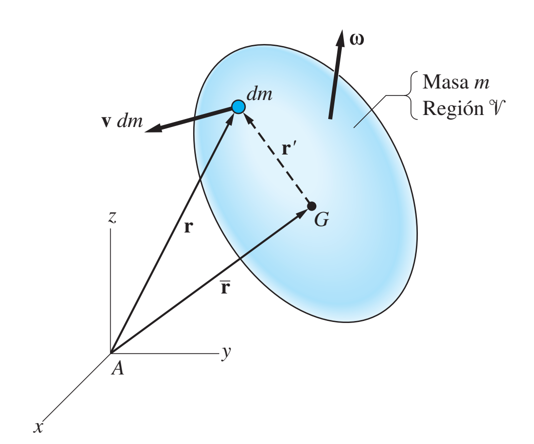


Fig. 19.6

En el apartado 17.3 se demostró que si A es el centro de masa G del cuerpo, la cantidad de movimiento angular toma la forma

$$\mathbf{h}_G = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r}' \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')\, dm \qquad (G\text{:centro de masa}) \tag{19.6}$$

donde $\boldsymbol{\omega}$ es la velocidad angular del cuerpo y $\mathbf{r}'$ es el vector de posición de dm relativo a G, como se indica en la figura 19.6.

También se demostró que la cantidad de movimiento angular de un cuerpo de masa m respecto a un punto arbitrario A puede expresarse en la forma

$$\mathbf{h}_A = \mathbf{h}_G + \bar{\mathbf{r}} \times (m\bar{\mathbf{v}}) \qquad (A\text{: punto arbitrario}) \tag{19.7}$$

En la ecuación (19.7), $\bar{\mathbf{r}}$ es el vector de posición de G relativo a A y $m\bar{\mathbf{v}}$ representa la cantidad de movimiento lineal del cuerpo. Una manera conveniente de calcular $\mathbf{h}_A$ es con el diagrama de la cantidad de movimiento del cuerpo en la figura 19.7. En el diagrama se observa que $\mathbf{h}_A$ es el vector de suma de $\mathbf{h}_G$ y el momento de $m\bar{\mathbf{v}}$ (que actúa en G) respecto de A.

Un caso especial importante es la cantidad de movimiento angular de un cuerpo que rota respecto a un punto fijo A. Entonces la velocidad del elemento diferencial en la figura 19.6 es $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, lo que después de la sustitución en la ecuación (19.5) resulta

$$\mathbf{h}_A = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})\, dm \qquad (A\text{: fijo en el cuerpo y el espacio}) \tag{19.8}$$

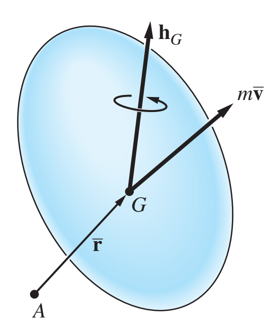


Fig. 19.7

b. Propiedades inerciales

Aquí se presentan las propiedades inerciales de un cuerpo rígido descritas en tres dimensiones (en el apéndice F se analiza este tema con mayor amplitud). En breve se verá que esas propiedades tienen su origen en el cálculo de la cantidad de movimiento angular.

1. Momentos, productos de inercia y el tensor de inercia El *momento de inercia de masa* de un cuerpo respecto al eje a se definió en la ecuación (17.1):

$I_a = \int_{\mathscr{V}} r^2\, dm$, donde $\mathscr{V}$ es la región ocupada por el cuerpo y r es la distancia perpendicular desde el eje a hasta la masa diferencial dm. En la figura 19.8 se ve que las distancias perpendiculares desde los ejes x, y, z hasta dm son

$$(y^2 + z^2)^{1/2} \qquad (z^2 + x^2)^{1/2} \qquad \text{y} \qquad (x^2 + y^2)^{1/2}$$

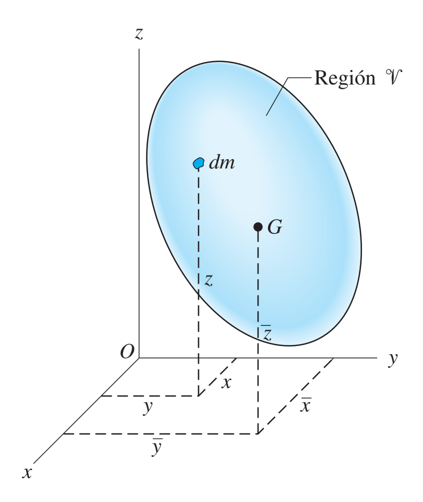


Fig. 19.8

respectivamente. Por tanto, los momentos de inercia de masa del cuerpo respecto a los tres ejes coordenados son

$$I_x = \int_{\mathscr{V}} (y^2 + z^2)\, dm$$
$$I_y = \int_{\mathscr{V}} (z^2 + x^2)\, dm \qquad (19.9)$$
$$I_z = \int_{\mathscr{V}} (x^2 + y^2)\, dm$$

Los *productos de inercia* del cuerpo respecto a los ejes rectangulares que se muestran en la figura 19.8 se definen como

$$I_{xy} = I_{yx} = \int_{\mathscr{V}} xy\, dm$$
$$I_{yz} = I_{zy} = \int_{\mathscr{V}} yz\, dm \qquad (19.10)$$
$$I_{zx} = I_{xz} = \int_{\mathscr{V}} zx\, dm$$

Las dimensiones de las propiedades inerciales definidas en las ecuaciones (19.9) y (19.10) son $[ML^2]$; entonces las unidades son kg · m^2 o slug · pie^2 (lb · pie · s^2). No obstante que los momentos de inercia siempre son positivos, los productos de inercia pueden ser positivos, negativos o cero.

La siguiente matriz de propiedades inerciales recibe el nombre de *tensor de inercia* del cuerpo *en el punto O* (el origen de los ejes coordenados).

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{bmatrix} \qquad (19.11)$$

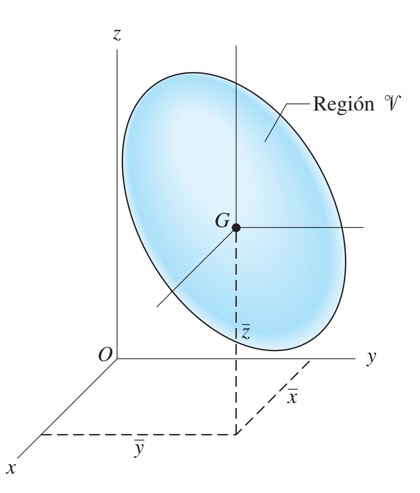


Fig. 19.9

Observe que los términos fuera de la diagonal son los negativos de los productos de inercia. (Los signos “menos” deben incluirse en **I** para así satisfacer ciertas convenciones de álgebra tensorial, un tema que está más allá del alcance de este libro.)

2. Teorema de los ejes paralelos para los momentos de inercia En el capítulo 17 se dedujo el *teorema de los ejes paralelos* para el momento de inercia: $I_a = \bar{I}_a + md^2$, donde I_a es el momento de inercia respecto al eje a, $\bar{I}_a$ es el momento de inercia respecto al eje a central (el eje que pasa por el centro de masa del cuerpo y es paralelo al eje a), m es la masa del cuerpo y d es la distancia entre ambos ejes. Al referirse a la figura 19.9 se observa que las distancias entre los ejes x, y, z y los correspondientes ejes centrales son $(\bar{y}^2 + \bar{z}^2)^{1/2}$, $(\bar{z}^2 + \bar{x}^2)^{1/2}$, y $(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)^{1/2}$, respectivamente. Sean

$\bar{I}_x$, $\bar{I}_y$, e $\bar{I}_z$ los momentos de inercia respecto a los ejes centrales, entonces el teorema de los ejes paralelos para los momentos de inercia queda

$$
\begin{aligned}
I_x &= \bar{I}_x + m(\bar{y}^2 + \bar{z}^2) \\
I_y &= \bar{I}_y + m(\bar{z}^2 + \bar{x}^2) \\
I_z &= \bar{I}_z + m(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)
\end{aligned}
\tag{19.12}
$$

3. *Teorema de los planos paralelos para los productos de inercia* Refiriéndose otra vez al cuerpo en la figura 19.9, es posible probar que los productos de inercia respecto a los dos conjuntos de ejes están relacionados por

$$
\begin{aligned}
I_{xy} &= \bar{I}_{xy} + m\bar{x}\bar{y} \\
I_{yz} &= \bar{I}_{yz} + m\bar{y}\bar{z} \\
I_{zx} &= \bar{I}_{zx} + m\bar{z}\bar{x}
\end{aligned}
\tag{19.13}
$$

donde $\bar{I}_{xy}$, $\bar{I}_{yz}$, e $\bar{I}_{zx}$ denotan los productos de inercia respecto a los ejes centrales. En el apéndice F se demuestra este teorema, que se conoce como el *teorema de los planos paralelos*.

4. *Momentos de inercia principales* Se puede demostrar que siempre es posible encontrar tres ejes perpendiculares, en cualquier punto dado O, de manera que los productos de inercia respecto a esos ejes se anulen. Ésos son los *ejes principales en el punto O* y los momentos de inercia correspondientes, que se denotan con I_1, I_2 e I_3, se conocen como los *momentos de inercia principales* del cuerpo *en el punto O*. Refiriéndose a los ejes principales, el tensor de inercia adquiere la forma de una matriz diagonal:

$$
\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}
\tag{19.14}
$$

En el apéndice F se explica la determinación de los ejes principales y el cálculo de los momentos de inercia principales.

5. *Cuerpo con un plano de simetría* Considere un cuerpo homogéneo que es simétrico respecto a un plano, por ejemplo, el plano xy. Sea el centro de masa del cuerpo, que está en el plano de simetría, el origen del marco xyz. La simetría implica que para cada masa diferencial dm con coordenadas (x, y, z), existe otro dm con coordenadas $(x, y, -z)$. De esto resulta que $\bar{I}_{yz} = \int_{\mathcal{V}} yz\, dm = 0$ e $\bar{I}_{zx} = \int_{\mathcal{V}} zx\, dm = 0$, porque la integral sobre la región de $\mathcal{V}$ donde $z < 0$ cancela a la integral sobre la región donde $z > 0$. Como $\bar{I}_{yz} = \bar{I}_{xz} = 0$ sin importar la orientación de los ejes xy, entonces el eje z debe ser un eje principal de inercia. En este caso especial, el teorema de los planos paralelos para los productos de inercia, las ecuaciones (19.13), quedan

$$
I_{xy} = \bar{I}_{xy} + m\bar{x}\bar{y} \qquad I_{yz} = m\bar{y}\bar{z} \qquad I_{zx} = m\bar{z}\bar{x}
\tag{19.15}
$$

En general, un eje que es perpendicular a un plano de simetría y que pasa por el centro de masa G del cuerpo es un eje principal del cuerpo en el punto G.

c. Componentes rectangulares de la cantidad de movimiento angular

La cantidad de movimiento angular de un cuerpo puede expresarse en términos de la velocidad angular y del tensor de inercia del cuerpo. Debido a que las ecuaciones (19.6) y (19.8) tienen la misma forma,

$$\mathbf{h} = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})\, dm \tag{19.16}$$

así ambos casos pueden tratarse de manera simultánea. Observe que **r** representa el vector de posición de *dm* relativo al punto de referencia (ya sea un punto en el cuerpo que es fijo o el centro de masa).

Las representaciones rectangulares de los vectores que aparecen en la ecuación (19.16) son

$$\begin{aligned} \mathbf{h} &= h_x\mathbf{i} + h_y\mathbf{j} + h_z\mathbf{k} \\ \boldsymbol{\omega} &= \omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k} \\ \mathbf{r} &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \end{aligned}$$

El producto cruz de $\boldsymbol{\omega}$ y **r** queda

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \mathbf{i}(\omega_y z - \omega_z y) + \mathbf{j}(\omega_z x - \omega_x z) + \mathbf{k}(\omega_x y - \omega_y x)$$

En consecuencia, el integrando en la ecuación (19.16) es

$$\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ \omega_y z - \omega_z y & \omega_z x - \omega_x z & \omega_x y - \omega_y x \end{vmatrix} \tag{a}$$

La expansión de este determinante da

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \mathbf{i}&\left[(y^2 + z^2)\,\omega_x - xy\,\omega_y - xz\,\omega_z\right] \\ +\mathbf{j}&\left[-xy\,\omega_x + (z^2 + x^2)\,\omega_y - yz\,\omega_z\right] \\ +\mathbf{k}&\left[-zx\,\omega_x - zy\,\omega_y + (x^2 + y^2)\,\omega_z\right] \end{aligned} \tag{b}$$

Al sustituir la ecuación (b) en la (19.16), se obtiene

$$\begin{aligned} h_x &= \omega_x \int_{\mathcal{V}} \left(y^2 + z^2\right)\, dm - \omega_y \int_{\mathcal{V}} xy\, dm - \omega_z \int_{\mathcal{V}} xz\, dm \\ h_y &= -\omega_x \int_{\mathcal{V}} xy\, dm + \omega_y \int_{\mathcal{V}} \left(z^2 + x^2\right)\, dm - \omega_z \int_{\mathcal{V}} yz\, dm \\ h_z &= -\omega_x \int_{\mathcal{V}} xz\, dm - \omega_y \int_{\mathcal{V}} yz\, dm + \omega_z \int_{\mathcal{V}} \left(x^2 + y^2\right)\, dm \end{aligned} \tag{c}$$

Al reconocer que las integrales en las ecuaciones (c) son las componentes del tensor de inercia *en el punto de referencia*, véanse las ecuaciones (19.9) y (19.10), se obtiene

$$\begin{aligned} h_x &= I_x\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z \\ h_y &= -I_{yx}\omega_x + I_y\omega_y - I_{yz}\omega_z \\ h_z &= -I_{zx}\omega_x - I_{zy}\omega_y + I_z\omega_z \end{aligned} \tag{19.17a}$$

Las ecuaciones (19.17a) pueden escribirse de manera concisa en notación matricial como:

$$\mathbf{h}_A = \mathbf{I}_A\boldsymbol{\omega} \quad (A\text{: fijo en el cuerpo y el espacio, o en el centro de masa}) \tag{19.17b}$$

donde $\mathbf{I}_A$ es la matriz en la ecuación (19.11), donde las componentes de inercia están calculadas respecto al eje que pasa por A. Si xyz son los ejes principales de inercia en el punto de referencia, se anulan los productos de inercia y así

$$\begin{aligned} h_x &= I_x\omega_x \\ h_y &= I_y\omega_y \\ h_z &= I_z\omega_z \end{aligned} \tag{19.18}$$

En general, el vector de la cantidad de movimiento angular $\mathbf{h}$ no está en la misma dirección del vector de velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$. Por ejemplo, si los ejes xyz son los ejes principales de inercia, se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{h} &= I_x\omega_x\mathbf{i} + I_y\omega_y\mathbf{j} + I_z\omega_z\mathbf{k} \\ \boldsymbol{\omega} &= \omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k} \end{aligned} \tag{19.19}$$

A partir de las ecuaciones (19.19), se observa que las direcciones de $\mathbf{h}$ y $\boldsymbol{\omega}$ coinciden sólo para los siguientes casos especiales.

1. Los momentos de inercia principales son iguales (por ejemplo, una esfera homogénea con el centro de masa como origen del sistema de coordenadas).
   Observe que con $I_x = I_y = I_z = I$, la primera de las ecuaciones (19.19) da $\mathbf{h} = I\boldsymbol{\omega}$.
2. La dirección de $\boldsymbol{\omega}$ es paralela a uno de los ejes principales de inercia.
   Si $\boldsymbol{\omega}$ es paralela a un eje principal, por ejemplo el eje z, entonces las ecuaciones (19.19) resultan en $\mathbf{h} = I_z\omega_z\mathbf{k}$ y $\boldsymbol{\omega} = \omega_z\mathbf{k}$. Este caso se aplica al movimiento en un plano de un cuerpo rígido y también demuestra que el movimiento en un plano puede existir sólo si el eje de coordenadas perpendicular al plano del movimiento es un eje principal de inercia.

Las componentes rectangulares de la cantidad de movimiento angular respecto a un punto fijo, o al centro de masa, pueden calcularse con las ecuaciones (19.17). Si se requiere la cantidad de movimiento angular respecto de algún otro punto A, puede obtenerse primero al encontrar $\mathbf{h}_G$ con las ecuaciones (19.17) y después aplicar la (19.7): $\mathbf{h}_A = \mathbf{h}_G + \bar{\mathbf{r}} \times (m\bar{\mathbf{v}})$. Otra vez, observe que las ecuaciones (19.17) no son directamente aplicables para un punto de referencia arbitrario.

d. Principios de impulso-cantidad de movimiento

Los principios de impulso-cantidad de movimiento para el movimiento en un plano, que se analizaron en el apartado 18.6, también son aplicables al movimiento tridimensional. Aquí se enuncian esos principios sin repetir las deducciones que se dieron en ese apartado.

La ecuación de impulso-cantidad de movimiento lineal para un cuerpo rígido es

$$\mathbf{L}_{1-2} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = \Delta\mathbf{p} \tag{19.20}$$

donde $\mathbf{L}_{1-2}$ es el impulso lineal de las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo durante el intervalo de tiempo t_1 a t_2, y $\Delta\mathbf{p}$ es el cambio en la cantidad de movi-

miento lineal del cuerpo durante este intervalo de tiempo. Recuerde que la cantidad de movimiento lineal de un cuerpo de masa m es $\mathbf{p} = m\bar{\mathbf{v}}$, donde $\bar{\mathbf{v}}$ es la velocidad de su centro de masa.

La ecuación de impulso-cantidad de movimiento angular para un cuerpo rígido es

$$(\mathbf{A}_A)_{1-2} = (\mathbf{h}_A)_2 - (\mathbf{h}_A)_1 = \Delta\mathbf{h}_A \qquad \text{(A: punto fijo* o centro de masa)} \tag{19.21}$$

donde $(\mathbf{A}_A)_{1-2}$ es el impulso angular de las fuerzas externas respecto al punto A durante el intervalo de tiempo t_1 a t_2, y $\Delta\mathbf{h}_A$ es el cambio en la cantidad de movimiento angular respecto de A durante este periodo. La cantidad de movimiento angular puede calcularse con las ecuaciones (19.17) o (19.18).

Como se mencionó en el apartado 18.6, las ecuaciones de impulso-cantidad de movimiento también pueden aplicarse a los sistemas de cuerpos rígidos siempre y cuando: 1. los impulsos se refieran sólo a las fuerzas que sean externas al sistema; 2. las cantidades de movimiento se interpreten como las del sistema (obtenidas al sumar las cantidades de movimiento de los cuerpos que constituyen el sistema) y 3. el centro de masa al que se hace referencia en la ecuación (19.21) es el centro de masa del sistema.

De acuerdo con la ecuación (19.20), la cantidad de movimiento lineal se conserva si el impulso lineal es cero. De manera similar, de la ecuación (19.21) se concluye que la cantidad de movimiento angular respecto a un punto fijo o al centro de masa se conserva si el impulso angular respecto a ese punto es cero.

Si el movimiento es impulsivo (fuerzas infinitas que actúan en intervalos de tiempo infinitesimales), que es la aproximación que se usa en los problemas de impacto, entonces la ecuación (19.21) es válida para cualquier punto de referencia (una prueba de este enunciado se da en el apartado 18.7). Debido a que se supone que la duración del impacto es infinitesimal, sólo se necesita considerar las fuerzas impulsivas, y los impulsos de fuerzas finitas son despreciables.

*19.4 Método de trabajo-energía

a. Energía cinética

1. Caso general En el capítulo 18 se demostró que la energía cinética de un cuerpo rígido es

$$T = \frac{1}{2}m\bar{v}^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{h}_G \tag{18.6a, repetida}$$

donde m es la masa del cuerpo, $\bar{v}$ es la rapidez del centro de masa G, $\boldsymbol{\omega}$ representa la velocidad angular del cuerpo y $\mathbf{h}_G$ es la cantidad de movimiento angular del cuerpo respecto a G. El primer término del lado derecho de la ecuación (18.6a) representa la energía cinética de traslación y el segundo término es la energía cinética de rotación.

Si se usa la representación rectangular de $\boldsymbol{\omega}$ y $\mathbf{h}_G$, donde las componentes de $\mathbf{h}_G$ se obtienen de la ecuación (19.17), la energía cinética puede escribirse como†

$$T = \frac{1}{2}m\bar{v}^2 + \frac{1}{2}(\omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k})\cdot\big[(\bar{I}_x\omega_x - \bar{I}_{xy}\omega_y - \bar{I}_{xz}\omega_z)\mathbf{i} + (-\bar{I}_{yx}\omega_x + \bar{I}_y\omega_y - \bar{I}_{yz}\omega_z)\mathbf{j} + (-\bar{I}_{zx}\omega_x - \bar{I}_{zy}\omega_y + \bar{I}_z\omega_z)\mathbf{k}\big]$$

*El punto A está fijo en el espacio; no es necesariamente un punto en el cuerpo.

†Las barras sobre las I nos recuerdan que las propiedades inerciales se calculan en el centro de masa del cuerpo.

Después de evaluar los productos punto y observar que $\bar{I}_{yx} = \bar{I}_{xy}$ y así sucesivamente, se obtiene

$$T = \frac{1}{2}m\bar{v}^2 + \frac{1}{2}(\bar{I}_x\omega_x^2 + \bar{I}_y\omega_y^2 + \bar{I}_z\omega_z^2 - 2\bar{I}_{xy}\omega_x\omega_y - 2\bar{I}_{yz}\omega_y\omega_z - 2\bar{I}_{zx}\omega_z\omega_x) \tag{19.22}$$

Observe que las componentes del tensor de inercia deben evaluarse respecto a los ejes centrales.

2. *Velocidad angular paralela a un eje* Si $\boldsymbol{\omega}$ es paralela a uno de los ejes de coordenadas, por ejemplo el eje z, entonces $\omega_x = \omega_y = 0$, $\omega_z = \omega$ y la ecuación (19.22) se reduce a

$$T = \frac{1}{2}m\bar{v}^2 + \frac{1}{2}\bar{I}_z\omega^2 \qquad (\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k}) \tag{19.23}$$

Ésta es análoga a la ecuación (18.7a) que se usa en el movimiento en un plano. Sin embargo, en el movimiento en un plano, $\boldsymbol{\omega}$ siempre permanecía paralela al eje z, mientras que la ecuación (19.23) requiere que $\boldsymbol{\omega}$ esté en la dirección z sólo en el instante de interés.

3. *Rotación respecto a un punto de velocidad cero* En el apartado 18.3 se demostró que si A es un punto en el cuerpo que tiene velocidad cero, entonces la energía cinética del cuerpo puede escribirse en la forma

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{h}_A \qquad \text{(18.6b, repetida)}$$

donde $\mathbf{h}_A$ es la cantidad de movimiento angular del cuerpo respecto de A. Al expresar $\boldsymbol{\omega}$ y $\mathbf{h}_A$ en términos de sus componentes rectangulares y repetir los pasos que se siguieron en la deducción de la ecuación (19.22), se obtiene

$$T = \frac{1}{2}(I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2 - 2I_{xy}\omega_x\omega_y - 2I_{yz}\omega_y\omega_z - 2I_{zx}\omega_z\omega_x) \quad \text{(ejes que pasan por el punto de velocidad cero)} \tag{19.24}$$

Observe que las propiedades inerciales en la ecuación (19.24) deben calcularse respecto a los ejes que pasan por el punto de referencia A, un punto con velocidad cero.

4. *Rotación respecto a un eje* Si el sistema de coordenadas se elige de manera que z es el eje instantáneo de rotación, entonces $\omega_x = \omega_y = 0$, $\omega_z = \omega$. Por tanto, la ecuación (19.24) se convierte en

$$T = \frac{1}{2} I_z \omega^2 \qquad \text{(el eje } z \text{ es instantáneo)} \tag{19.25}$$

Esta ecuación es equivalente a la (18.7b) que se utilizó en el movimiento en un plano.

b. *Principio de trabajo-energía y la conservación de la energía mecánica*

Los principios de trabajo-energía y conservación de la energía mecánica para el movimiento en un plano, que se presentan en el apartado 18.4, también son aplicables para el movimiento tridimensional. Por tanto, el siguiente análisis es un resumen de las ecuaciones fundamentales que se han explicado en el apartado 18.4.

Si los subíndices 1 y 2 se refieren a las posiciones inicial y final de un cuerpo rígido, el principio de trabajo-energía es

$$(U_{1-2})_{\text{ext}} = \Delta T \tag{19.26}$$

donde $(U_{1-2})_{\text{ext}}$ es el trabajo efectuado por fuerzas externas y ΔT es el cambio en la energía cinética. El trabajo puede calcularse empleando los métodos descritos en los apartados 14.2, 18.2 y es posible utilizar las ecuaciones de la (19.22) a la (19.25) para calcular la energía cinética.

Para un sistema de cuerpos rígidos conectados, el principio de trabajo-energía es

$$(U_{1-2})_{\text{ext}} + (U_{1-2})_{\text{int}} = \Delta T \tag{19.27}$$

donde $(U_{1-2})_{\text{ext}}$ y $(U_{1-2})_{\text{int}}$ representan el trabajo que las fuerzas externas e internas, respectivamente, realizan sobre el sistema.

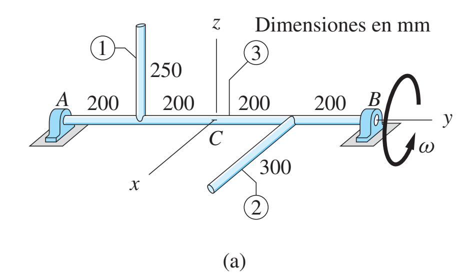
Si todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido o un sistema de cuerpos rígidos conectados son conservativas, entonces la energía mecánica se conserva. El principio de conservación de la energía mecánica

$$V_1 + T_1 = V_2 + T_2 \tag{19.28}$$

puede emplearse en lugar del de trabajo-energía. En la ecuación (19.28), V_1 y V_2 son las energías potenciales inicial y final, y T_1 y T_2 son las cinéticas inicial y final.

Problema de ejemplo **19.5**

Las varillas delgadas uniformes numeradas como 1, 2 y 3 se han soldado para formar el cuerpo rígido que se muestra en la figura (a). Este último, que se apoya en los cojinetes en *A* y *B*, rota con velocidad angular constante $\omega = 30$ rad/s. Cuando el cuerpo está en la posición que se muestra, calcule lo siguiente: 1. la cantidad de movimiento angular respecto al punto *C* y 2. la energía cinética. La masa por unidad de longitud de cada varilla es $\rho = 600$ g/m.



(a)

Solución

Preliminares

Debido a que la única componente distinta de cero del vector de velocidad angular es $\omega_y = \omega$, se observa de la ecuación (19.17a) que las componentes del vector de la cantidad de movimiento angular respecto al punto *C* se reducen a

$$h_x = -I_{xy}\omega \qquad h_y = I_y\omega \qquad h_z = -I_{zy}\omega \tag{a}$$

Debido a que el cuerpo rota respecto al eje *y* fijo, su energía cinética, de la ecuación (19.25), es

$$T = \frac{1}{2} I_y \omega^2 \tag{b}$$

En la siguiente tabla se muestran los cálculos de los momentos y productos de inercia requeridos en las ecuaciones (a) y (b). Observe que los resultados para el cuerpo se obtienen al sumar sólo las propiedades de las varillas 1 y 2, porque las propiedades inerciales relevantes de la varilla 3 son cero.

Parte 1

Al sustituir los momentos y productos de inercia para el punto *C* y $\omega = 30$ rad/s en la ecuación (a), las componentes del vector de la cantidad de movimiento angular respecto a *C* serán

$$h_x = -I_{xy}\omega = -(54.00 \times 10^{-4})(30) = -16.20 \times 10^{-2}\ \text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}$$
$$h_y = I_y\omega = (85.25 \times 10^{-4})(30) = 25.58 \times 10^{-2}\ \text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}$$
$$h_z = -I_{zy}\omega = -(-37.5 \times 10^{-4})(30) = 11.25 \times 10^{-2}\ \text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}$$

Por tanto, la magnitud de la cantidad de movimiento angular respecto a *C* es

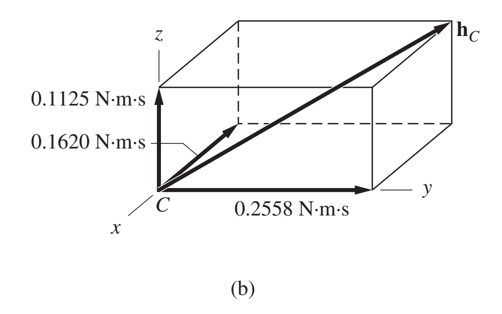
$$h_C = (10^{-2})\sqrt{(-16.20)^2 + (25.58)^2 + (11.25)^2}$$
$$= 32.3 \times 10^{-2}\ \text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}$$

Respuesta

	Varilla 1	Varilla 2	Totales
L	0.25 m	0.3 m	
$m = \rho L$	0.6(0.25) = 0.15 kg	0.6(0.3) = 0.18 kg	
$\bar{x}$	0	0.15 m	
$\bar{y}$	−0.2 m	0.2 m	
$\bar{z}$	0.125 m	0	
$I_y = \frac{1}{3}mL^2$	$\frac{1}{3}(0.15)(0.25)^2$ $= 0.003\,125\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$	$\frac{1}{3}(0.18)(0.3)^2$ $= 0.005\,40\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$	$0.008\,525\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$
$I_{xy} = m\bar{x}\bar{y}$	$0.15(0)(-0.2)$ $= 0$	$0.18(0.15)(0.2)$ $= 0.005\,40\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$	$0.005\,40\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$
$I_{zy} = m\bar{z}\bar{y}$	$0.15(0.125)(-0.2)$ $= -0.003\,75\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$	$0.18(0)(0.2)$ $= 0$	$-0.003\,75\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$

Cálculo de las propiedades inerciales en el punto C.

En la figura (b) se muestra el vector $\mathbf{h}_C$ y sus componentes.



(b)

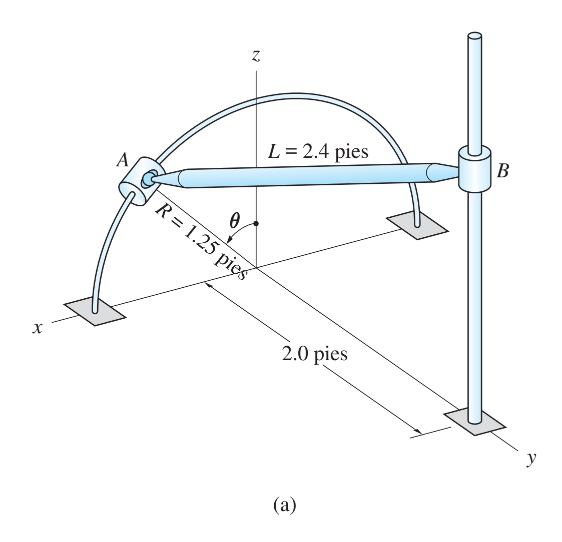
Parte 2

La energía cinética del cuerpo se encuentra al sustituir I_y y $\omega = 30$ rad/s en la ecuación (b), lo que da como resultado

$$T = \frac{1}{2}I_y\omega^2 = \frac{1}{2}(85.25 \times 10^{-4})(30)^2 = 3.84\ \text{J} \qquad \textit{Respuesta}$$

Problema de ejemplo 19.6

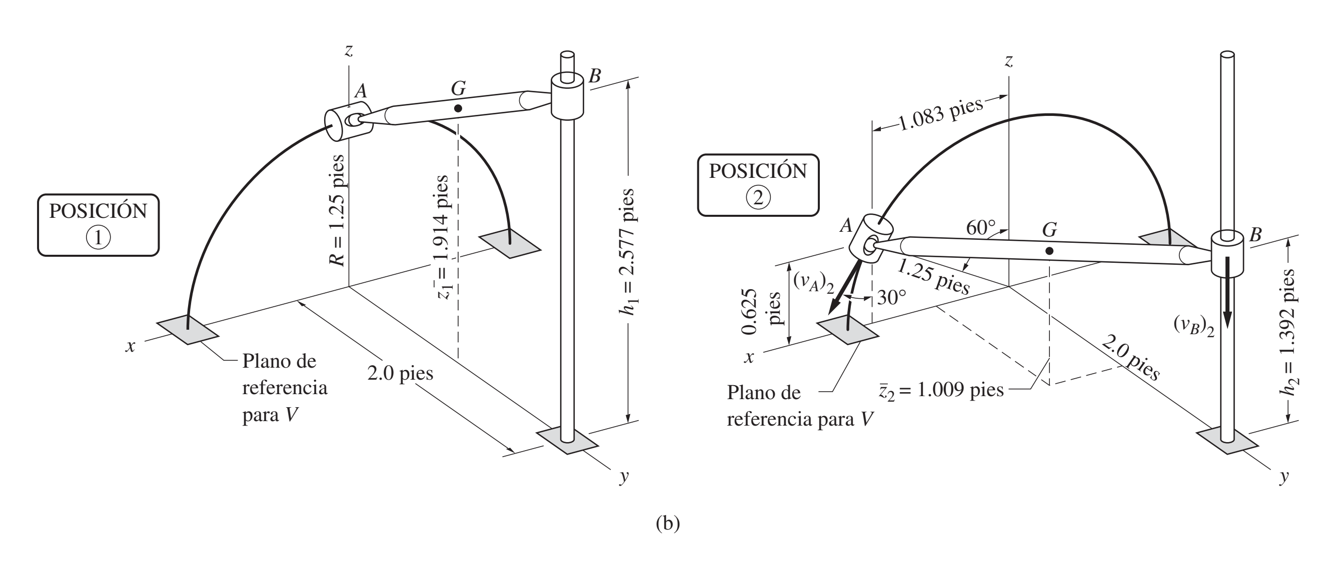
La varilla delgada uniforme AB que se muestra en la figura (a) tiene un peso $W = 16$ lb y longitud $L = 2.4$ pies. Los pesos de los collarines deslizantes A y B, a los que la varilla está conectada con rótulas esféricas, pueden despreciarse. Cuando el collarín A está en la posición $\theta = 0$, el sistema se desplaza ligeramente y se libera a partir del reposo. Despreciando la fricción, determine la rapidez de A cuando está en la posición $\theta = 60°$.



(a)

Solución

Este problema es adecuado para el método de análisis de trabajo-energía, porque se ocupa del cambio en la rapidez entre dos posiciones. Ya que el peso de la varilla, que es una fuerza conservativa, es la única fuerza que efectúa trabajo sobre el sistema, entonces la energía mecánica se conserva. Por tanto, puede aplicarse el principio de conservación de la energía mecánica: $T_1 + V_1 = T_2 + V_2$, donde T_1 y T_2 son las energías cinéticas inicial y final, y V_1 y V_2 son las energías potenciales gravitacionales inicial y final. La figura (b) muestra el plano de referencia que se ha elegido para la energía potencial V.



(b)

Posición 1

Energía potencial Refiriéndose a la posición 1 en la figura (b), la altura h_1 del collarín B sobre el plano de referencia debe satisfacer la relación geométrica $(h_1 - 1.25)^2 + (2.0)^2 = (2.4)^2$, que da $h_1 = 2.577$ pies. Por tanto, la altura del centro de masa G

es $\bar{z}_1 = (1.25 + 2.577)/2 = 1.914$ pies y la energía potencial inicial se convierte en

$$V_1 = W\bar{z}_1 = 16(1.914) = 30.62 \text{ lb} \cdot \text{pie} \tag{a}$$

Energía cinética Debido a que el sistema se libera desde el reposo, entonces $T_1 = 0$.

Posición 2

Energía potencial Cuando el sistema está en la posición 2 que se muestra en la figura (b), las coordenadas del collarín A son $x = 1.25$ sen $60° = 1.083$ pies, $y = 0$ y $z = 1.25$ cos $60° = 0.625$ pies. Con esos valores, la altura h_2 de B sobre el plano de referencia se obtiene de la relación geométrica $(1.083)^2 + (2)^2 + (h_2 - 0.625)^2 = (2.4)^2$, que da $h_2 = 1.392$ pies. La altura del centro de masa G sobre el plano de referencia es, por tanto, $\bar{z}_2 = (0.625 + 1.392)/2 = 1.009$ pies. De aquí resulta que la energía potencial gravitacional de la varilla es

$$V_2 = W\bar{z}_2 = 16(1.009) = 16.14 \text{ lb} \cdot \text{pie} \tag{b}$$

Análisis cinemático La finalidad del análisis cinemático es relacionar $\boldsymbol{\omega}_2$ (la velocidad angular de la varilla) y $\bar{\mathbf{v}}_2$ (la velocidad de su centro de masa) con $(\mathbf{v}_A)_2$ (la velocidad del collarín A). Se utiliza la ecuación de la velocidad relativa entre A y B:

$$(\mathbf{v}_B)_2 = (\mathbf{v}_A)_2 + \boldsymbol{\omega}_2 \times (\mathbf{r}_{B/A})_2 \tag{c}$$

donde $(\mathbf{v}_B)_2$ es la velocidad de B. El vector de posición de B relativo a A en la posición 2 es, de acuerdo con la figura (b), $(\mathbf{r}_{B/A})_2 = -1.083\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + (1.392 - 0.625)\mathbf{k} = -1.083\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 0.767\mathbf{k}$ pies. Otra vez, al referirse a la figura (b), se ve que $(\mathbf{v}_A)_2 = (v_A)_2$ sen $30°\mathbf{i} - (v_A)_2$ cos $30°\mathbf{k}$. Al expresar el vector de velocidad angular como $\boldsymbol{\omega}_2 = (\omega_x)_2\mathbf{i} + (\omega_y)_2\mathbf{j} + (\omega_z)_2\mathbf{k}$, la ecuación (c) queda así

$$\begin{aligned} -(v_B)_2\mathbf{k} &= (v_A)_2 \operatorname{sen} 30°\mathbf{i} - (v_A)_2 \cos 30°\mathbf{k} \\ &\quad + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ (\omega_x)_2 & (\omega_y)_2 & (\omega_z)_2 \\ -1.083 & 2 & 0.767 \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{d}$$

Al desarrollar el determinante en la ecuación (d) e igualar componentes, se tienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} 0 &= (v_A)_2 \operatorname{sen} 30° + 0.767(\omega_y)_2 - 2(\omega_z)_2 \\ 0 &= -0.767(\omega_x)_2 - 1.083(\omega_z)_2 \\ -(v_B)_2 &= -(v_A)_2 \cos 30° + 2(\omega_x)_2 + 1.083(\omega_y)_2 \end{aligned} \tag{e}$$

Si se anula la velocidad de giro de la varilla se obtiene una cuarta ecuación. Esto da $\boldsymbol{\omega}_2 \cdot (\mathbf{r}_{B/A})_2 = 0$, o $[(\omega_x)_2\mathbf{i} + (\omega_y)_2\mathbf{j} + (\omega_z)_2\mathbf{k}] \cdot (-1.083\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 0.767\mathbf{k}) = 0$, que es

$$-1.083(\omega_x)_2 + 2(\omega_y)_2 + 0.767(\omega_z)_2 = 0 \tag{f}$$

Las ecuaciones (e) y (f) pueden resolverse en términos de $(v_A)_2$, que da como resultado

$$\left.\begin{aligned}(\omega_x)_2 &= -0.2451(v_A)_2\\ (\omega_y)_2 &= -0.1993(v_A)_2\\ (\omega_z)_2 &= 0.1736(v_A)_2\end{aligned}\right\} \omega_2 = 0.3605(v_A)_2 \tag{g}$$

y

$$(v_B)_2 = 1.572(v_A)_2 \tag{h}$$

La relación entre $\bar{\mathbf{v}}_2$ y $(\mathbf{v}_A)_2$ podría encontrarse con la ecuación de la velocidad relativa $\bar{\mathbf{v}} = (\mathbf{v}_A)_2 + \boldsymbol{\omega}_2 \times (\mathbf{r}_{G/A})_2$ y la ecuación (g). Sin embargo, es más sencillo usar el hecho de que G es el punto medio de la varilla AB, de modo que su velocidad está dada por

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{v}}_2 &= \frac{1}{2}[(\mathbf{v}_A)_2 + (\mathbf{v}_B)_2]\\ &= \frac{1}{2}[(v_A)_2(\operatorname{sen} 30°\mathbf{i} - \cos 30°\mathbf{k}) - 1.572(v_A)_2\mathbf{k}]\\ &= (v_A)_2(0.250\mathbf{i} - 1.219\mathbf{j})\end{aligned}$$

de lo que se obtiene

$$\bar{v}_2^2 = 1.549(v_A)_2^2 \tag{i}$$

Energía cinética Como $\boldsymbol{\omega}_2$ es perpendicular a AB, la energía cinética de la varilla puede obtenerse de la ecuación (19.23):

$$T = \frac{1}{2}m\bar{v}^2 + \frac{1}{2}\bar{I}\omega_2^2$$

donde $\bar{I} = mL^2/12$ es el momento de inercia de la varilla respecto a un eje perpendicular a esta última (paralelo a $\boldsymbol{\omega}_2$) en G. Al sustituir los valores numéricos, se obtiene

$$\begin{aligned}T_2 &= \frac{1}{2}\left(\frac{16}{32.2}\right)(1.549)(v_A)_2^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{16}{32.2}\ \frac{(2.4)^2}{12}\right)\left[0.3605(v_A)_2\right]^2\\ &= (0.3848 + 0.0155)(v_A)_2^2 = 0.4003(v_A)_2^2\end{aligned} \tag{j}$$

Conservación de la energía mecánica

Al sustituir las ecuaciones (a), (b) y (j) en el principio de conservación,

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

se tiene

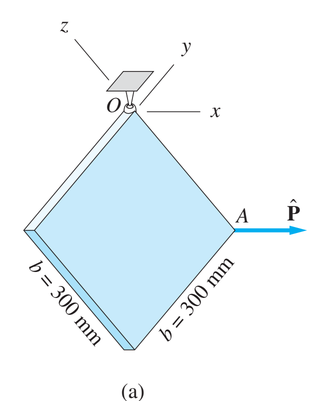
$$0 + 30.62 = 0.4003(v_A)_2^2 + 16.14$$

de la cual se encuentra que la rapidez de A en la posición 2 es

$$(v_A)_2 = 6.01 \text{ pies/s}$$ *Respuesta*

Problema de ejemplo 19.7

La figura (a) muestra una placa cuadrada homogénea de 2.0 kg que cuelga de una rótula esférica en *O*. La placa está en reposo cuando es golpeada por un martillo en *A*. La fuerza $\hat{\mathbf{P}}$ que se aplica al martillo es impulsiva, siendo su impulso $\int \hat{\mathbf{P}}\, dt = 1.20\mathbf{i}$ N · s. Determine la velocidad angular y la energía cinética de la placa inmediatamente después del impacto. Observe que el eje *x* es perpendicular a la placa y los ejes *y* y *z* están sobre los bordes de la misma.

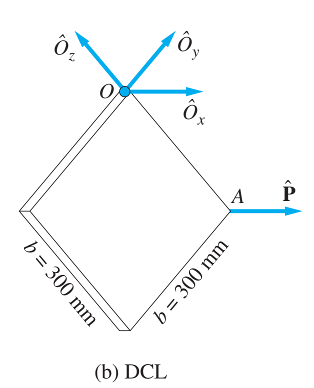


(a)

Solución

Como la fuerza es impulsiva es preciso analizar este problema con el método de impulso-cantidad de movimiento.

La figura (b) muestra el diagrama de cuerpo libre (DCL) de la placa durante el impacto. La duración de este último es despreciable, así la placa ocupa en esencia la misma posición espacial antes, durante y después del impacto. El DCL incluye la fuerza aplicada $\hat{\mathbf{P}}$ y las componentes de la reacción impulsiva en *O*. El peso de la placa se omite porque no es una fuerza impulsiva.



(b) DCL

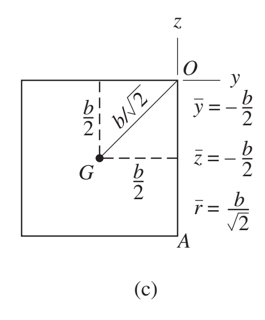
Recuerde que, para el movimiento impulsivo, el impulso angular respecto a cualquier punto es igual al cambio en la cantidad de movimiento angular del cuerpo respecto al mismo punto. En este caso, *O* es una elección conveniente como punto de referencia porque la reacción impulsiva pasa por ahí. Los subíndices 1 y 2 se refieren a los instantes inmediatamente antes y después del impacto, respectivamente, entonces el principio de impulso-cantidad de movimiento angular será

$$(\mathbf{A}_O)_{1-2} = (\mathbf{h}_O)_2 - (\mathbf{h}_O)_1 = (\mathbf{h}_O)_2 \qquad \text{(a)}$$

Observe que $(\mathbf{h}_O)_1 = \mathbf{0}$ porque la placa está en reposo antes del impacto.

Del DCL, se observa que el impulso angular (es decir, el momento del impulso lineal) respecto de *O* es

$$(\mathbf{A}_O)_{1-2} = \mathbf{r}_{A/O} \times \int \hat{\mathbf{P}}\, dt = -0.3\mathbf{k} \times 1.2\mathbf{i} = -0.36\mathbf{j} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s} \qquad \text{(b)}$$



(c)

Para determinar la cantidad de movimiento angular de la placa respecto al punto *O*, primero es preciso calcular las propiedades inerciales de la placa en ese punto. Los momentos de inercia centrales pueden obtenerse de la tabla 17.1 (hay que establecer que $a = 0$ porque la placa es delgada): $\bar{I}_x = (1/12)\text{m}(2b^2) = mb^2/6$ e $\bar{I}_y = \bar{I}_z = mb^2/12$. También, debido a la simetría, se tiene que $\bar{I}_{xy} = \bar{I}_{yz} = \bar{I}_{zx} = 0$. Ahora los momentos y productos de inercia respecto de *O* pueden calcularse con el teorema de los ejes paralelos y la figura (c):

$$I_x = \bar{I}_x + m\bar{r}^2 = \frac{mb^2}{6} + m\left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{2mb^2}{3}$$

$$I_y = \bar{I}_y + m\bar{z}^2 = \frac{mb^2}{12} + m\left(-\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{mb^2}{3}$$

$$I_z = \bar{I}_z + m\bar{y}^2 = \frac{mb^2}{12} + m\left(-\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{mb^2}{3}$$

$$I_{xy} = \bar{I}_{xy} + m\bar{x}\bar{y} = 0 + m(0)\left(-\frac{b}{2}\right) = 0$$

$$I_{yz} = \bar{I}_{yz} + m\bar{y}\bar{z} = 0 + m\left(-\frac{b}{2}\right)\left(-\frac{b}{2}\right) = \frac{mb^2}{4}$$

$$I_{zx} = \bar{I}_{zx} + m\bar{z}\bar{x} = 0 + m\left(-\frac{b}{2}\right)(0) = 0$$

Al sustituir $m = 2.0$ kg y $b = 0.300$ m resulta

$$I_x = \frac{2}{3}(2.0)(0.300)^2 = 0.1200 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_y = I_z = \frac{2.0(0.300)^2}{3} = 0.0600 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_{xy} = I_{zx} = 0$$

$$I_{yz} = \frac{2.0(0.300)^2}{4} = 0.0450 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

De las ecuaciones (19.17a) pueden obtenerse ahora las componentes de la cantidad de movimiento angular respecto de O, así

$$(\mathbf{h}_O)_2 = 0.12\omega_x\mathbf{i} + (0.06\omega_y - 0.045\omega_z)\mathbf{j} + (-0.045\omega_y + 0.06\omega_z)\mathbf{k} \qquad \text{(c)}$$

Al sustituir las ecuaciones (b) y (c) en la ecuación (a) e igualar las componentes, se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &= 0.12\omega_x \\ -0.36 &= 0.06\omega_y - 0.045\omega_z \\ 0 &= -0.045\omega_y + 0.06\omega_z \end{aligned} \qquad \text{(d)}$$

La solución de las ecuaciones (d) da

$$\boldsymbol{\omega} = -13.71\mathbf{j} - 10.29\mathbf{k} \text{ rad/s} \qquad \textit{Respuesta}$$

Debido a que O es un punto fijo, la energía cinética T_2 después del impacto puede calcularse con la ecuación (18.6b).

$$T_2 = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{h}_O = \frac{1}{2}(-13.71\mathbf{j} - 10.29\mathbf{k}) \cdot (-0.36\mathbf{j}) = 2.47 \text{ J} \qquad \textit{Respuesta}$$

Si se desea, las componentes de la reacción impulsiva en O podrían calcularse con las ecuaciones de impulso-cantidad de movimiento lineal.

Problemas

19.25 La varilla homogénea de masa m y longitud L mantiene el ángulo constante β con la horizontal conforme rota con velocidad angular ω respecto al eje vertical en su punto medio O. Para la posición que se muestra, deduzca: (a) la cantidad de movimiento angular de la varilla respecto de O y (b) la energía cinética de la varilla.

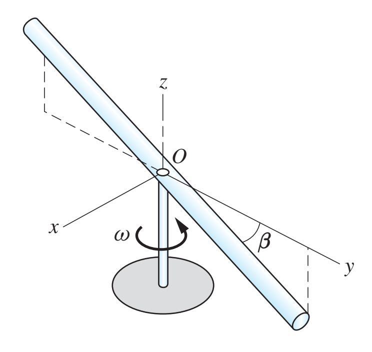


Fig. P19.25

19.26 Suponga que el impulso que actúa sobre la placa en el problema de ejemplo 19.7 se reemplaza por el impulso $\int \hat{\mathbf{P}}dt = 2.2\mathbf{i} + 1.4\mathbf{j} - 1.8\mathbf{k}$ N·s que actúa en el centro de la placa. Calcule la velocidad angular y la energía cinética de la placa inmediatamente después del impacto.

19.27 La manivela de 12 kg, que se formó de una delgada varilla uniforme, rota respecto al eje y con velocidad angular $\omega = 20$ rad/s en la dirección que se indica. Determine: (a) la cantidad de movimiento angular de la manivela respecto al punto O en la posición que se muestra y (b) la energía cinética de la manivela.

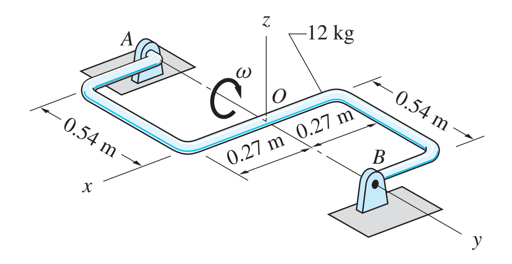


Fig. P19.27

19.28 El disco homogéneo de 12 kg rota respecto al eje y con velocidad angular $\omega_1 = 60$ rad/s. Al mismo tiempo, el ensamblado rota respecto al eje vertical en A con velocidad angular $\omega_2 = 20$ rad/s. Obtenga: (a) la cantidad de movimiento angular del disco respecto al punto O y (b) la energía cinética del disco.

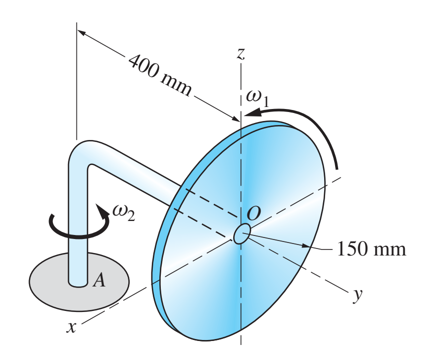


Fig. P19.28

19.29 Dos placas circulares delgadas, idénticas, de masa m están soldadas a un eje de masa despreciable. El ensamblado rota respecto al eje y con velocidad angular ω_0. Calcule la cantidad de movimiento angular del ensamblado respecto de: (a) el punto O y (b) el punto A.

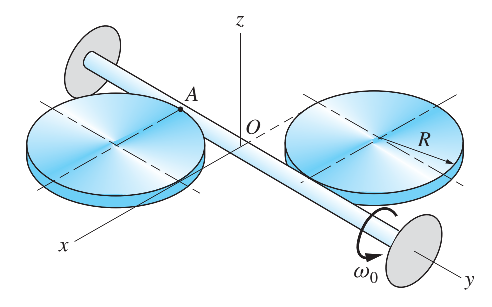


Fig. P19.29

19.30 La varilla delgada de 2 kg está conectada al disco uniforme A de 6 kg y al collarín deslizante en B mediante rótulas esféricas. La masa del collarín es despre-

ciable y el resorte unido al mismo tiene una rigidez de 2 kN/m. El ensamblado se libera a partir del reposo en la posición que se muestra, donde el resorte está estirado 100 mm. Calcule la velocidad angular del disco después de que ha rotado 180º.

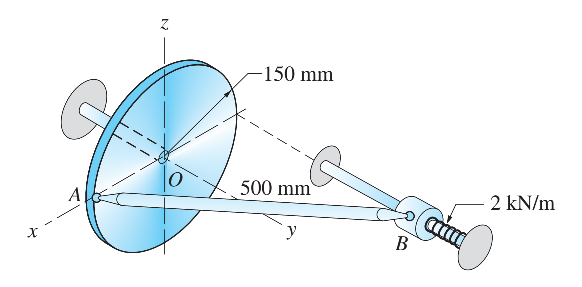


Fig. P19.30

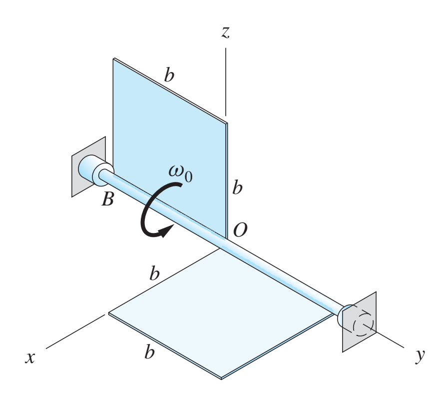
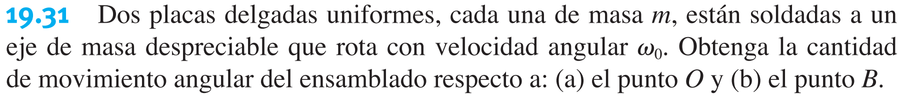
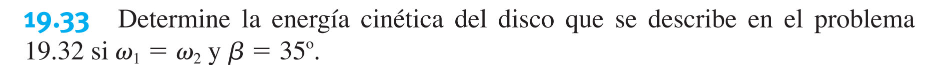


Fig. P19.31



19.31 Dos placas delgadas uniformes, cada una de masa *m*, están soldadas a un eje de masa despreciable que rota con velocidad angular ω_0. Obtenga la cantidad de movimiento angular del ensamblado respecto a: (a) el punto *O* y (b) el punto *B*.

19.32 El disco delgado uniforme de masa *m* y radio *R* rota respecto al eje doblado *OG* con rapidez angular ω_2. Al mismo tiempo, éste rota respecto al eje *z* con rapidez angular ω_1. Si el ángulo entre la parte doblada del eje y *z* es $\beta = 35º$, encuentre la razón ω_2/ω_1 de manera que la cantidad de movimiento angular del disco respecto a su centro de masa *G* sea paralelo al eje *z*.



19.33 Determine la energía cinética del disco que se describe en el problema 19.32 si $\omega_1 = \omega_2$ y $\beta = 35º$.

19.34 El disco delgado uniforme de 12 lb gira respecto al eje *OG* conforme rueda sin deslizarse sobre el plano horizontal. El extremo *O* del eje está soldado a un collarín deslizante que rota respecto a la varilla vertical fija con velocidad angular constante de 6 rad/s. Calcule la cantidad de movimiento angular del disco respecto al punto *O*.

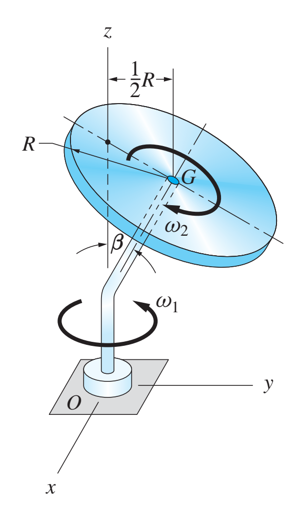


Fig. P19.32, P19.33

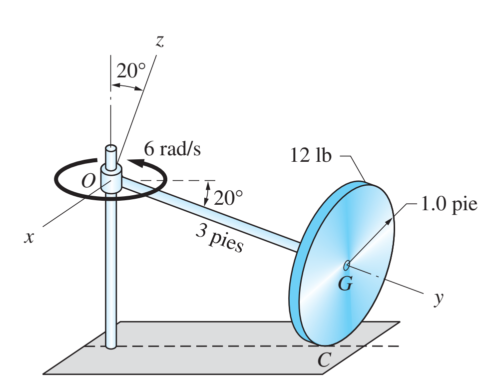


Fig. P19.34

19.35 La varilla delgada uniforme *AB* de 12 kg está conectada a collarines deslizantes en *A* y *B* mediante rótulas esféricas. En la posición que se muestra, la velocidad del collarín *A* es $v_A = 1.4$ m/s. Para esta posición, calcule: (a) la cantidad de movimiento angular de la varilla respecto a su centro de masa y (b) la energía cinética de la varilla.

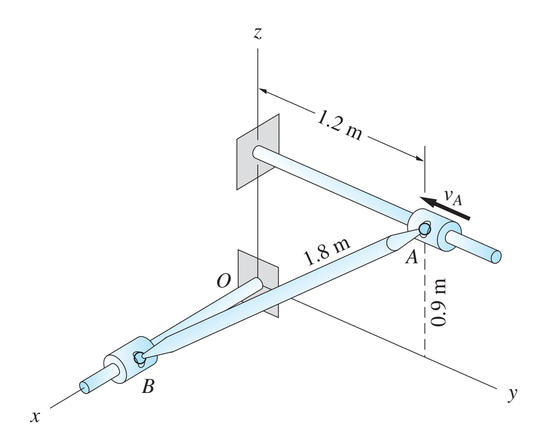


Fig. P19.35

19.36 La barra delgada AB de longitud L y masa m está suspendida de dos cuerdas, cada una de longitud L. Si la barra parte del reposo cuando $\theta = 90^o$, encuentre su máxima velocidad angular.

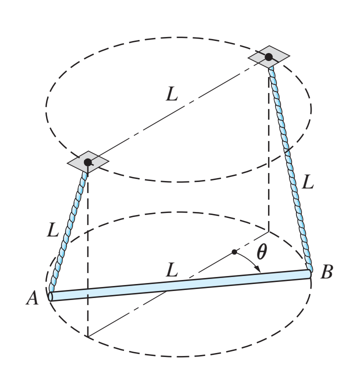


Fig. P19.36

19.37 El disco delgado uniforme de radio $R = 6$ pulg y peso de 14 lb está unido al eje doblado OAB de peso despreciable. Dicho eje está unido a otro vertical en O mediante una horquilla. El sistema está en reposo cuando se aplica al eje doblado un par constante $\mathbf{C}_0 = 0.35\mathbf{k}$ lb · pie. Si se supone que el disco rueda sin deslizarse, determine la velocidad angular ω_1 del eje OAB después de dar dos revoluciones. Desprecie la fricción en los cojinetes en O y B.

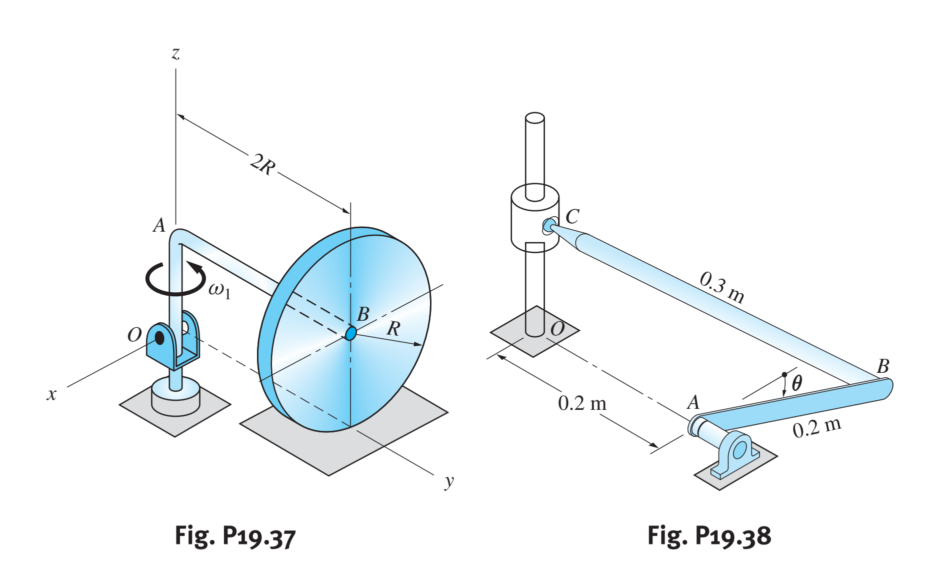


Fig. P19.37

Fig. P19.38

19.38 El mecanismo consta de dos barras delgadas homogéneas AB y BC de masas 1.8 kg y 1.2 kg, respectivamente, y el deslizador C de 2 kg. Las conexiones en B y C son rótulas esféricas. Si el mecanismo se libera a partir del reposo en $\theta = 0$, obtenga la velocidad angular de la barra AB cuando $\theta = 90^o$. Desprecie la fricción.

19.39 El borde delgado del volante de inercia C pesa 15 lb, y los pesos de los rayos y el centro son despreciables. El volante está unido al deslizador B de 5 lb mediante la varilla conectora AB de 3 lb. Las uniones en A y B son rótulas esféricas. Una fuerza constante $P = 60$ lb actúa sobre el deslizador B como se muestra. Si el volante tiene una velocidad angular $\omega = 20$ rad/s en la posición que se muestra, calcule su velocidad angular cuando la junta A llega a la posición A'. Desprecie la fricción.

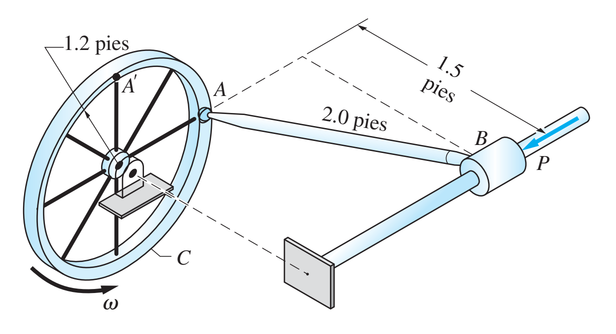


Fig. P19.39

19.40 La varilla uniforme doblada de masa m cuelga de un cable en O cuando recibe el impulso $\mathbf{k} \int \hat{P}\, dt$ en A. Deduzca la expresión para la velocidad angular de la varilla inmediatamente después del impacto.

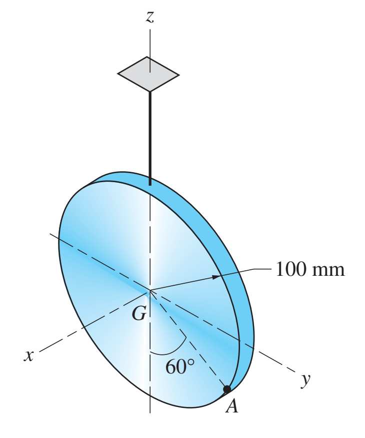


Fig. P19.41

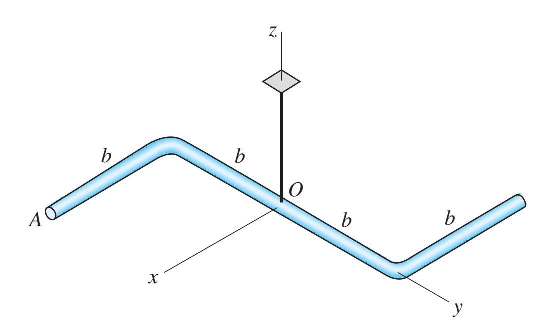


Fig. P19.40

19.41 La placa circular delgada de 1.2 kg, con espesor uniforme, está suspendida del cable. La placa está en reposo cuando recibe un repentino impulso de $-0.15\mathbf{i}$ N · s en el punto A sobre el borde del disco. Determine lo siguiente en el instante después del impacto: (a) la velocidad del centro de masa G y (b) la energía cinética de la placa.

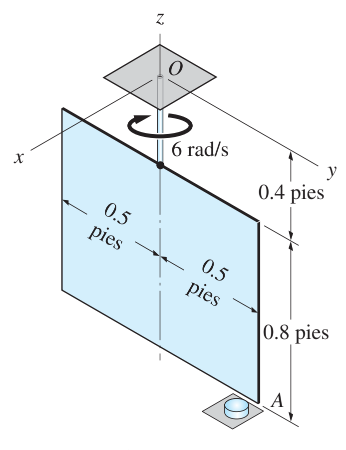


Fig. P19.42

19.42 Una varilla de 0.4 pies de masa despreciable está soldada a la placa delgada uniforme de 3.2 lb y suspendida de la rótula esférica en O. El ensamblado rota respecto al eje z con rapidez angular de 6 rad/s cuando el vértice A de la placa golpea una obstrucción rígida. Si se supone que A no rebota, determine la velocidad angular del ensamblado inmediatamente después del impacto.

19.43 La caja uniforme de masa m cae con una rapidez de 8 pies/s sin velocidad angular cuando el vértice O golpea una obstrucción rígida. Suponga impacto plásti-

co (es decir, no hay rebote), determine: (a) la velocidad angular de la caja inmediatamente después del impacto y (b) el porcentaje de energía cinética perdida durante el impacto.

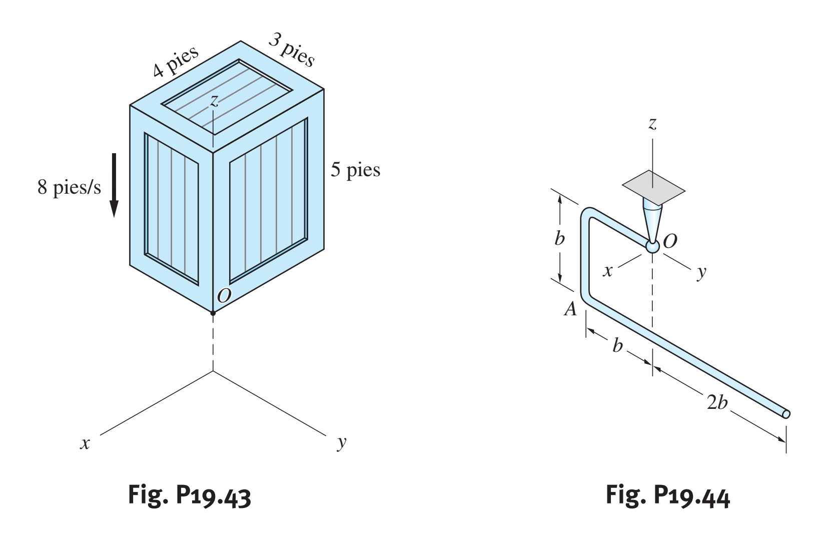


Fig. P19.43

Fig. P19.44

19.44 El alambre uniforme doblado de masa total m está suspendido de una rótula esférica en O. El alambre se encuentra estacionario cuando se aplica un breve impacto en el vértice A en la dirección x. Obtenga el vector unitario en la dirección del eje instantáneo de rotación inmediatamente después de recibir el impulso.

19.45 La varilla delgada AB de masa m y longitud L está unida a un eje vertical mediante una horquilla. El eje rota libremente con rapidez angular ω cuando la cuerda, que mantiene el ángulo $\beta = \beta_1$ entre la varilla y el eje, se rompe. Determine las expresiones para ω y $d\beta/dt$ cuando la varilla llega a la posición $\beta = 90°$.

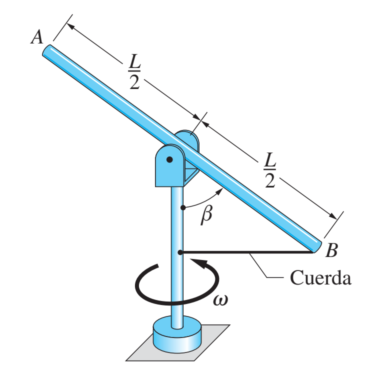


Fig. P19.45

*19.5 Método de fuerza-masa-aceleración

a. Ecuaciones de movimiento

El movimiento tridimensional de un cuerpo rígido está regido por las mismas ecuaciones básicas que se usaron para los sistemas de partículas del capítulo 15. Así, la ecuación de la fuerza

$$\Sigma \mathbf{F} = m\bar{\mathbf{a}} \qquad \text{(15.19, repetida)}$$

determina el movimiento del centro de masa del cuerpo, donde $\Sigma\mathbf{F}$ es la suma de las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo, m es la masa del mismo (que se supone es constante) y $\bar{\mathbf{a}}$ es la aceleración de su centro de masa. El movimiento de rotación del cuerpo está determinado por la ecuación de momento

$$\Sigma \mathbf{M}_A = \dot{\mathbf{h}}_A \quad (A\text{: punto fijo o centro de masa}) \qquad \text{(15.35, repetida)}$$

donde $\Sigma\mathbf{M}_A$ es el momento resultante de las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo y $\mathbf{h}_A$ es la cantidad de movimiento angular del cuerpo respecto al punto A. La

última debe ser un punto en el cuerpo que es *fijo en el espacio* o el *centro de masa* del cuerpo. (Es preciso recordar esta restricción para A; por brevedad, no se mencionará continuamente.)

Al utilizar la ecuación (15.35) puede usarse cualquier marco de referencia conveniente para describir el vector de la cantidad de movimiento angular $\mathbf{h}_A$. Por ejemplo, si $\mathbf{\Omega}$ es la velocidad angular de tal sistema de referencia, la ecuación de movimiento asociada con el momento puede escribirse como

$$\Sigma \mathbf{M}_A = \frac{d\mathbf{h}_A}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{h}_A}{dt}\right)_{/xyz} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{h}_A \tag{19.29}$$

donde la notación "$/xyz$" indica que la derivada de $\mathbf{h}_A$ se ha evaluado en relación con el marco de referencia xyz.

La elección del marco de referencia debería ser tal que $(d\mathbf{h}_A/dt)_{/xyz}$ pueda evaluarse fácilmente. En particular, se desea evitar la evaluación de las derivadas temporales de momentos y productos de inercia. Es posible evitar esas complicaciones haciendo que los ejes xyz sean un *marco anclado*, es decir, un marco de referencia que está inmerso en el cuerpo (tiene la misma velocidad angular que el cuerpo). Si $\boldsymbol{\omega}$ es la velocidad angular del cuerpo, entonces para un marco anclado se tiene que $\mathbf{\Omega} = \boldsymbol{\omega}$. En consecuencia, la ecuación de momento, ecuación (19.29), queda

$$\Sigma \mathbf{M}_A = \frac{d\mathbf{h}_A}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{h}_A}{dt}\right)_{/xyz} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h}_A \tag{19.30}$$

De acuerdo con las ecuaciones (19.17a), las componentes de la cantidad de movimiento angular respecto a un punto fijo, o respecto al centro de masa, son

$$\begin{aligned} h_x &= I_x\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z \\ h_y &= -I_{yx}\omega_x + I_y\omega_y - I_{yz}\omega_z \\ h_z &= -I_{zx}\omega_x - I_{zy}\omega_y + I_z\omega_z \end{aligned} \tag{19.31}$$

Si los ejes xyz constituyen un marco anclado, entonces los momentos y productos de inercia no varían con el tiempo y la ecuación (19.30) implica

$$\begin{aligned} \Sigma \mathbf{M}_A = {} & (I_x\dot{\omega}_x - I_{xy}\dot{\omega}_y - I_{xz}\dot{\omega}_z)\mathbf{i} \\ & + (-I_{yx}\dot{\omega}_x + I_y\dot{\omega}_y - I_{yz}\dot{\omega}_z)\mathbf{j} \\ & + (-I_{zx}\dot{\omega}_x - I_{zy}\dot{\omega}_y + I_z\dot{\omega}_z)\mathbf{k} \\ & + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ h_x & h_y & h_z \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Al sustituir las componentes de la cantidad de movimiento angular de acuerdo con las ecuaciones (19.31) y desarrollar el determinante (recuerde también que $I_{xy} = I_{yx}$,

$I_{yz} = I_{zy}$ e $I_{xz} = I_{zx}$), las componentes escalares de las ecuaciones de momento son

$$
\begin{aligned}
\Sigma M_x &= I_x\dot{\omega}_x + \omega_y\omega_z(I_z - I_y) + I_{xy}(\omega_z\omega_x - \dot{\omega}_y) \\
&\quad - I_{xz}(\dot{\omega}_z + \omega_x\omega_y) - I_{yz}(\omega_y^2 - \omega_z^2) \\
\Sigma M_y &= I_y\dot{\omega}_y + \omega_z\omega_x(I_x - I_z) + I_{yz}(\omega_x\omega_y - \dot{\omega}_z) \\
&\quad - I_{xy}(\dot{\omega}_x + \omega_z\omega_y) - I_{xz}(\omega_z^2 - \omega_x^2) \\
\Sigma M_z &= I_z\dot{\omega}_z + \omega_x\omega_y(I_y - I_x) + I_{xz}(\omega_y\omega_z - \dot{\omega}_x) \\
&\quad - I_{yz}(\dot{\omega}_y + \omega_x\omega_z) - I_{xy}(\omega_x^2 - \omega_y^2)
\end{aligned}
\tag{19.32}
$$

Las ecuaciones (19.32) son diferenciales no lineales de primer orden muy difíciles de resolver analíticamente, excepto para algunos casos especiales.

b. Ecuaciones de Euler

Las ecuaciones de momento se simplifican un poco si *xyz* se eligen como los *ejes principales de inercia* en el punto de referencia. Entonces los productos de inercia se anulan y las ecuaciones (19.32) se reducen a

$$
\begin{aligned}
\Sigma M_x &= I_x\dot{\omega}_x + \omega_y\omega_z(I_z - I_y) \\
\Sigma M_y &= I_y\dot{\omega}_y + \omega_z\omega_x(I_x - I_z) \\
\Sigma M_z &= I_z\dot{\omega}_z + \omega_x\omega_y(I_y - I_x)
\end{aligned}
\tag{19.33}
$$

Estas ecuaciones, que se conocen como *ecuaciones de Euler*, están entre las más útiles en la dinámica de los cuerpos rígidos. Cuando se utilizan las ecuaciones (19.33), hay que recordar que los ejes *xyz* son un marco anclado y coinciden con los ejes principales de inercia en el punto de referencia (punto fijo o centro de masa).

Si se conocen la velocidad angular del cuerpo y su derivada temporal, entonces el momento externo resultante aplicado al cuerpo puede calcularse en forma rutinaria con las ecuaciones (19.33). Sin embargo, si se conoce el momento resultante, las ecuaciones deben integrarse para encontrar las velocidades angulares, una tarea que debe efectuarse numéricamente en la mayoría de los problemas. Una excepción es el caso especial donde la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ es constante, cuando las ecuaciones (19.33) toman la forma de ecuaciones algebraicas en vez de diferenciales.

c. Ecuaciones de Euler modificadas

Un problema importante en dinámica es el movimiento de un cuerpo rígido con *simetría axial*, como un trompo en rotación o un giroscopio. Considere un cuerpo que tiene un eje de simetría de rotación y establezca que uno de los ejes de coordenadas esté inmerso en el cuerpo de modo que siempre coincida con el eje de simetría. Permita que los ejes de coordenadas roten con una velocidad angular diferente a la del cuerpo. Ya que sólo uno de estos últimos está inmerso en el cuerpo, los ejes no son un marco anclado. Sin embargo, debido a la simetría del cuerpo, cada uno de los ejes de coordenadas siempre será uno principal de inercia.

Como una ilustración, considere el trompo con simetría axial de la figura 19.10, donde *z* se seleccionó como el eje de simetría. Se ve que, sin importar cómo gire el

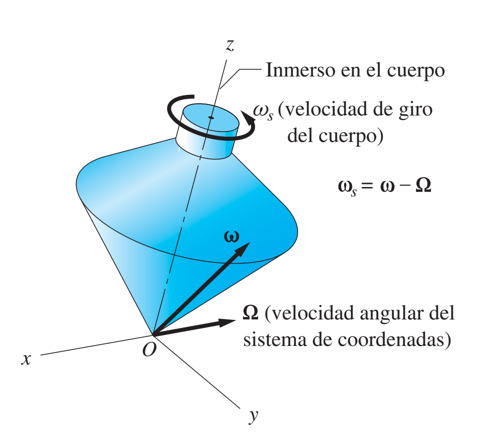


Fig. 19.10

sistema de coordenadas, *xyz* siempre serán los ejes principales de inercia en el punto O si el eje z permanece inmerso en el cuerpo.

Como antes, sean $\mathbf{\Omega} = \Omega_x\mathbf{i} + \Omega_y\mathbf{j} + \Omega_z\mathbf{k}$ la velocidad angular del marco de referencia *xyz*, y $\boldsymbol{\omega} = \omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k}$ la velocidad angular del cuerpo. Esas velocidades angulares difieren en la velocidad angular del cuerpo relativa al marco *xyz*, llamada *velocidad de giro*. El vector de velocidad de giro será paralelo al eje que está inmerso en el cuerpo, es decir, el eje de simetría. Por ejemplo, si z es el eje de simetría del cuerpo, como en la figura 19.10, la velocidad de giro es $\boldsymbol{\omega}_s = \omega_s\mathbf{k}$. En consecuencia, $\omega_x = \Omega_x$, $\omega_y = \Omega_y$, y $\omega_z = \Omega_z + \omega_s$.

La ecuación de movimiento del momento dada en la ecuación (19.29) es

$$\Sigma\mathbf{M}_A = \left(\frac{d\mathbf{h}_A}{dt}\right)_{/xyz} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{h}_A \qquad \text{(19.29, repetida)}$$

Ya que *xyz* son los ejes principales, las componentes de la cantidad de movimiento angular del cuerpo respecto al punto de referencia A (punto fijo o centro de masa) son

$$h_x = I_x\omega_x \qquad h_y = I_y\omega_y \qquad h_z = I_z\omega_z \qquad \text{(a)}$$

Entonces el producto cruz en la ecuación (19.29) queda

$$\mathbf{\Omega} \times \mathbf{h}_A = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \Omega_x & \Omega_y & \Omega_z \\ I_x\omega_x & I_y\omega_y & I_z\omega_z \end{vmatrix} \qquad \text{(b)}$$

Al emplear las ecuaciones (a) y (b) y el hecho de que los momentos de inercia son independientes del tiempo, las componentes escalares de la ecuación (19.29) son

$$\begin{aligned} \Sigma M_x &= I_x\dot{\omega}_x + I_z\Omega_y\omega_z - I_y\Omega_z\omega_y \\ \Sigma M_y &= I_y\dot{\omega}_y - I_z\Omega_x\omega_z + I_x\Omega_z\omega_x \\ \Sigma M_z &= I_z\dot{\omega}_z + I_y\Omega_x\omega_y - I_x\Omega_y\omega_x \end{aligned} \qquad \text{(19.34)}$$

Estas ecuaciones reciben el nombre de *ecuaciones de Euler modificadas*. Observe que los momentos ΣM_x, ΣM_y, y ΣM_z están referidos a los ejes *xyz*, que no representan un marco anclado.

d. *Una nota sobre la aceleración angular*

Los términos $\dot{\omega}_x$, $\dot{\omega}_y$ y $\dot{\omega}_z$ que aparecen en las diversas ecuaciones de momento no son necesariamente las componentes del vector de aceleración angular del cuerpo. Con el fin de clarificar este enunciado, primero considere el caso en que los ejes *xyz* son un marco anclado y entonces examine la situación cuando el cuerpo gire en relación con el marco *xyz*.

1. Los ejes *xyz* forman un marco anclado: $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}$ (ecuaciones de Euler).

Recuerde que la derivada absoluta de un vector **V** es $(d\mathbf{V}/dt) = (d\mathbf{V}/dt)_{/xyz} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}$, donde $\boldsymbol{\omega}$ es la velocidad angular del marco *xyz*. Por tanto, la derivada absoluta del vector de velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ (es decir, la aceleración angular) del cuerpo será

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\right)_{/xyz} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} = \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\right)_{/xyz}$$

Este resultado significa que la derivada absoluta del vector de velocidad angular es idéntica a su derivada relativa al marco anclado. Se deduce que si $\boldsymbol{\omega} = \omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k}$, entonces

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\omega}_x\mathbf{i} + \dot{\omega}_y\mathbf{j} + \dot{\omega}_z\mathbf{k}$$

que da

$$(\dot{\boldsymbol{\omega}})_x = \dot{\omega}_x \qquad (\dot{\boldsymbol{\omega}})_y = \dot{\omega}_y \qquad (\dot{\boldsymbol{\omega}})_z = \dot{\omega}_z \tag{19.35}$$

Por tanto, $\dot{\omega}_x$, $\dot{\omega}_y$ y $\dot{\omega}_z$ son las componentes de la aceleración angular $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ del cuerpo, una conclusión que puede ser muy útil al aplicar las ecuaciones de Euler.

2. El cuerpo gira en relación con los ejes *xyz*: $\boldsymbol{\Omega} \neq \boldsymbol{\omega}$ (ecuaciones de Euler modificadas).

En este caso, el vector de aceleración angular del cuerpo queda $d\boldsymbol{\omega}/dt = (d\boldsymbol{\omega}/dt)_{/xyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\omega}$, que puede escribirse en la forma

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\omega}_x\mathbf{i} + \dot{\omega}_y\mathbf{j} + \dot{\omega}_z\mathbf{k} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \Omega_x & \Omega_y & \Omega_z \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{vmatrix}$$

Al desarrollar el determinante anterior e igualar componentes se obtiene

$$\begin{aligned} (\dot{\boldsymbol{\omega}})_x &= \dot{\omega}_x + (\Omega_y\omega_z - \Omega_z\omega_y) \\ (\dot{\boldsymbol{\omega}})_y &= \dot{\omega}_y - (\Omega_x\omega_z - \Omega_z\omega_x) \\ (\dot{\boldsymbol{\omega}})_z &= \dot{\omega}_z + (\Omega_x\omega_y - \Omega_y\omega_x) \end{aligned} \tag{19.36}$$

Aquí se ve que las componentes del vector de aceleración angular $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ no son iguales a las derivadas temporales de ω_x, ω_y y ω_z.

e. *Movimiento en un plano*

Sean los ejes *xyz* un marco anclado con el eje *z* que permanece perpendicular a un plano fijo. En este caso, $\boldsymbol{\omega} = \omega_z \mathbf{k}$ y $\omega_x = \omega_y = 0$ y las ecuaciones de momento, ecuaciones (19.32), quedan

$$\begin{aligned} \Sigma M_x &= -I_{xz}\dot{\omega}_z + I_{yz}\omega_z^2 \\ \Sigma M_y &= -I_{yz}\dot{\omega}_z - I_{xz}\omega_z^2 \\ \Sigma M_z &= I_z\dot{\omega}_z \end{aligned} \tag{19.37}$$

Si, además, *z* es un eje principal de inercia del cuerpo, esas ecuaciones se simplifican aun más:

$$\Sigma M_x = 0 \qquad \Sigma M_y = 0 \qquad \Sigma M_z = I_z\dot{\omega}_z \tag{19.38}$$

Éstas son idénticas a las ecuaciones de momento para el movimiento en un plano que se discutieron en el capítulo 17.

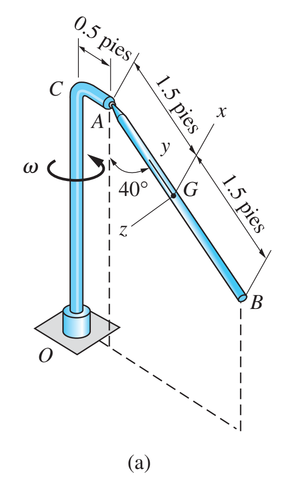
f. *Rotación respecto a un eje fijo*

Las ecuaciones (19.37) y (19.38) también son, por supuesto, válidas para el caso especial en que un cuerpo rota respecto a un eje que está fijo en el espacio. Es instructivo considerar el caso de un cuerpo montado sobre un eje que se apoya en un cojinete en cada extremo. Haciendo que el eje coincida con el eje *z*, que se supone que está fijo en el espacio y que el cuerpo rota con rapidez angular *constante* ω_z. Si los ejes anclados *xyz* no son ejes principales de inercia, las ecuaciones (19.37) dan (con $\dot{\omega}_z = 0$):

$$\Sigma M_x = I_{yz}\omega_z^2 \qquad \Sigma M_y = -I_{xz}\omega_z^2 \qquad \Sigma M_z = 0 \tag{19.39}$$

En este caso, se observa que las reacciones en los dos cojinetes deben proporcionar los momentos ΣM_x y ΣM_y. Esas reacciones, que rotan con el marco de referencia *xyz* (es decir, con el cuerpo), se llaman *reacciones dinámicas del cojinete*, y se dice que el cuerpo está *dinámicamente desbalanceado*. Como las reacciones dinámicas del cojinete son proporcionales al cuadrado de la rapidez angular, pueden alcanzar grandes magnitudes y causar severas vibraciones del cuerpo. Para balancear dinámicamente al cuerpo, los productos de inercia en la ecuación (19.39) deben eliminarse. Es posible lograr esto al redistribuir la masa del cuerpo o agregarle masa en lugares apropiados. Un ejemplo común del último método es añadir pequeños pesos al borde de la rueda de un automóvil para que realice “giros balanceados”.

Problema de ejemplo 19.8



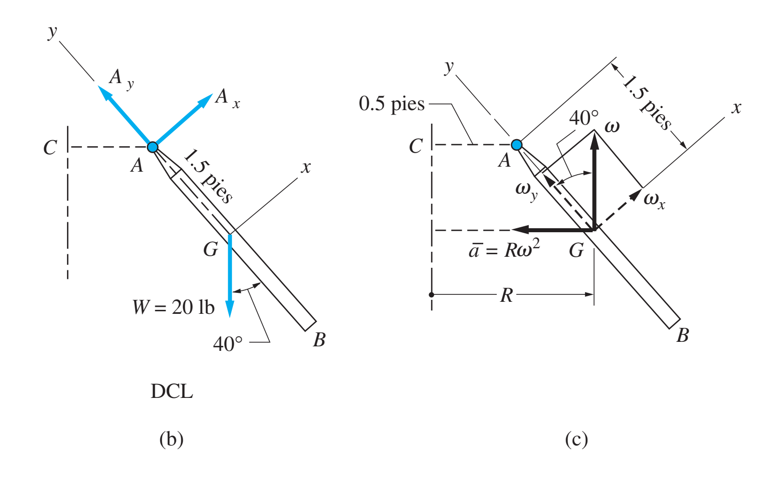
(a)

La barra delgada uniforme *AB* en la figura (a) pesa 20 lb. Está conectada al eje vertical *OC* mediante una rótula esférica en *A*. El ensamblado rota con velocidad angular constante ω, respecto de *OC*, lo que causa que *AB* esté inclinado 40º con la vertical. Determine ω y la magnitud de la reacción en *A*.

Solución

En esta solución se usará el sistema de coordenadas *xyz* que se muestra en la figura (a). Este marco de referencia está inmerso en la barra *AB* con el origen ubicado en el centro de masa *G* de la barra. Los ejes *x* y *z* son perpendiculares a la barra (el eje *x* está en el plano *CAB*), mientras que *y* está dirigido a lo largo de la barra. Por tanto los ejes de coordenadas son los ejes principales de la barra en *G*.

En la figura (b) se muestra el diagrama de cuerpo libre de la barra, mostrando sólo las fuerzas que actúan en el plano *xy*. Las únicas fuerzas que actúan sobre la barra son su peso de 20 lb y las reacciones de la rótula esférica en *A* (la componente A_z es perpendicular a la página).



(b) (c)

En la figura (c) se muestra la cinemática de la barra. Se observa que las componentes del vector de velocidad angular de la barra son

$$\omega_x = \omega \text{ sen } 40^\circ = 0.6428\omega \qquad \omega_y = \omega \cos 40^\circ = 0.7660\omega \qquad \omega_z = 0$$

También se observa que la trayectoria de *G* es un círculo horizontal de radio $R = 0.5 + 1.5 \text{ sen } 40^\circ = 1.4642$ pies. Por tanto, la aceleración de *G* es $\bar{a} = R\omega^2 = 1.4642\omega^2$, dirigida como se indica en la figura (c).

Al referirse a las figuras (b) y (c), las ecuaciones del movimiento asociadas con la fuerza son

$$\Sigma F_x = m\bar{a}_x \quad \overset{+}{\nearrow} \quad A_x - W \text{ sen } 40^\circ = -mR\omega^2 \cos 40^\circ$$

$$A_x - 20 \text{ sen } 40^\circ = -\frac{20}{32.2}(1.4642)\omega^2 \cos 40^\circ$$

$$A_x = 12.856 - 0.6967\omega^2 \text{ lb} \qquad \text{(a)}$$

$$\Sigma F_y = m\bar{a}_y \quad \nwarrow^{+} \quad A_y - W\cos 40° = mR\omega^2 \operatorname{sen} 40°$$

$$A_y - 20\cos 40° = \frac{20}{32.2}(1.4642)\omega^2 \operatorname{sen} 40°$$

$$A_y = 15.321 + 0.5846\omega^2 \text{ lb} \tag{b}$$

$$\Sigma F_z = m\bar{a}_z \qquad A_z = 0 \tag{c}$$

Para las ecuaciones de momento del movimiento, se usan las de Euler en las ecuaciones (19.33). Los momentos principales de inercia en G son

$$I_x = I_z = \frac{mL^2}{12} = \frac{20(3)^2}{32.2(12)} = 0.4658 \text{ slug} \cdot \text{pie}^2 \qquad I_y \approx 0$$

Como $\dot{\omega}_x = \dot{\omega}_y = \dot{\omega}_z = \omega_z = 0$ y debido a que no existen momentos que actúan respecto a los ejes x o y, entonces las primeras dos ecuaciones de Euler,

$$\Sigma M_x = I_x\dot{\omega}_x + \omega_y\omega_z(I_z - I_y)$$
$$\Sigma M_y = I_y\dot{\omega}_y + \omega_z\omega_x(I_x - I_z)$$

son trivialmente satisfechas (cada una se reduce a $0 = 0$). La tercera ecuación de Euler es

$$\Sigma M_z = I_z\dot{\omega}_z + \omega_x\omega_y(I_y - I_x)$$
$$-1.5A_x = 0 + (0.6428\omega)(0.7660\omega)(0 - 0.4658)$$
$$A_x = 0.15290\omega^2 \tag{d}$$

La solución de las ecuaciones (a) y (d) es $A_x = 2.31$ lb y

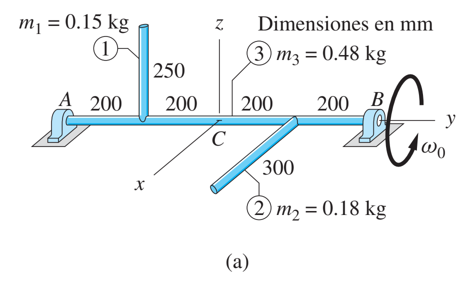
$$\omega = 3.89 \text{ rad/s}$$ *Respuesta*

Al sustituir este resultado en la ecuación (b) y resolver para A_y resulta que $A_y = 24.17$ lb. Por tanto, la magnitud de la reacción en A es

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} = \sqrt{(2.31)^2 + (24.17)^2 + 0} = 24.3 \text{ lb}$$ *Respuesta*

Problema de ejemplo **19.9**

La figura (a) muestra un cuerpo que está formado por tres varillas uniformes soldadas, etiquetadas 1, 2 y 3, cada una con la masa que se muestra. (Este cuerpo también se presentó en el problema de ejemplo 19.5). Se apoya en cojinetes lisos en A y B; sólo el cojinete en A puede proporcionar un empuje axial. Un pequeño motor en A (que no se muestra) imprime al cuerpo una velocidad angular constante ω_0 rad/s. Para la posición que se muestra en la figura (a), determine: 1. el par de torsión T de salida; 2. las reacciones de los cojinetes en A y B, y 3. las reacciones dinámicas de los cojinetes (las causadas por la rotación del cuerpo).

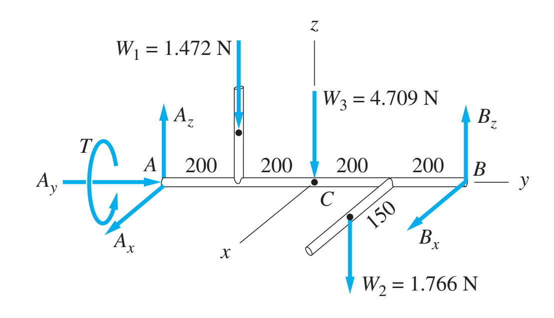


(a)

Solución

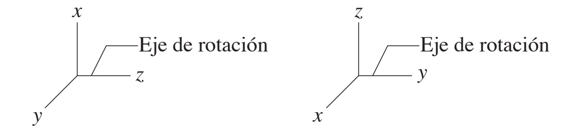
Parte 1

El diagrama de cuerpo libre del cuerpo, que se muestra en la figura (b), presenta las reacciones de los cojinetes en *A* y *B*; el peso de cada varilla: $W_1 = 0.15(9.81) = 1.472$ N, $W_2 = 0.18(9.81) = 1.766$ N, $W_3 = 0.48(9.81) = 4.709$ N; y el par de torsión *T* de salida del motor requerido para mantener al cuerpo a una velocidad angular constante. El origen del marco de referencia *xyz*, que se supone rota con el cuerpo, está unido a *C*, el punto medio de la varilla 3.



(b) DCL

Ya que la rotación ocurre respecto a un eje fijo, es posible utilizar las ecuaciones (19.39); sin embargo, primero deben convertirse, de rotación respecto al eje *z*, que se aceptó en su deducción, a rotación respecto al eje *y*. Esta conversión se realiza con la ayuda del siguiente diagrama.



En este diagrama se observa que las ecuaciones (19.39) deben cambiarse al reemplazar *x* por *z*, *y* por *x*, y *z* por *y*. Los resultados son

$$\Sigma M_x = -I_{yz}\omega_y^2 \qquad \Sigma M_y = 0 \qquad \Sigma M_z = I_{xy}\omega_y^2$$

Los productos de inercia respecto al punto C se calcularon en el problema de ejemplo 19.5: $I_{xy} = 0.005\,40 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ e $I_{yz} = -0.003\,75 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. En consecuencia, al referirse al DCL en la figura (b) y emplear $\omega_y = \omega_0$, las ecuaciones del movimiento asociadas con el momento quedan

$$\Sigma M_x = -I_{yz}\omega_0^2 \qquad -A_z(0.400) + B_z(0.400) + 1.472(0.200) - 1.766(0.200) = -(-0.003\,75\omega_0^2) \quad \text{(a)}$$

$$\Sigma M_y = 0 \qquad T + 1.766(0.150) = 0 \quad \text{(b)}$$

$$\Sigma M_z = I_{xy}\omega_0^2 \qquad A_x(0.400) - B_x(0.400) = 0.005\,40\omega_0^2 \quad \text{(c)}$$

De la ecuación (b), el par de torsión de salida del motor para la posición que se muestra es

$$T = -0.2649 \text{ N} \cdot \text{m} \qquad \textit{Respuesta}$$

Observe que la magnitud de este momento de torsión variará conforme cambie la posición del cuerpo

Parte 2

Ahora se aplicará al cuerpo la ecuación de fuerza del movimiento, $\Sigma\mathbf{F} = m\bar{\mathbf{a}}$, donde m es la masa del cuerpo y $\bar{\mathbf{a}}$ es la aceleración de su centro de masa. El vector de inercia del cuerpo es la suma de los vectores de inercia de las varillas individuales. El centro de masa de la varilla 1 se mueve con rapidez constante sobre un círculo centrado sobre el eje y, entonces la aceleración de su centro de masa consiste en la aceleración normal $\bar{a}_n = r\,\omega_0^2$, es decir, $\bar{\mathbf{a}}_1 = -0.125\omega_0^2\,\mathbf{k}$. De modo similar, para la varilla 2 se obtiene $\bar{\mathbf{a}}_2 = -0.150\omega_0^2\,\mathbf{i}$. El centro de masa de la varilla 3 es estacionario. Por tanto, el vector de inercia para el cuerpo queda

$$\begin{aligned} m\bar{\mathbf{a}} &= m_1\bar{\mathbf{a}}_1 + m_2\bar{\mathbf{a}}_2 \\ &= 0.15(-0.125\omega_0^2)\mathbf{k} + 0.18(-0.150\omega_0^2)\mathbf{i} \\ &= (-0.018\,75\omega_0^2)\mathbf{k} - (0.027\,00\omega_0^2)\mathbf{i} \end{aligned} \quad \text{(d)}$$

Al utilizar esos resultados y el DCL en la figura (b), las ecuaciones del movimiento asociadas con la fuerza implican

$$\Sigma F_x = m\bar{a}_x \qquad A_x + B_x = -0.027\,00\omega_0^2 \quad \text{(e)}$$

$$\Sigma F_y = m\bar{a}_y \qquad A_y = 0 \qquad \textit{Respuesta} \text{ (f)}$$

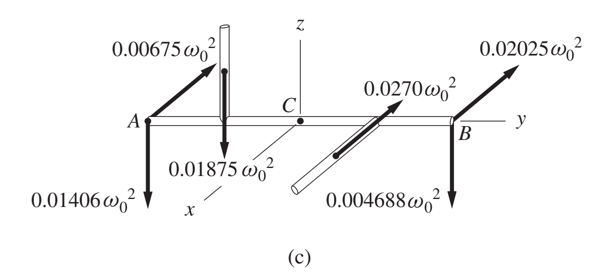
$$\Sigma F_z = m\bar{a}_z \qquad A_z + B_z - 1.472 - 1.766 - 4.709 = -0.018\,75\omega_0^2 \quad \text{(g)}$$

Al resolver las ecuaciones (a) y (g) y las (c) y (e), las componentes x y z de las reacciones de cojinete en la figura (b) se encuentra que:

$$\begin{aligned} A_x &= -0.006\,75\omega_0^2 \text{ N} \\ B_x &= -0.020\,25\omega_0^2 \text{ N} \\ A_z &= -0.014\,06\omega_0^2 + 3.900 \text{ N} \\ B_z &= -0.004\,688\omega_0^2 + 4.047 \text{ N} \end{aligned} \qquad \textit{Respuesta}$$

Parte 3

Las componentes de las reacciones de los cojinetes sólo se aplican cuando el cuerpo está en la posición dada. Sin embargo, se ve que los términos con ω_0^2 son válidos para todas las posiciones del cuerpo. Esos términos, llamados reacciones dinámicas de los cojinetes, son causados por la rotación del cuerpo. La figura (c) muestra las reacciones dinámicas de los cojinetes junto con los vectores de inercia para las barras 1 y 2. Cada vector que se muestra en la figura (c) rota con los ejes *xyz*, es decir, con el cuerpo.

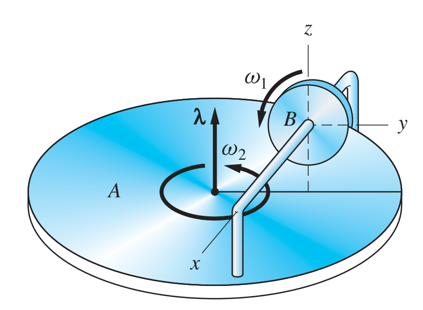


(c)

Las que también se denominan *reacciones estáticas de los cojinetes* (los términos que son independientes de ω_0) soportan el peso del cuerpo y no rotan con el sistema de coordenadas. Sin embargo, sus magnitudes varían conforme cambia la posición del cuerpo. La reacción total en un cojinete se encuentra al sumar las reacciones estáticas y dinámicas del cojinete.

Problema de ejemplo **19.10**

La plataforma *A* rota respecto al eje vertical fijo con velocidad angular ω_2 y aceleración angular $\dot{\omega}_2$. Al mismo tiempo, un motor interno (que no se muestra) gira el disco uniforme *B* respecto al eje horizontal, que está montado de manera rígida en la plataforma, con velocidad angular ω_1 y aceleración angular $\dot{\omega}_1$. Determine las componentes del par que el eje horizontal aplica al disco *B*.



Solución

Este problema se resolverá utilizando dos marcos de referencia diferentes. Primero, los ejes *xyz* están inmersos en el disco *B* (ecuaciones de Euler); y luego los ejes *xyz* están inmersos en el eje horizontal, es decir, en la plataforma extendida (ecuaciones de Euler modificadas).

Método I: *xyz* rotación con el disco

Los ejes *xyz* que se muestran en la figura son ejes principales en el centro de masa del disco *B*. Si se supone que éstos giran con el disco, constituyen un marco anclado, lo que significa que es posible usar las ecuaciones de Euler.

Es conveniente escribir la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ del disco *B* como:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \mathbf{i} + \omega_2 \boldsymbol{\lambda} \qquad \text{(válida para todos los tiempos)} \tag{a}$$

donde $\boldsymbol{\lambda}$ es un vector unitario dirigido de manera perpendicular a la plataforma. Ya que la ecuación (a) es válida para todos los tiempos, entonces puede derivarse, dando como resultado la aceleración angular del disco *B*

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\omega}_1 \mathbf{i} + \omega_1 \dot{\mathbf{i}} + \dot{\omega}_2 \boldsymbol{\lambda} + \omega_2 \dot{\boldsymbol{\lambda}} \tag{b}$$

Observe que $\dot{\boldsymbol{\lambda}} = 0$. Además, en el instante que se muestra, se tiene que $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{k}$, e $\dot{\mathbf{i}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i} = (\omega_1 \mathbf{i} + \omega_2 \mathbf{k}) \times \mathbf{i} = \omega_2 \mathbf{j}$. Por tanto, la ecuación (b) se convierte en

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\omega}_1 \mathbf{i} + \dot{\omega}_2 \mathbf{k} + \omega_1 \omega_2 \mathbf{j} \qquad \text{(en este instante)} \tag{c}$$

Ya que los ejes *xyz* constituyen un marco anclado, entonces se tiene, de acuerdo con las ecuaciones (19.35), $\dot{\omega}_x = (\dot{\boldsymbol{\omega}})_x$, $\dot{\omega}_y = (\dot{\boldsymbol{\omega}})_y$, y $\dot{\omega}_z = (\dot{\boldsymbol{\omega}})_z$. De las ecuaciones (a) y (c) se tiene que las componentes de $\boldsymbol{\omega}$ y $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ que se van a sustituir en las ecuaciones de Euler son

$$\begin{aligned} \omega_x &= \omega_1 & \dot{\omega}_x &= \dot{\omega}_1 \\ \omega_y &= 0 & \dot{\omega}_y &= \omega_1 \omega_2 \\ \omega_z &= \omega_2 & \dot{\omega}_z &= \dot{\omega}_2 \end{aligned} \tag{d}$$

Al sustituir las ecuaciones (d) en las (19.33) y reconocer que $I_y = I_z$ para el disco *B*, se obtienen los momentos que actúan sobre el disco respecto a su centro de masa (el origen del sistema de coordenadas).

$$\Sigma M_x = I_x \dot{\omega}_x + \omega_y \omega_z (I_z - I_y) = I_x \dot{\omega}_1$$

$$\Sigma M_y = I_y \dot{\omega}_y + \omega_z \omega_x (I_x - I_z) = I_y \omega_1 \omega_2 + \omega_1 \omega_2 (I_x - I_z) = I_x \omega_1 \omega_2 \qquad \textit{Respuesta}$$

$$\Sigma M_z = I_z \dot{\omega}_z + \omega_x \omega_y (I_y - I_x) = I_z \dot{\omega}_2$$

Debido a que el único soporte del disco *B* es el eje horizontal, esos momentos representan las componentes del par que dicho eje ejerce sobre el disco. El motor debe aplicar el momento respecto al eje *x*, mientras que los cojinetes que soportan el disco proporcionan los momentos respecto a los ejes *y* y *z*. Ya que los ejes de coordenadas rotan con el disco, las expresiones anteriores para los momentos son válidas sólo en la posición que se muestra en la figura.

Método II: *xyz* rotación con la plataforma

Ya que el disco B gira respecto a su eje de simetría (el eje x), las ecuaciones de Euler modificadas son aplicables. Si se supone que los ejes xyz en la figura están inmersos en la plataforma A, entonces la velocidad angular del marco de referencia es

$$\mathbf{\Omega} = \omega_2 \mathbf{k} \qquad \text{(válida para todos los tiempos)} \tag{e}$$

y la velocidad angular del disco B queda

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \mathbf{i} + \omega_2 \mathbf{k} \qquad \text{(válida para todos los tiempos)} \tag{f}$$

Las componentes de $\boldsymbol{\omega}$, a saber $\omega_x = \omega_1$, $\omega_y = 0$, y $\omega_z = \omega_2$, son derivables ya que la ecuación (f) es válida para todos los tiempos. Por tanto, las componentes de $\boldsymbol{\omega}$, $\dot{\boldsymbol{\omega}}$, y $\mathbf{\Omega}$ que se sustituirán en las ecuaciones de Euler modificadas, las (19.34), son

$$\begin{aligned} \omega_x &= \omega_1 & \dot{\omega}_x &= \dot{\omega}_1 & \Omega_x &= 0 \\ \omega_y &= 0 & \dot{\omega}_y &= 0 & \Omega_y &= 0 \\ \omega_z &= \omega_2 & \dot{\omega}_z &= \dot{\omega}_2 & \Omega_z &= \omega_2 \end{aligned} \tag{g}$$

Al completar las sustituciones, las ecuaciones (19.34) resultan en

$$\begin{aligned} \Sigma M_x &= I_x\dot{\omega}_x + I_z\Omega_y\omega_z - I_y\Omega_z\omega_y = I_x\dot{\omega}_1 \\ \Sigma M_y &= I_y\dot{\omega}_y - I_z\Omega_x\omega_z + I_x\Omega_z\omega_x = I_x\omega_1\omega_2 \\ \Sigma M_z &= I_z\dot{\omega}_z + I_y\Omega_x\omega_y - I_x\Omega_y\omega_x = I_z\dot{\omega}_2 \end{aligned} \qquad \textit{Respuesta}$$

Por supuesto, estos momentos son idénticos a los que ya se obtuvieron con el método 1. La diferencia es que las expresiones anteriores son válidas para todos los tiempos, no sólo para la posición que se muestra en la figura.

Problemas

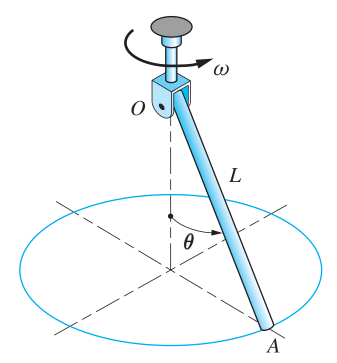


Fig. P19.46

19.46 La barra delgada uniforme *OA* de masa *m* y longitud *L* está unida al eje vertical por medio de una conexión tipo horquilla. El ensamblado rota respecto al eje con velocidad angular constante ω. Determine el ángulo θ entre *OA* y la vertical.

19.47 La varilla delgada uniforme *AB*, que pesa 16 lb, está soldada a un ángulo 60º respecto al punto medio del eje delgado *CD*. Obtenga las magnitudes de las reacciones dinámicas de los cojinetes en *C* y *D* cuando el ensamblado rota con velocidad angular constante $\omega = 6$ rad/s.

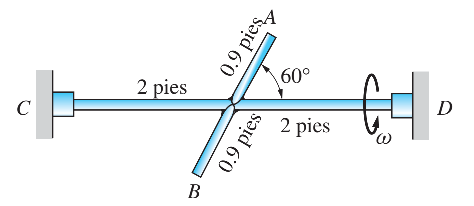


Fig. P19.47

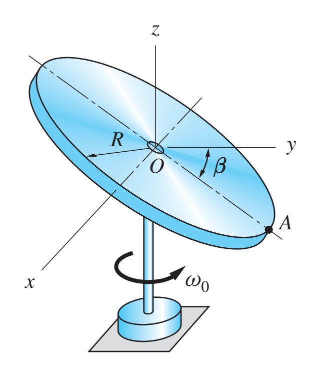


Fig. P19.48, P19.49

19.48 El disco delgado uniforme de masa *m* y radio *R* está montado en *O* en el extremo de un eje vertical. El plano del disco está inclinado un ángulo β con la horizontal. Encuentre las reacciones dinámicas que actúan sobre el disco en *O* cuando rota respecto al eje *z* con velocidad angular constante ω_0.

19.49 Repita el problema 19.48 suponiendo que una pequeña masa $m_A = m/16$ está unida al borde del disco en *A*.

19.50 La varilla uniforme *AB* de masa *m* está rígidamente unida al brazo *OA*. El ensamblado rota con velocidad angular ω respecto al eje vertical en *O*. Determine la magnitud del par, que el brazo *OA* ejerce sobre la varilla *AB* en *A*.

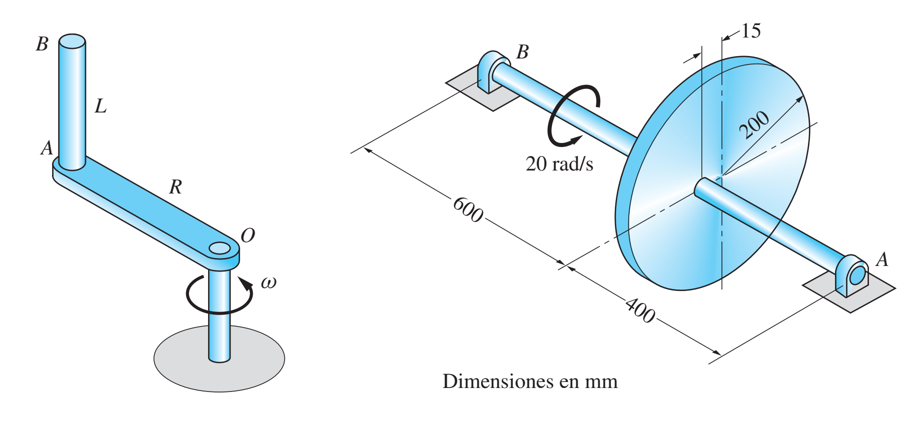


Fig. P19.50

Fig. P19.51

19.51 El disco homogéneo de 24 kg está montado sobre el eje *AB* con una excentricidad de 15 mm. Si el disco rota con rapidez angular de 20 rad/s, obtenga las magnitudes de las reacciones dinámicas de los cojinetes en *A* y *B*.

19.52 La manivela está hecha de una varilla delgada uniforme de masa total de 8 kg. Si la manivela rota respecto al eje *y* con rapidez angular constante ω = 40 rad/s, encuentre las reacciones dinámicas de los cojinetes que actúan sobre la manivela en *A* y *B*.

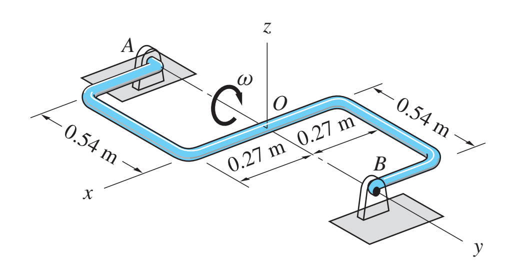


Fig. P19.52

19.53 La placa delgada homogénea de 1.8 kg, doblada, rota libremente respecto al eje *AB*. El par $\mathbf{C} = -0.8\mathbf{k}$ N · m se aplica a la placa cuando está en reposo en la posición que se muestra. Determine la aceleración angular de la placa y las reacciones de los cojinetes en *A* y *B* inmediatamente después de aplicar el par.

19.54 La placa descrita en el problema 19.53 rota respecto al eje *AB* con velocidad angular constante $\boldsymbol{\omega} = 10\mathbf{k}$ rad/s. Calcule las reacciones dinámicas de los cojinetes en *A* y *B*.

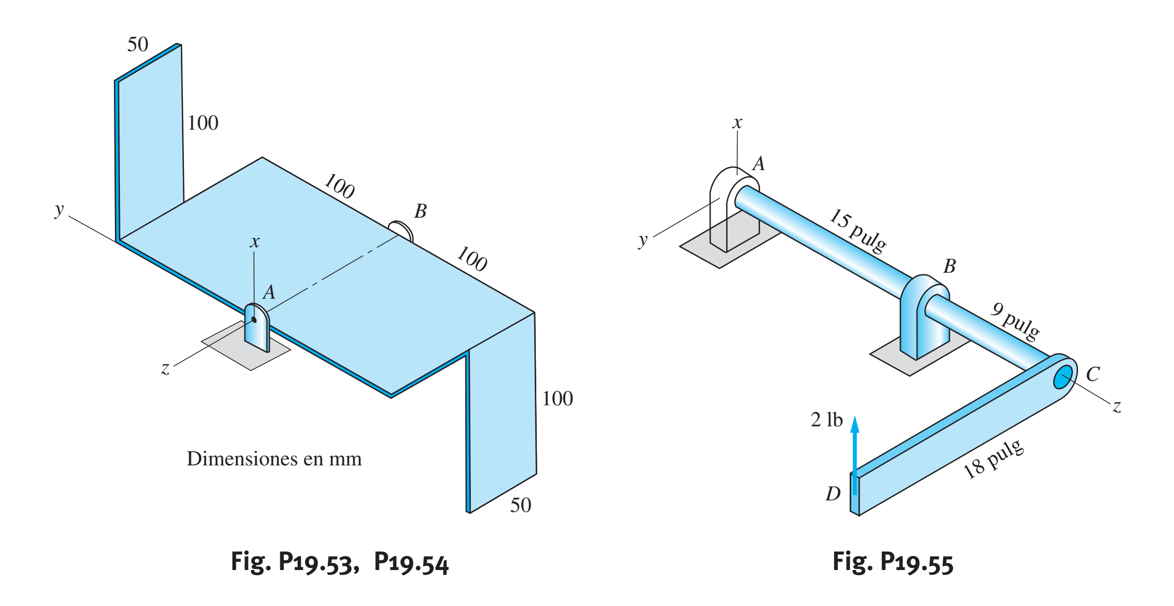


Fig. P19.53, P19.54

Fig. P19.55

19.55 La barra delgada uniforme *CD* de 3 lb está rígidamente unida al eje *ABC*. El ensamblado está en reposo en la posición que se muestra cuando la fuerza vertical de 2 lb se aplica en *D*. Determine las reacciones de los cojinetes en *A* y *B*, y la aceleración angular del eje para esta posición. Desprecie el peso del eje.

19.56 La masa de 0.15 kg de la rueda se concentra principalmente en su borde delgado y uniforme de radio medio *R* = 80 mm. La rueda gira respecto al eje en *O* con rapidez angular constante ω_1 = 180 rad/s. Al mismo tiempo, la horquilla del

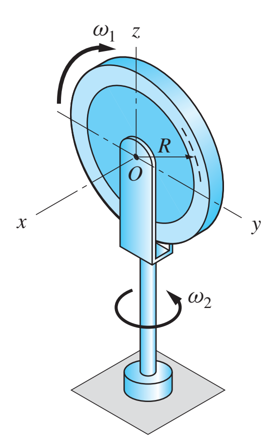


Fig. P19.56


montaje rota respecto al eje z con rapidez angular constante $\omega_2 = 40$ rad/s. Calcule el par que el eje aplica sobre la rueda.

19.57 El disco uniforme de 18 lb gira respecto al eje AG con velocidad angular constante de 20 rad/s. El eje se apoya en una rótula esférica en A, y rota respecto al eje vertical con velocidad angular constante ω_1. Encuentre el valor de ω_1 de modo que el eje permanezca horizontal durante el movimiento. Desprecie el peso del eje.

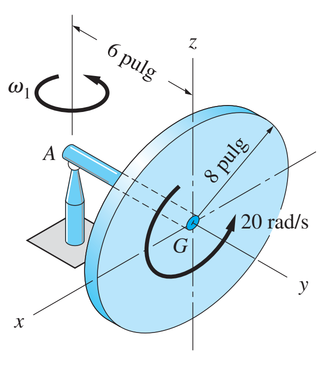
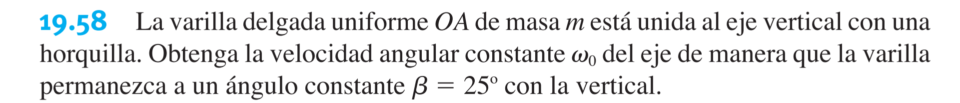


Fig. P19.57


19.58 La varilla delgada uniforme OA de masa m está unida al eje vertical con una horquilla. Obtenga la velocidad angular constante ω_0 del eje de manera que la varilla permanezca a un ángulo constante $\beta = 25°$ con la vertical.

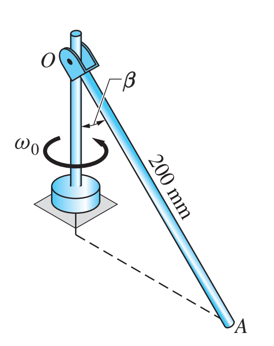


Fig. P19.58

19.59 La posición de la varilla delgada uniforme OA de 1.2 kg se controla mediante dos pequeños motores eléctricos. Un motor en B rota el eje vertical con rapidez angular constante de 1.8 rad/s y un motor en O incrementa el ángulo β entre OA y la vertical a razón constante $d\beta/dt = 1.5$ rad/s. Calcule el par de torsión de salida de cada motor cuando la varilla esté en la posición $\beta = 30°$. Desprecie las masas de los motores.

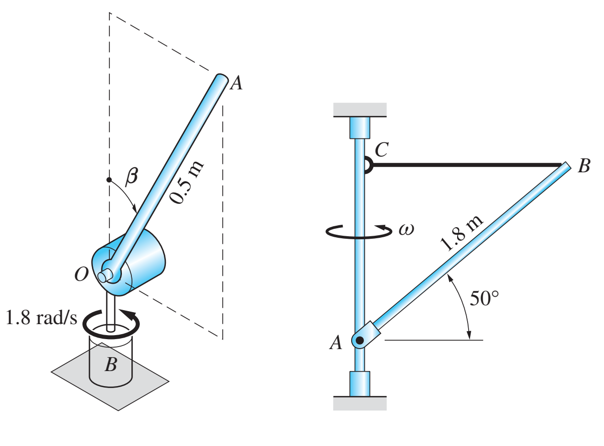


Fig. P19.59 Fig. P19.60

19.60 La varilla delgada homogénea AB de masa 20 kg está conectada al eje vertical con una horquilla en A y al cable horizontal BC. Encuentre la tensión en el cable cuando el ensamblado rota con velocidad angular constante $\omega = 6$ rad/s.

19.61 Una horquilla en A conecta la barra uniforme AB de masa m al brazo en forma de L. Conforme el brazo rota respecto al eje vertical, la barra AB mantiene un ángulo de 45° con la vertical. Determine la velocidad angular ω del brazo. Utilice $L = 2$ pies.

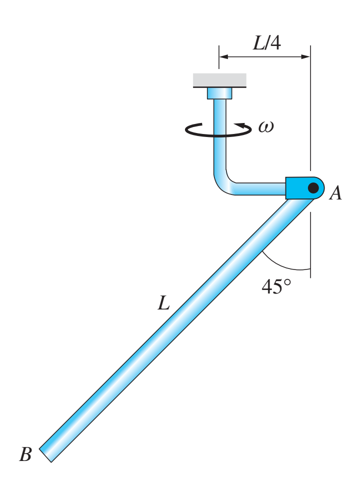


Fig. P19.61

19.62 El disco homogéneo de masa m rota respecto al eje en forma de L con rapidez angular $\omega_1 = 2\omega_0$ relativa a dicho eje. Y éste a su vez rota respecto al eje vertical en A con rapidez angular $\omega_2 = \omega_0$. Obtenga el sistema fuerza-par que representa la reacción dinámica del cojinete en A. Desprecie la masa del eje en forma de L.

19.63 La varilla delgada uniforme PQ de 16 kg gira respecto al eje BD con rapidez angular constante $\dot{\theta} = 12$ rad/s. Al mismo tiempo, el soporte AB rota respecto al eje vertical AD a razón constante de 4 rad/s. Pequeños motores eléctricos (que no se muestran) mantienen las velocidades angulares en A y D. Calcule el par de torsión que cada motor debe desarrollar como una función del ángulo θ. Desprecie las masas del soporte y los motores.

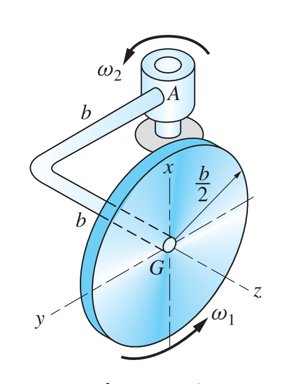


Fig. P19.62

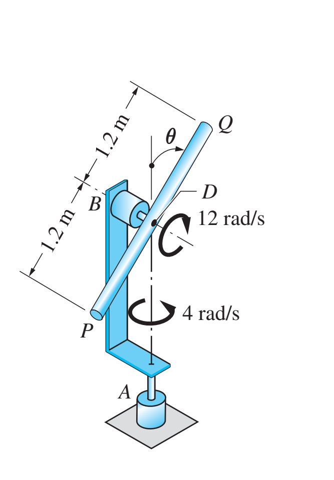


Fig. P19.63

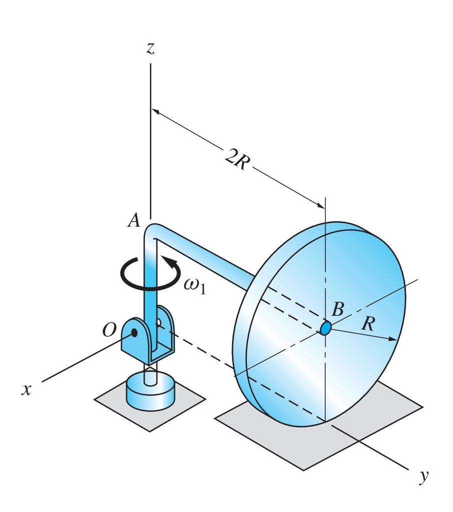


Fig. P19.64

19.64 El disco uniforme de radio $R = 6$ pulg y peso $W = 12$ lb está unido al eje doblado OAB de peso despreciable. El eje está unido a otro vertical con una horquilla en O. Suponga que el eje OAB rota libremente respecto al eje z con velocidad angular constante $\omega_1 = 6$ rad/s y que el disco rueda sin deslizarse, obtenga la fuerza vertical que la superficie horizontal ejerce sobre la rueda.

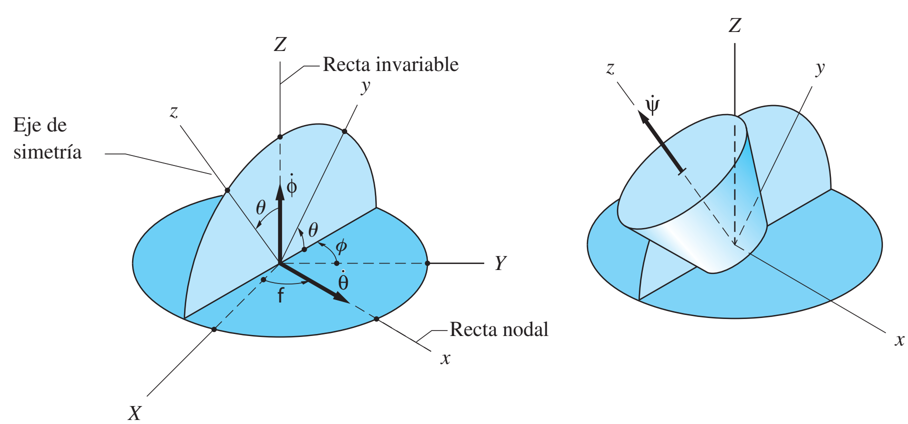
*19.6 Movimiento de un cuerpo con simetría axial

En este apartado se analiza el movimiento de los cuerpos con simetría axial, que incluye aplicaciones importantes, como giroscopios, satélites y proyectiles. Las ecuaciones del movimiento que se usan aquí son las de Euler modificadas, pero éstas se reformularán al añadir nuevas variables cinemáticas conocidas como ángulos de Euler.

a. Ángulos de Euler y velocidad angular

Recuerde que en las ecuaciones de Euler modificadas, la rotación de un cuerpo tiene dos componentes: 1. el giro del cuerpo relativo a un marco de referencia *xyz*, y 2. la rotación de los ejes *xyz* relativa a un sistema de coordenadas *XYZ* fijo. Si el cuerpo tiene simetría axial, es conveniente orientar los ejes *xyz* en una forma especial, como se describe a continuación y se ilustra en la figura 19.11(a).

- El eje z se elige como el eje de simetría del cuerpo. Al eje Z (su dirección puede seleccionarse arbitrariamente) se le conoce como la *recta invariable*. El ángulo θ entre los ejes Z y z recibe el nombre de *ángulo de nutación*.
- El eje x, llamado *recta nodal*, se orienta de manera que siempre esté en el plano XY. Al ángulo ϕ entre los ejes X y x se conoce como *ángulo de precesión*.



(a) Orientación del marco de referencia *xyz*. Las direcciones de $\dot{\boldsymbol{\phi}}$ y $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ que se muestran son positivas.

(b) Giro del cuerpo relativo al marco de referencia *xyz*. La dirección de $\dot{\boldsymbol{\psi}}$ que se muestra es positiva.

Fig. 19.11

A los vectores de velocidad angular $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ y $\dot{\boldsymbol{\phi}}$ que se muestran en la figura 19.11(a) se les llama razones de nutación y precesión, respectivamente.

El eje z está inmerso en el cuerpo, entonces la rotación del cuerpo relativa al marco *xyz* está confinada a una rotación o un giro, respecto al eje z. En la figura 19.11(b) se muestra la razón de esta rotación, llamada velocidad de giro y que se denota con $\dot{\boldsymbol{\psi}}$. El *ángulo de giro* ψ (que no se muestra) puede medirse desde cualquier referencia conveniente. Los ángulos ϕ, θ y ψ, que se denominan *ángulos de Euler*, son variables cinemáticas bastante útiles en la descripción del movimiento de un cuerpo con simetría axial.

Antes de proceder es preciso reiterar que los ejes *xyz* que se muestran en la figura 19.11 no son un marco anclado, ya que al cuerpo se le permite girar respecto al eje z. En la figura 19.11(a) se observa que la velocidad angular del marco de referencia *xyz* es

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\boldsymbol{\phi}} + \dot{\boldsymbol{\theta}} \qquad (19.40)$$

El cuerpo gira a una razón $\dot{\psi}$ relativa al marco *xyz*, entonces su velocidad angular es $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega} + \dot{\boldsymbol{\psi}}$, es decir

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\phi}} + \dot{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\boldsymbol{\psi}} \qquad (19.41)$$

Al utilizar la figura 19.11 se deduce que las componentes de $\boldsymbol{\Omega}$ y $\boldsymbol{\omega}$ relativas a los ejes *xyz* son

$$\begin{aligned} \Omega_x &= \dot{\theta} & \omega_x &= \dot{\theta} \\ \Omega_y &= \dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta & \omega_y &= \dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \Omega_z &= \dot{\phi}\cos\theta & \omega_z &= \dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi} \end{aligned} \tag{19.42}$$

b. *Ecuaciones de momento para el movimiento*

Debido a que z es un eje de simetría para el cuerpo, se tiene que $I_{xy} = I_{yz} = I_{zx} = 0$ e $I_x = I_y$. De ahora en adelante se utilizará la siguiente notación:

$$I_x = I_y = I \tag{19.43}$$

Al sustituir las ecuaciones (19.42) y (19.43) en las ecuaciones de Euler modificadas (19.34), se obtiene

$$\begin{aligned} \Sigma M_x &= I\ddot{\theta} + (I_z - I)\dot{\phi}^2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta + I_z\,\dot{\phi}\dot{\psi}\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \Sigma M_y &= I\ddot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta + 2I\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta - I_z\,\dot{\theta}(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta) \\ \Sigma M_z &= I_z(\ddot{\psi} + \ddot{\phi}\cos\theta - \dot{\phi}\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta) \\ &= I_z\frac{d}{dt}(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta) \end{aligned} \tag{19.44}$$

Algunas veces es conveniente emplear las siguientes ecuaciones, que se obtienen al sustituir $\omega_z = \dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi}$ de las ecuaciones (19.42) en las (19.44).

$$\begin{aligned} \Sigma M_x &= I\ddot{\theta} + I_z\omega_z\dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta - I\dot{\phi}^2\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta \\ \Sigma M_y &= I\ddot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta + 2I\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta - I_z\,\dot{\theta}\omega_z \\ \Sigma M_z &= I_z\dot{\omega}_z \end{aligned} \tag{19.45}$$

Cuando utilice las ecuaciones (19.44) o (19.45), recuerde del apartado 19.5 que las ecuaciones de Euler modificadas son válidas sólo si el origen de los ejes *xyz* se localiza en el *centro de masa* del cuerpo, o en un *punto fijo* (fijo en el cuerpo y en el espacio).

c. *Precesión permanente*

Al movimiento especial que aparece cuando $\dot{\psi}$, $\dot{\phi}$ y θ son constantes se le llama *precesión permanente*. En este caso, las ecuaciones (19.44) se simplifican de manera considerable:

$$\begin{aligned} \Sigma M_x &= (I_z - I)\dot{\phi}^2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta + I_z\,\dot{\phi}\dot{\psi}\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \Sigma M_y &= 0 \qquad \Sigma M_z = 0 \end{aligned} \tag{19.46}$$

mientras que las ecuaciones (19.45) equivalentes se reducen a

$$\begin{aligned} \Sigma M_x &= I_z\omega_z\dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta - I\dot{\phi}^2\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta \\ \Sigma M_y &= 0 \qquad \Sigma M_z = 0 \end{aligned} \tag{19.47}$$

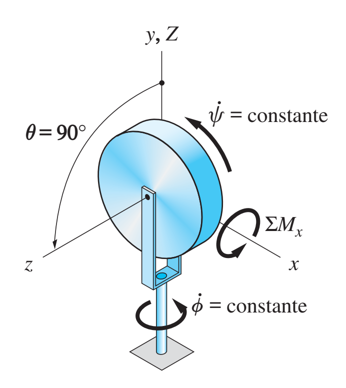


Fig. 19.12

De las ecuaciones (19.46) o (19.47) se observa que para que un cuerpo experimente precesión permanente debe estar sometido a fuerzas que aporten un momento constante respecto al eje x (la recta nodal) y sin que actúen momentos respecto a los otros dos ejes. Por tanto, la dirección del vector de momento debe ser perpendicular al eje de precesión (Z) y al eje de giro (z).

Un caso especial interesante de precesión permanente ocurre cuando el eje de precesión (Z) es perpendicular al de giro (z), como se muestra en la figura 19.12. Al establecer que $\theta = 90^\circ$ en la primera de las ecuaciones (19.46), se encuentra que el momento requerido para mantener la precesión permanente es

$$\Sigma M_x = I_z \dot{\phi} \dot{\psi} \tag{19.48}$$

d. Movimiento sin momento de torsión

Si el momento resultante de las fuerzas externas es cero respecto al centro de masa, entonces se dice que el cuerpo efectúa un movimiento sin momentos de torsión. Así, el *movimiento sin momento de torsión* se caracteriza por $\Sigma \mathbf{M}_G = d\mathbf{h}_G/dt = \mathbf{0}$, de donde se concluye que la cantidad de movimiento angular del cuerpo respecto a su centro de masa G permanece constante en magnitud y dirección. Ejemplos de *movimiento sin momento de torsión* son los proyectiles (despreciando la resistencia del aire) y los vehículos espaciales no propulsados.

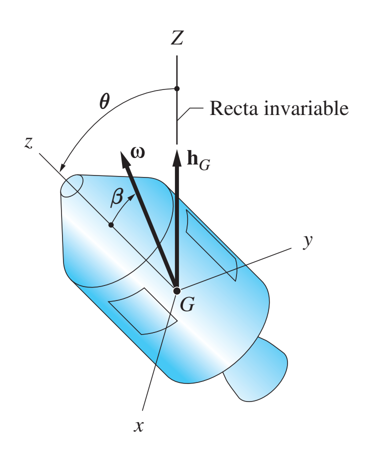


Fig. 19.13

La figura 19.13 muestra un proyectil con simetría axial en vuelo libre. Por conveniencia matemática se acostumbra elegir el eje Z fijo en la dirección de $\mathbf{h}_G$. El sistema de coordenadas xyz está unido a G, siendo z el eje de simetría del cuerpo. De acuerdo con la figura 19.11, el eje x es perpendicular al plano formado por los ejes Z y z. No obstante que el eje z está inmerso en el cuerpo, es importante recordar que los ejes xyz no constituyen un marco anclado, porque el cuerpo no puede rotar (girar) respecto al eje z relativo al marco xyz.

Como se muestra en la figura 19.13, se establece que β sea el ángulo entre el vector de velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ del cuerpo y el eje z. El ángulo θ entre los ejes Z y z es el ángulo de Euler definido en la figura 19.11. Así, las componentes de $\mathbf{h}_G$ respecto a los ejes xyz son

$$h_x = 0 \qquad h_y = h_G \operatorname{sen}\theta \qquad h_z = h_G \cos\theta \tag{19.49}$$

Debido a la simetría, xyz son ejes principales de inercia del proyectil en G. Al utilizar la notación $\bar{I}_x = \bar{I}_y = \bar{I}$, las componentes de $\mathbf{h}_G$ toman la forma [véase la ecuación (19.18)]:

$$h_x = \bar{I}\omega_x \qquad h_y = \bar{I}\omega_y \qquad h_z = \bar{I}_z\omega_z \tag{19.50}$$

Al comparar las ecuaciones (19.49) y (19.50) se concluye que

$$\omega_x = 0 \qquad \omega_y = \frac{h_G \operatorname{sen}\theta}{\bar{I}} \qquad \omega_z = \frac{h_G \cos\theta}{\bar{I}_z} \tag{19.51}$$

Ya que $\omega_x = \dot{\theta}$ de acuerdo con la ecuación (19.42), se concluye que θ permanece constante, lo que indica que el movimiento es una precesión permanente respecto al eje Z.

Es posible deducir una relación útil entre los ángulos θ y β al observar que (véase la figura 19.13) $\tan\beta = \omega_y/\omega_z$. Al usar las ecuaciones (19.51), se obtiene

$$\tan\beta = \frac{\omega_y}{\omega_z} = \frac{h_G \operatorname{sen}\theta/\bar{I}}{h_G \cos\theta/\bar{I}_z} = \frac{\bar{I}_z}{\bar{I}}\tan\theta$$

o

$$\tan\theta = \frac{1}{\lambda}\tan\beta \qquad \text{donde } \lambda = \frac{\bar{I}_z}{\bar{I}} \tag{19.52}$$

Al utilizar la ecuación (19.52) se obtienen las siguientes relaciones entre la velocidad angular y las rapideces de giro y precesión (para la deducción, véase el problema de ejemplo 19.11):

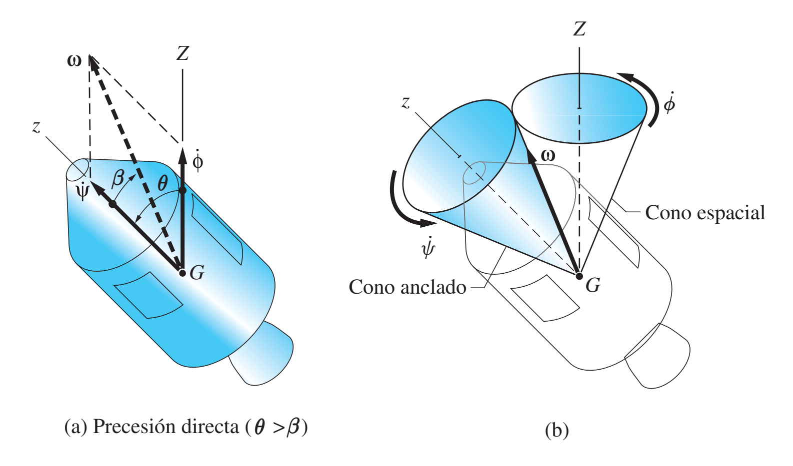
$$\dot{\psi} = \omega(1-\lambda)\cos\beta \tag{19.53a}$$

$$\dot{\phi} = \omega\cos\beta\sqrt{\lambda^2 + \tan^2\beta} \tag{19.53b}$$

$$\lambda\dot{\psi} = (1-\lambda)\dot{\phi}\cos\theta \tag{19.53c}$$

Se acostumbra distinguir entre los casos de precesión permanente, dependiendo de si λ en la ecuación (19.52) es mayor o menor que uno.

Caso 1: Precesión directa (regular): $\lambda < 1$.
Para $\lambda < 1$, de la ecuación (19.52) resulta que $\bar{I} > \bar{I}_z$, que corresponde al caso de un cuerpo alargado como el cohete que se muestra en la figura 19.14. En la ecuación (19.52) se observa que $\theta > \beta$, lo que indica que el vector de velocidad angular ω está dentro del ángulo formado por los ejes Z y z positivos, como se muestra en la figura 19.14(a). Observe que la proyección de $\dot{\boldsymbol{\psi}}$ sobre $\dot{\boldsymbol{\phi}}$ está en la misma dirección que $\dot{\boldsymbol{\phi}}$, que es una característica de la precesión directa. El sistema de vectores que se muestra en la figura 19.14(a) hace un movimiento de precesión con velocidad constante $\dot{\phi}$ respecto al eje Z, mientras que la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ traza un cono en el espacio, siendo Z el eje del cono.



(a) Precesión directa ($\theta > \beta$)
(b)

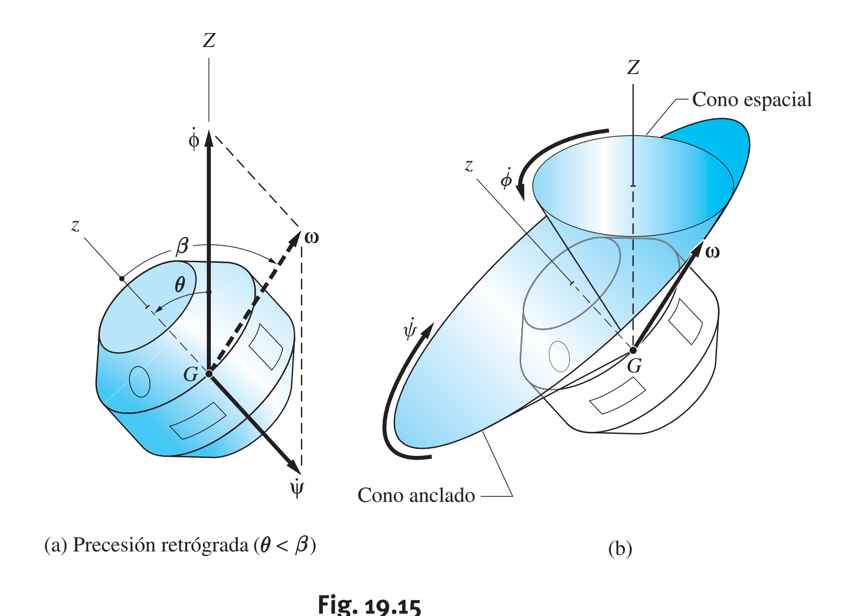
Fig. 19.14

Es posible representar este movimiento con el modelo geométrico de la figura 19.14(b), que consta de dos conos circulares rectos. El cono anclado está fijo en el cuerpo y su eje coincide con el de simetría del cuerpo (eje z). El cono espacial es estacionario, siendo Z su eje. La velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ está sobre la recta de contacto entre los dos conos. Ya que el eje instantáneo de rotación es el lugar geométrico de puntos que tienen velocidad cero, se ve que el cono anclado rueda sin deslizarse sobre el exterior del cono espacial.

Por tanto, el eje z y la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ tienen movimiento de precesión respecto al eje Z a razón $\dot{\phi}$ y el cono anclado gira respecto al eje z a razón $\dot{\psi}$. Por comparación directa de las partes (a) y (b) de la figura 19.14, se concluye que los movimientos del cono anclado y del cuerpo físico (es decir, el cohete) son idénticos.

Caso 2: Precesión retrógrada: $\lambda > 1$.

Si $\lambda > 1$, a partir de la ecuación (19.52) se observa que $\bar{I} < \bar{I}_z$, que sería el caso de un cuerpo achatado, como el vehículo espacial que orbita en la figura 19.15. Como $\lambda > 1$ implica que $\theta < \beta$, el vector de velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ está fuera del ángulo formado por los ejes Z y z positivos, como se muestra en la figura 19.15(a). También se tiene que la dirección de la proyección de $\dot{\boldsymbol{\psi}}$ sobre $\dot{\boldsymbol{\phi}}$ es opuesta a la dirección de $\dot{\boldsymbol{\phi}}$. En la figura 19.15(b), el modelo cónico para la precesión retrógrada muestra que el cono espacial está sobre el interior del cono anclado.



(a) Precesión retrógrada ($\theta < \beta$) (b)

Fig. 19.15

Para un cuerpo cuyos tres momentos principales de inercia son iguales a $\bar{I}$, es decir, para $\lambda = 1$ (como es el caso de una esfera uniforme), se ve en las ecuaciones (19.18) que $\mathbf{h}_G = \bar{I}\boldsymbol{\omega}$. Por tanto, una vez que se ha lanzado con una rotación inicial respecto a un eje dado, el cuerpo simplemente continúa rotando respecto a ese eje con velocidad angular constante.

e. Giroscopios

Un giroscopio consta de un rotor, o disco, con simetría axial montado de tal forma que es libre de girar respecto a su eje de simetría. La figura 19.16 muestra un giroscopio montado sobre la llamada *suspensión Cardán*, un diseño que se utiliza mucho para los sistemas de guía inercial, giroestabilizadores, etcétera. Los elementos de

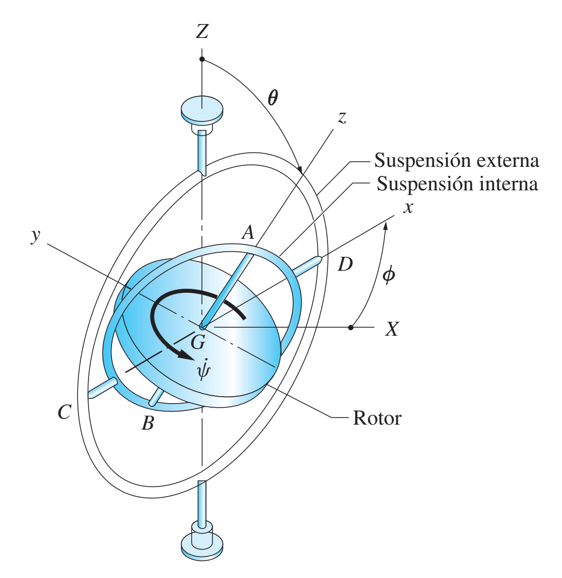
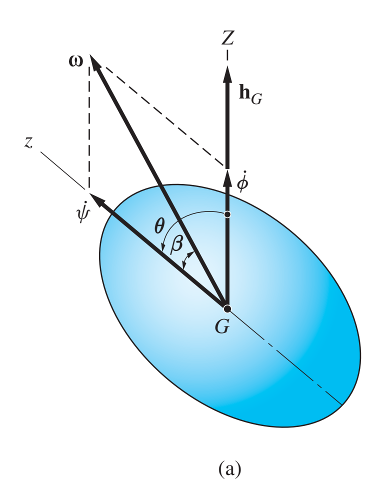


Fig. 19.16

esta suspensión son los siguientes: el rotor de masa m, que gira respecto al eje AB, que a su vez está fijo en la suspensión interna, o anillo interno, que rota con libertad en relación con el eje CD respecto a la suspensión externa, y la suspensión externa, que puede rotar respecto al eje Z. La figura 19.16 también indica la manera en que las orientaciones de las suspensiones corresponden a los ángulos de Euler ϕ y θ, y a la velocidad de giro $\dot{\psi}$ del rotor. Suponiendo que el eje Z tiene una orientación fija en el espacio, el rotor tiene tres grados de libertad de rotación y puede, por tanto, asumir todas las posiciones angulares posibles. De interés particular es el hecho de que los tres ejes de rotación se intersecan en el centro de masa G del rotor. En consecuencia, el movimiento del rotor es *sin momento de torsión* si todos los cojinetes tienen fricción despreciable y no hay fuerzas externas aplicadas a las suspensiones.

Si el rotor en otro giroscopio estacionario se hace rotar respecto al eje z, su cantidad de movimiento angular inicial $\mathbf{h}_G$ también estará dirigida sobre el eje z. Como el movimiento es *sin momento de torsión*, la dirección de ese eje permanecerá fija ($\Sigma\mathbf{M}_G = d\mathbf{h}_G/dt = \mathbf{0}$). La capacidad del rotor de un giroscopio para mantener una dirección fija sirve como el principio de operación en muchos instrumentos de navegación.

Una fuerza aplicada a una de las suspensiones puede producir un momento respecto al centro de masa del rotor. En este caso, este último experimentará una precesión permanente si hubiese condiciones iniciales convenientes. La dirección de la precesión puede deducirse de $\Sigma\mathbf{M}_G = d\mathbf{h}_G/dt$, donde $\Sigma\mathbf{M}_G$ es el momento de la fuerza aplicada respecto al centro de masa G.



(a)

Problema de ejemplo **19.11**

La figura (a) muestra un cuerpo con simetría axial (el eje z es el eje de simetría) que efectúa un movimiento *sin momento de torsión*. El eje Z fijo se elige para que coincida en la dirección de $\mathbf{h}_G$, la cantidad de movimiento angular respecto al centro de masa G. El vector de velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ está inclinado un ángulo β respecto al eje z.

1. Sea $\lambda = \bar{I}_z/\bar{I}$, deduzca las ecuaciones (19.53a-c):

$$\dot{\psi} = \omega(1 - \lambda)\cos\beta \tag{a}$$

$$\dot{\phi} = \omega\cos\beta\sqrt{\lambda^2 + \tan^2\beta} \tag{b}$$

$$\lambda\dot{\psi} = (1 - \lambda)\dot{\phi}\cos\theta \tag{c}$$

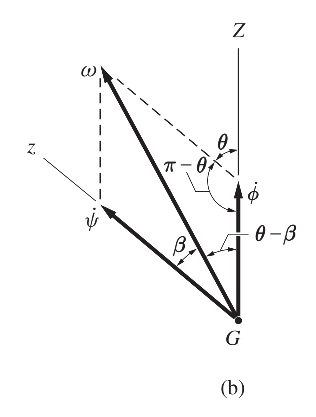
donde $\dot{\psi}$ y $\dot{\phi}$ son las razones de giro y precesión, respectivamente y θ es el ángulo de Euler que se muestra en la figura (a).

2. Dibuje los conos anclado y espacial, y calcule las razones de giro y precesión para un satélite dado que $\lambda = 1.8$, $\omega = 1.2$ rad/s y $\beta = 25^\circ$. Repita el procedimiento para un cohete para el cual $\lambda = 0.2$, $\omega = 0.8$ rad/s y $\beta = 15^\circ$.

Solución



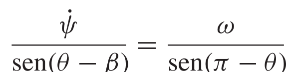
Parte 1



(b)



Al aplicar la ley de los senos al diagrama de velocidad que se muestra en la figura (b), se obtiene



$$\frac{\dot{\psi}}{\operatorname{sen}(\theta - \beta)} = \frac{\omega}{\operatorname{sen}(\pi - \theta)}$$

que conduce a

$$\dot{\psi} = \omega\frac{\operatorname{sen}\theta\cos\beta - \cos\theta\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\theta} = \omega\left(\cos\beta - \frac{\operatorname{sen}\beta}{\tan\theta}\right)$$

Al sustituir $\tan\theta = (1/\lambda)\tan\beta$ [véase la ecuación (19.52)], resulta

$$\dot{\psi} = \omega\left(\cos\beta - \frac{\operatorname{sen}\beta}{(1/\lambda)\tan\beta}\right) = \omega(1 - \lambda)\cos\beta$$

que concuerda con la ecuación (a).

Al aplicar la ley de los senos a la figura (b) también resulta

$$\frac{\dot{\phi}}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{\omega}{\operatorname{sen}(\pi - \theta)}$$

o

$$\dot{\phi} = \omega\frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\theta} \tag{d}$$

Utilizando, como antes, la relación $\tan\theta = (1/\lambda)\tan\beta$, $\operatorname{sen}\theta$ puede escribirse como

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\tan\theta}{\sqrt{1 + \tan^2\theta}} = \frac{(1/\lambda)\tan\beta}{\sqrt{1 + [(1/\lambda)\tan\beta]^2}} = \frac{\tan\beta}{\sqrt{\lambda^2 + \tan^2\beta}} \tag{e}$$

Al sustituir la ecuación (e) en la (d) queda

$$\dot{\phi} = \omega \operatorname{sen} \beta \frac{\sqrt{\lambda^2 + \tan^2 \beta}}{\tan \beta} = \omega \cos \beta \sqrt{\lambda^2 + \tan^2 \beta}$$

que concuerda con la ecuación (b).

Dividiendo la ecuación (a) entre la (b), se obtiene

$$\frac{\dot{\psi}}{\dot{\phi}} = \frac{\omega(1-\lambda)\cos\beta}{\omega\cos\beta\sqrt{\lambda^2 + \tan^2 \beta}} = \frac{1-\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \lambda^2 \tan^2 \theta}}$$

$$= \frac{1-\lambda}{\lambda \sec \theta} = \frac{(1-\lambda)\cos\theta}{\lambda}$$

o

$$\lambda \dot{\psi} = (1-\lambda)\dot{\phi}\cos\theta$$

que es idéntica a la ecuación (c).

Parte 2

El ángulo θ de Euler entre el eje Z fijo y el eje de simetría se determina con las ecuaciones (19.52) y (19.53). Pueden utilizarse las ecuaciones (a) y (b) para calcular la velocidad de giro $\dot{\psi}$ y la razón de movimiento de precesión $\dot{\phi}$. Cuando los parámetros que se han dado para el satélite y el cohete se sustituyen en esas ecuaciones, los resultados son los siguientes.

Para el satélite:

$$\theta = \tan^{-1}[(1/\lambda)\tan\beta] = \tan^{-1}[(1/1.8)\tan 25°] = 14.52°$$

$$\dot{\psi} = \omega(1-\lambda)\cos\beta = 1.2(1-1.8)\cos 25° = -0.870 \text{ rad/s}$$

$$\dot{\phi} = \omega\cos\beta\sqrt{\lambda^2 + \tan^2\beta}$$

$$= 1.2\cos 25°\sqrt{(1.8)^2 + \tan^2 25°} = 2.022 \text{ rad/s}$$

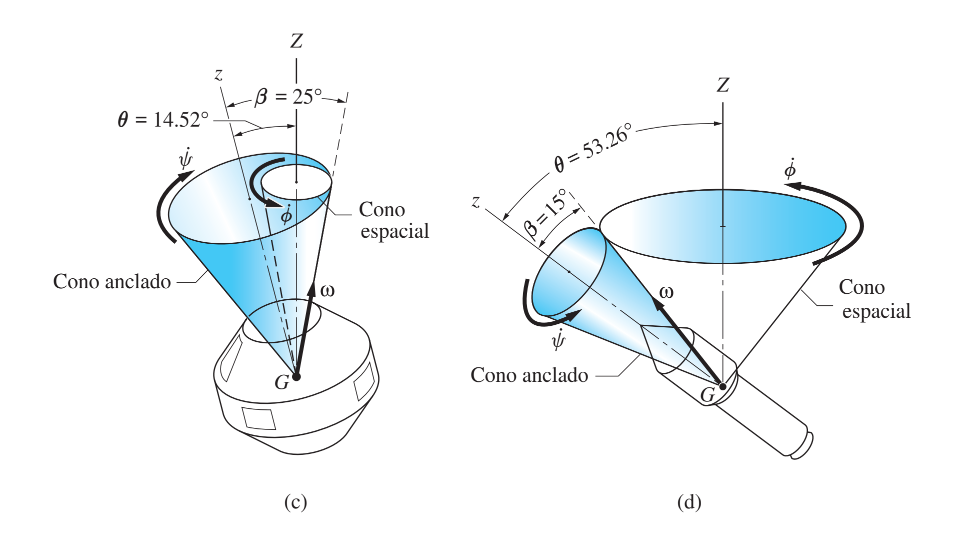
Para el cohete:

$$\theta = \tan^{-1}[(1/\lambda)\tan\beta] = \tan^{-1}[(1/0.2)\tan 15°] = 53.26°$$

$$\dot{\psi} = \omega(1-\lambda)\cos\beta = 0.8(1-0.2)\cos 15° = 0.618 \text{ rad/s}$$

$$\dot{\phi} = \omega\cos\beta\sqrt{\lambda^2 + \tan^2\beta}$$

$$= 0.8\cos 15°\sqrt{(0.2)^2 + \tan^2 15°} = 0.258 \text{ rad/s}$$



(c) (d)

Los conos espacial y anclado para el satélite y el cohete se muestran en las figuras (c) y (d), respectivamente. Observe que el satélite realiza la precesión retrógrada ($\dot{\psi}$ es negativa), mientras que la precesión del cohete es directa ($\dot{\psi}$ es positiva).

Problema de ejemplo **19.12**

La figura (a) muestra una esfera uniforme de radio R y masa m que está soldada a la varilla AB de longitud L (es posible despreciar la masa de AB). La horquilla en B conecta la varilla al eje vertical BC. Al principio el ensamblado rota respecto a la vertical con velocidad angular ω, y la esfera descansa contra el eje. Si se supone que ω se incrementa de manera gradual, determine la velocidad angular crítica ω_{cr} con la que se pierde el contacto entre la esfera y la varilla. Desprecie la fricción.

(a)

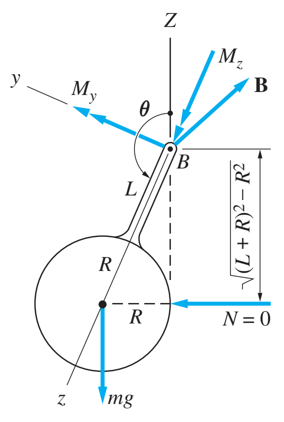
Solución

En la figura (b), se muestra el diagrama de cuerpo libre de la esfera y la varilla, dibujados en el instante en que el ensamblado rota a $\omega = \omega_{cr}$. Se supone que los ejes xyz están unidos a la varilla AB con el origen en B (el eje x sale de la página). Además del peso mg de la esfera, el DCL también contiene las reacciones que la horquilla genera en B: la fuerza del perno **B** y las dos componentes de momento M_y y M_z ($M_x = 0$ ya que el perno de la horquilla no tiene fricción). Si la velocidad angular fuera menor que la velocidad angular crítica, el DCL también tendría la fuerza normal N que el eje vertical ejerce sobre la esfera. Sin embargo, cuando $\omega = \omega_{cr}$, entonces $N = 0$.

Es conveniente elegir el eje Z en la dirección del eje vertical, como se indica en la figura (b). En ella también se muestra el ángulo θ de Euler, definido como el ángulo entre los ejes Z y z. Cuando la esfera pierde contacto con el eje vertical, su movimiento consiste en una rotación respecto al eje Z a la razón ω_{cr}. La velocidad de giro es cero, porque la esfera no puede rotar respecto a la varilla AB. Por tanto, el movimiento de la esfera se describe como una precesión permanente sin giro;

en otras palabras, $\dot{\phi} = \omega_{cr}$, $\dot{\psi} = \dot{\theta} = 0$. Como resultado, la ecuación de la precesión permanente, la (19.46), queda

$$\Sigma M_x = (I_z - I)\omega_{cr}^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta \tag{a}$$



DCL (eje x fuera de la página)

(b)

Las propiedades inerciales de la esfera respecto al punto B son

$$I_z = \frac{2}{5}mR^2 \quad \text{y} \quad I = I_y = \frac{2}{5}mR^2 + m(L+R)^2$$

de donde se obtiene

$$I_z - I = -m(L+R)^2 \tag{b}$$

Refiriéndose a la figura (b) se encuentra que el momento de las fuerzas externas (el peso) respecto al eje x es

$$\Sigma M_x = mgR \tag{c}$$

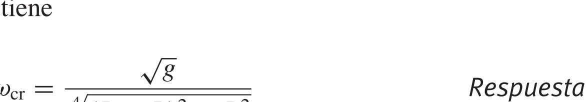
De la misma figura también se deduce que

$$\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}(\pi - \theta) = \frac{R}{L+R} \tag{d}$$

y

$$\cos\theta = -\cos(\pi - \theta) = -\frac{\sqrt{(L+R)^2 - R^2}}{L+R} \tag{e}$$

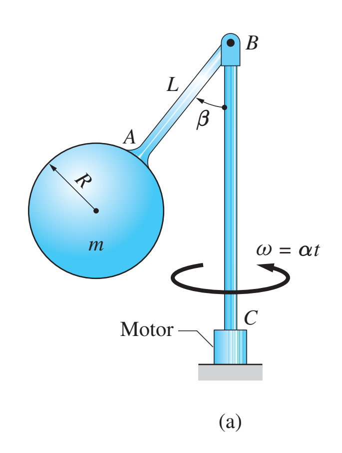
Al sustituir las ecuaciones de la (b) a la (e) en la ecuación (a) y resolver para la velocidad angular crítica, se obtiene



$$\omega_{cr} = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt[4]{(L+R)^2 - R^2}} \qquad \textit{Respuesta}$$

Problema de ejemplo 19.13

La figura (a) muestra el mismo ensamblado que se describió en el problema de ejemplo 19.12. El ensamblado inicialmente está estacionario con la esfera apoyada contra el eje BC. Entonces se activa un motor en C que imprime al eje una aceleración angular constante α (la velocidad angular resultante del eje es $\omega = \alpha t$). Sea t_0 el tiempo en que la esfera pierde contacto con el eje: 1. deduzca la ecuación de movimiento para la esfera en términos del ángulo β para el periodo $t \geq t_0$ y establezca las condiciones iniciales, y 2. resuelva las ecuaciones numéricamente para el intervalo de tiempo $t = t_0$ a $t = t_0 + 2$ s y trace la gráfica de β contra t. Utilice $m = 7$ kg, $L = R = 60$ mm y $\alpha = 5.5$ rad/ s^2.



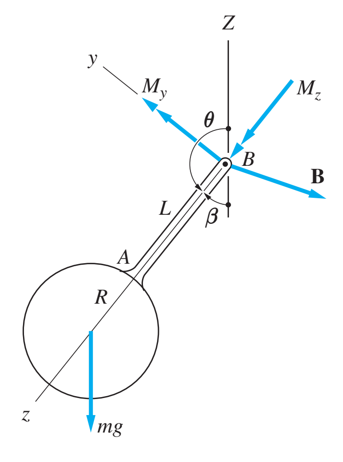
(a)



Solución

Parte 1

En la figura (b) se muestra el diagrama de cuerpo libre (DCL) de la unidad rígida que contiene a la esfera y a la varilla AB. Se supone que los ejes xyz están unidos a la varilla AB con el origen en B (el eje x sale de la página). Este DCL muestra el peso de la esfera y las reacciones en B: la fuerza **B** del perno y las componentes de momento



(b) DCL (el eje x sale de la página)

M_y y M_z (el perno de la horquilla no aporta una componente de momento respecto al eje x). Se supone que el eje Z fijo está en la dirección del eje vertical como se muestra en la figura (b), siendo θ el ángulo de Euler entre los ejes Z y z. Como la esfera y la varilla AB rotan como una unidad rígida, la velocidad de giro $\dot{\psi}$ es cero. Además, al comparar las figuras (a) y (b) con la figura 19.11, se encuentra que la velocidad de precesión es $\dot{\phi} = \omega = \alpha t$.

La ecuación de Euler modificada que rige a β es la primera de las ecuaciones (19.44) (las otras dos podrían usarse para determinar M_y y M_z).

$$\Sigma M_x = I\ddot{\theta} + (I_z - I)\dot{\phi}^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta + I_z\dot{\phi}\dot{\psi} \operatorname{sen}\theta \qquad \text{(a)}$$

Si se utiliza $L = R$ y $\theta = \pi - \beta$, los diferentes términos en la ecuación (a) quedan

$$\Sigma M_x = 2mgR \operatorname{sen}\beta \qquad \text{(del DCL)}$$

$$I_z = \frac{2}{5}mR^2$$

$$I = I_y = \frac{2}{5}mR^2 + m(R+R)^2 = \frac{22}{5}mR^2$$

$$\ddot{\theta} = -\ddot{\beta} \qquad \dot{\phi} = \alpha t \qquad \dot{\psi} = 0$$

Al sustituir esas expresiones en la ecuación (a) se obtiene

$$2mgR \operatorname{sen}\beta = \frac{22}{5}mR^2(-\ddot{\beta}) + (-4mR^2)(\alpha t)^2 \operatorname{sen}\beta(-\cos\beta) + 0$$

la cual, al eliminar la masa m y reacomodar términos, se reduce a

$$\ddot{\beta} = \frac{10}{11}\alpha^2 t^2 \operatorname{sen}\beta \cos\beta - \frac{10g}{22R} \operatorname{sen}\beta \qquad \text{(b)}$$

Cuando los valores numéricos $\alpha = 5.5$ rad/s^2, $g = 9.81$ m/s^2 y $R = 0.060$ m se sustituyen en la ecuación (b), resulta la ecuación de movimiento

$$\ddot{\beta} = 27.50t^2 \operatorname{sen}\beta \cos\beta - 74.32 \operatorname{sen}\beta \qquad (\text{para } t \geq t_0) \qquad \textit{Respuesta} \text{ (c)}$$

A partir de la solución del problema de ejemplo 19.12 se sabe que ω_{cr}, la velocidad angular crítica en la que se pierde contacto entre la esfera y el eje vertical, es

$$\omega_{cr} = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt[4]{(L+R)^2 - R^2}} = \frac{\sqrt{9.81}}{\sqrt[4]{(0.120)^2 - (0.060)^2}}$$
$$= 9.716 \text{ rad/s}$$

En consecuencia, el tiempo en el que se pierde contacto es $t_0 = \omega_{cr}/\alpha = 9.716/5.5 = 1.7665$ s. El valor inicial de β (cuando la esfera toca al eje vertical) es $\beta_0 = \tan^{-1}[R/(L+R)] = \tan^{-1}(R/2R) = \tan^{-1}(1/2) = 30° = 0.5236$ rad. Por tanto, las condiciones iniciales son

$$t_0 = 1.7665 \text{ s} \qquad \beta_0 = 0.5236 \text{ rad} \qquad \dot{\beta}_0 = 0 \qquad \textit{Respuesta} \text{ (d)}$$

Parte 2

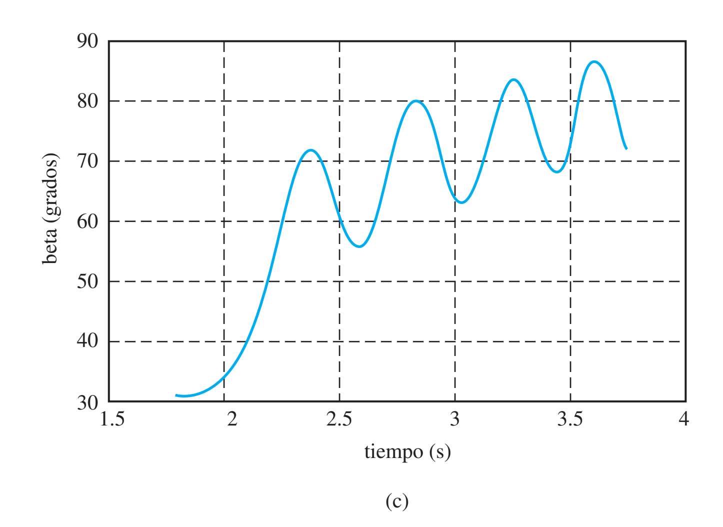
Las ecuaciones de primer orden equivalentes y las condiciones iniciales son (con $x_1 = \beta$ y $x^2 = \dot{\beta}$)

$$\dot{x}_1 = x_2 \qquad x_1(1.7665) = 0.5236$$

$$\dot{x}_2 = 27.50t^2 \operatorname{sen}\beta\cos\beta - 74.32\operatorname{sen}\beta \qquad x_2(1.7665) = 0$$

El programa MATLAB que generó la gráfica en la figura (c) es:

```
function example19_13
[t,x] = ode45(@f,[1.7665:0.01:3.7665],[0.5236 0]);
axes('fontsize',14)
plot(t,x(:,1)*180/pi,'linewidth',1.5)
grid on
xlabel('time (s)'); ylabel('beta (deg)')
      function dxdt = f(t,x)
      s = sin(x(1)); c = cos(x(1));
      dxdt =[x(2); 27.5*t^2*s*c - 74.32*s];
      end
end
```



(c)

Refiriéndose a la figura (c) se observa que β está formada de dos partes: un valor promedio que se incrementa con el tiempo y las oscilaciones respecto al valor promedio. Conforme la rapidez angular ω del eje aumenta, se espera que el valor promedio de β se aproxime a 90º y que la amplitud de las oscilaciones disminuya (debido al incremento de la fuerza centrífuga sobre la esfera). Estas tendencias se observan en la figura (c).

Problemas

19.65 El cilindro homogéneo se lanza al espacio con velocidad de giro ω. Encuentre el cociente h/R de manera que no ocurra precesión.

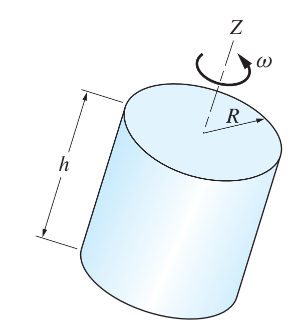


Fig. P19.65

19.66 El disco uniforme de 5 lb rota respecto al eje OA que está unido a un eje vertical mediante una horquilla. Si el disco rueda sin deslizarse sobre la superficie horizontal con rapidez angular de 20 rad/s, determine la reacción vertical entre el disco y la superficie horizontal. Observe que la trayectoria del disco es un círculo con radio de 8 pies que está centrado en O. Desprecie el peso del eje OA.

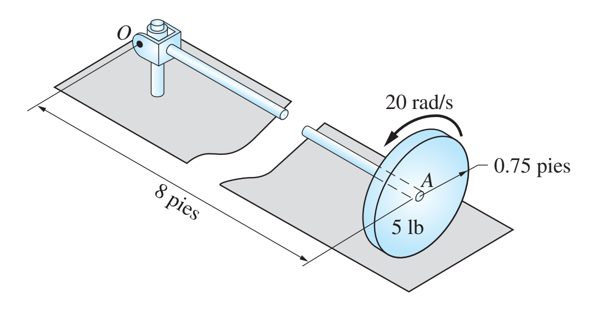


Fig. P19.66

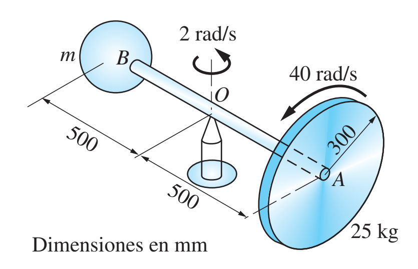


Fig. P19.67

19.67 El disco homogéneo de 25 kg gira respecto al eje AB a 40 rad/s. Al mismo tiempo, el eje rota respecto a la vertical en O a 2 rad/s. Obtenga la masa m del contrapeso en B que mantendrá al eje horizontal. Desprecie la masa del eje.

19.68 Se observa que el eje del aro delgado hace un movimiento de precesión a razón $\dot{\phi} = 10$ rad/s, siendo 5º el ángulo de precesión respecto al eje Z. Determine el vector de velocidad de giro y el vector de velocidad angular del aro.

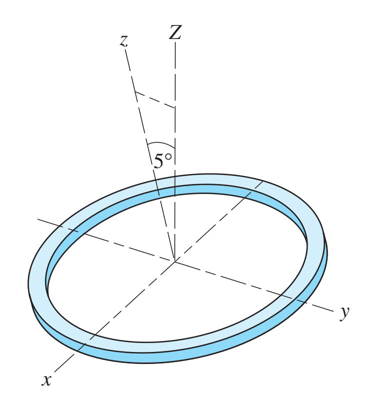


Fig. P19.68

19.69 El aeroplano vuela a 600 mi/h sobre la trayectoria circular de 2 mi de radio. El rotor del motor del jet pesa 500 lb y tiene un radio de giro de 1.2 pies respecto a su eje. El rotor gira a 15×10^3 rev/min con su vector de velocidad angular paralelo a la velocidad del avión. Calcule el momento giroscópico que actúa sobre el rotor.

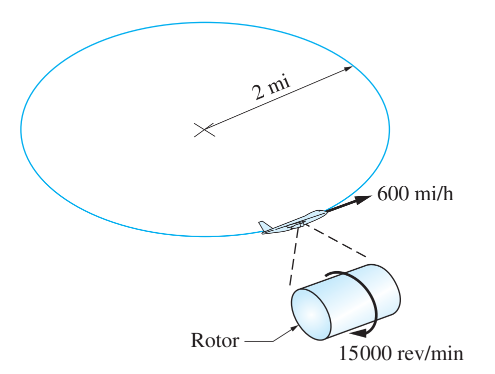


Fig. P19.69

19.70 Los dos discos delgados uniformes, cada uno de radio R y masa m, están unidos de manera rígida por medio de un eje de longitud L y masa despreciable. Cuando el ensamblado gira libremente en el mango en O con velocidad angular $\dot{\phi}$ = 3 rad/s, se observa que realiza un movimiento de precesión respecto al eje vertical con la razón $\dot{\phi}$ = 2 rad/s y θ = 32°. Encuentre el cociente L/R.

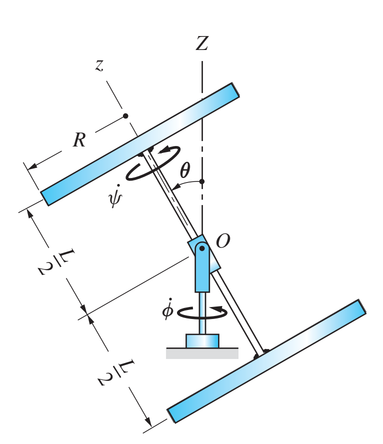


Fig. P19.70

19.71 El cilindro homogéneo de masa m, radio R y longitud R gira con velocidad angular ω_1 relativa a su eje, que está inclinado un ángulo θ con la vertical. El eje rota en el cojinete en B con velocidad angular ω_2. Determine el cociente ω_1/ω_2 de manera que no exista momento sobre el cilindro ejercido por el eje. Observe que el centro de masa G del cilindro está directamente arriba de O y suponga que $\theta \neq 0$ y $\omega_2 \neq 0$.

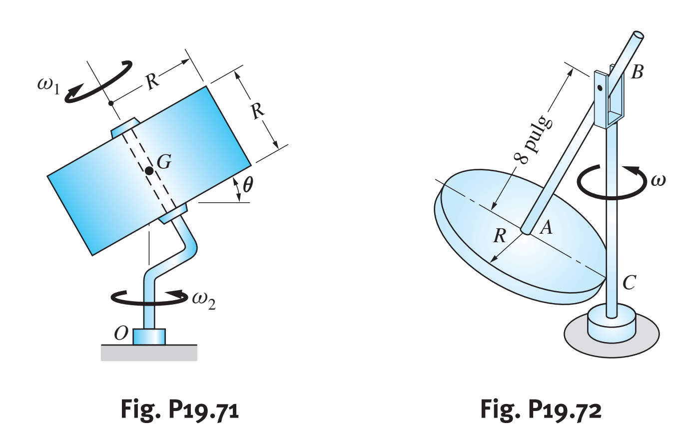


Fig. P19.71 **Fig. P19.72**

19.72 El peso del disco delgado uniforme es 8 lb y su radio es R = 4 pulg. La varilla ligera AB está rígidamente unida al disco en A y conectada mediante una horquilla al eje vertical BC. El ensamblado completo rota respecto a la vertical con velocidad angular constante ω = 4 rad/s. Calcule la fuerza normal que actúa entre el disco y el eje en C.

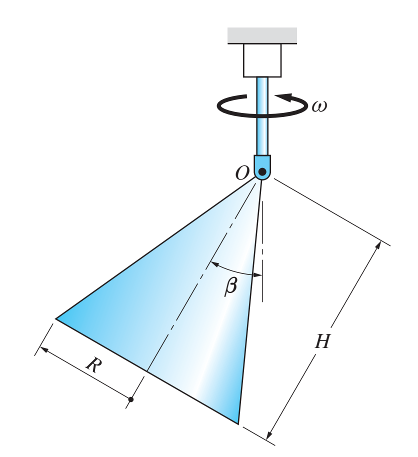


Fig. P19.73

19.73 El cono homogéneo de 2 kg de radio R = 62.5 mm y altura H = 125 mm está unido al eje vertical mediante una horquilla. El sistema está en reposo, excepto por una muy pequeña oscilación del cono respecto a la horquilla, cuando el eje empieza a rotar con aceleración angular constante α = 10 rad/s^2 (la velocidad angular correspondiente es $\omega = \alpha t$). (a) Demuestre que la ecuación de movimiento para el ángulo β es

$$\ddot{\beta} = 88.24t^2 \operatorname{sen}\beta \cos\beta - 92.33 \operatorname{sen}\beta \text{ rad/s}^2$$

y establezca las condiciones iniciales (no desprecie la pequeña oscilación inicial del cono). (b) Integre la ecuación de movimiento de $t = 0$ a $t = 3$ s. Utilice los resultados para obtener el tiempo en que el cono llega a la posición $\beta = \pi/2$. (c) Trace la gráfica β contra t para el periodo de integración. (d) ¿Qué ocurriría a la solución numérica si se despreciara el pequeño movimiento inicial del cono?

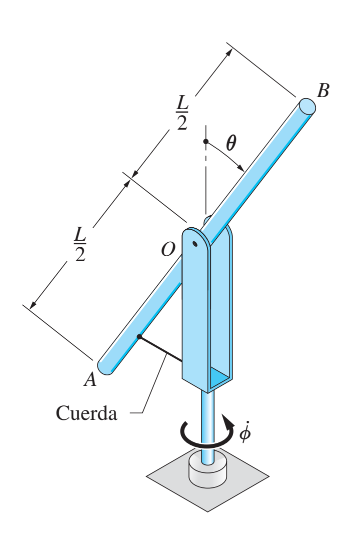


Fig. P19.74

19.74 La varilla delgada AB de masa m y longitud L está anclada en O a la horquilla unida al eje vertical. Es posible despreciar las masas de la horquilla y del eje. La cuerda mantiene a la varilla AB a un ángulo θ = 30º con la vertical. El eje rota

libremente con velocidad angular $\dot{\phi} = 200$ rad/s cuando la cuerda se corta súbitamente. (a) Pruebe que las ecuaciones que rigen el movimiento de la varilla después del corte son

$$\ddot{\theta} = \dot{\phi}^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta \quad \text{y} \quad \ddot{\phi} = -2\dot{\theta}\dot{\phi}\cot\theta$$

y establezca las condiciones iniciales. (b) Integre las ecuaciones del movimiento numéricamente para un periodo durante el cual la varilla realice al menos dos oscilaciones completas respecto al perno. De la solución numérica, encuentre el periodo de oscilación de la varilla, y el rango de valores de $\dot{\theta}$ y $\dot{\phi}$. (c) Trace la gráfica de θ y $\dot{\phi}$ contra el tiempo en el periodo de integración.

19.75 El cilindro homogéneo de 420 lb gira respecto a su eje AB con rapidez angular constante de 200 rad/s. Al mismo tiempo, la mesa de montaje rota respecto el eje vertical Z a razón constante de 1.0 rad/s. Determine las reacciones de los cojinetes en A y B.

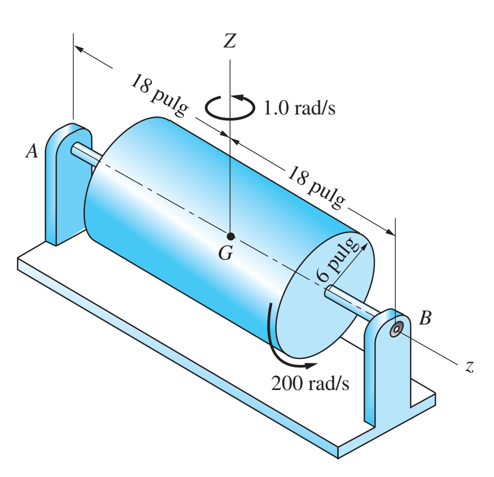


Fig. P19.75

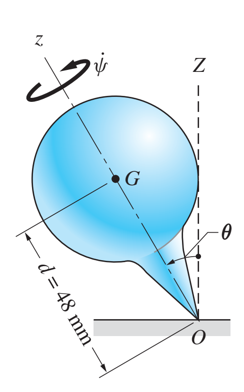
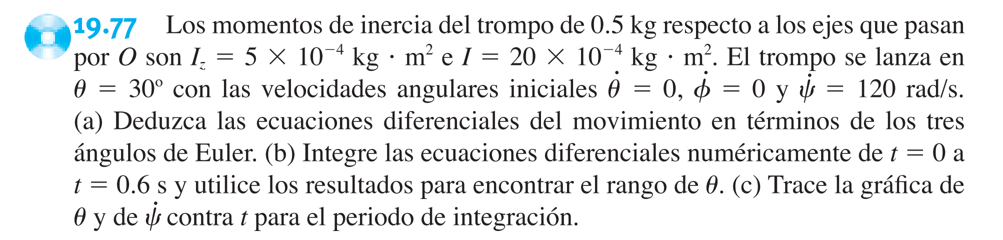


Fig. P19.76-P19.78

19.76 Los momentos de inercia del trompo respecto a los ejes que pasan por O son I_z e I. El peso del trompo es W y d es la distancia entre el centro de masa G y O. Demuestre que el trompo puede tener una precesión permanente en un ángulo dado $\theta \neq 0$ sólo cuando $\omega_z \geq (\omega_z)_{cr}$, donde $\omega_z \geq (\omega_z)_{\text{cr}}$, donde $(\omega_z)_{\text{cr}} = (2/I_z)\sqrt{IWd\cos\theta}$. [*Nota:* se dice que el trompo tiene *giro estabilizado* si $\omega_z \geq (\omega_z)_{cr}$.]



19.77 Los momentos de inercia del trompo de 0.5 kg respecto a los ejes que pasan por O son $I_z = 5 \times 10^{-4}$ kg · m^2 e $I = 20 \times 10^{-4}$ kg · m^2. El trompo se lanza en $\theta = 30°$ con las velocidades angulares iniciales $\dot{\theta} = 0$, $\dot{\phi} = 0$ y $\dot{\psi} = 120$ rad/s. (a) Deduzca las ecuaciones diferenciales del movimiento en términos de los tres ángulos de Euler. (b) Integre las ecuaciones diferenciales numéricamente de $t = 0$ a $t = 0.6$ s y utilice los resultados para encontrar el rango de θ. (c) Trace la gráfica de θ y de $\dot{\psi}$ contra t para el periodo de integración.

19.78 Se puede probar que la velocidad de precesión permanente del trompo que se describe en el problema 19.77 es $\dot{\phi} = 4.330$ rad/s cuando $\theta = 30°$ y $\dot{\psi} = 120$ rad/s. Suponga que la resistencia del aire causa un pequeño par de fricción $M_z = -\mu I_z \omega_z$ respecto al eje z, donde $\mu = 0.5$ s^{-1}. (a) Establezca las ecuaciones diferenciales del movimiento en términos de los tres ángulos de Euler. (b) Integre las ecuaciones nu-

méricamente de $t = 0$ a $t = 1.0$ s, con los valores de la precesión permanente como condiciones iniciales. A partir de los resultados, determine los valores inicial y final de ω_z. (c) Pruebe que la solución analítica para ω_z es $\omega_z = (\omega_z)_0 e^{-\mu t}$, donde $(\omega_z)_0$ es su valor inicial. Verifique que los valores de ω_z que se encontraron en la parte (b) concuerdan con este resultado. (d) Grafique θ y $\dot{\phi}$ contra t.

19.79 Debido a que el eje del proyectil no está alineado con su vector de velocidad, la fuerza aerodinámica resultante P pasa por el punto C que se localiza a una distancia d del centro de masa G. Determine la expresión para el valor menor de ω_z de manera que el proyectil tenga estabilización de giro. (Sugerencia: refiérase al resultado establecido en el problema 19.76).

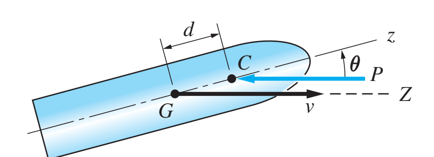


Fig. P19-79

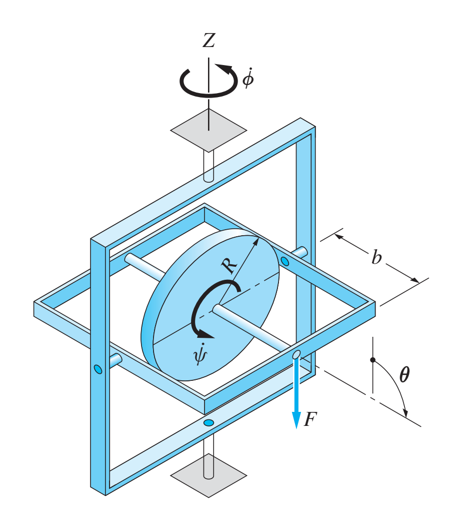
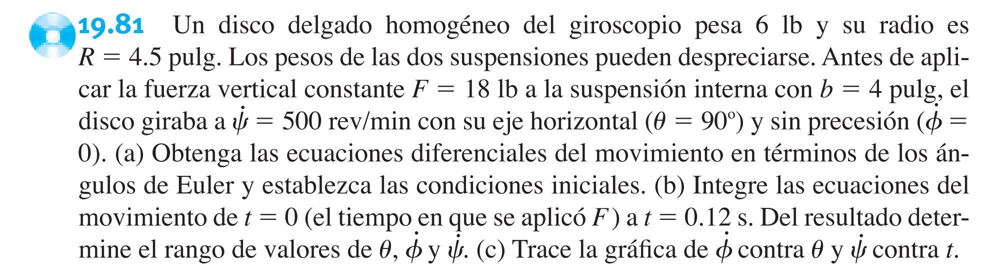


Fig. P19.80, P19.81

19.80 El giroscopio consiste en un disco delgado de radio R y masa m que se apoya en dos suspensiones de masa despreciable. Se aplica una fuerza vertical constante F a la suspensión interna. Suponiendo una precesión permanente con $\theta = 90°$, deduzca una expresión para $\dot{\phi}$ en términos de $\dot{\psi}$.



19.81 Un disco delgado homogéneo del giroscopio pesa 6 lb y su radio es $R = 4.5$ pulg. Los pesos de las dos suspensiones pueden despreciarse. Antes de aplicar la fuerza vertical constante $F = 18$ lb a la suspensión interna con $b = 4$ pulg, el disco giraba a $\dot{\psi} = 500$ rev/min con su eje horizontal ($\theta = 90°$) y sin precesión ($\dot{\phi} = 0$). (a) Obtenga las ecuaciones diferenciales del movimiento en términos de los ángulos de Euler y establezca las condiciones iniciales. (b) Integre las ecuaciones del movimiento de $t = 0$ (el tiempo en que se aplicó F) a $t = 0.12$ s. Del resultado determine el rango de valores de θ, $\dot{\phi}$ y $\dot{\psi}$. (c) Trace la gráfica de $\dot{\phi}$ contra θ y $\dot{\psi}$ contra t.

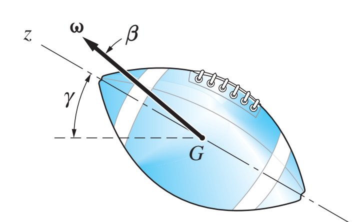


Fig. P19.82

19.82 El balón de futbol se lanza con velocidad angular $\omega = 12$ rad/s, dirigida con un ángulo $\beta = 5.2°$ con el eje z. Este último forma un ángulo inicial de $\gamma = 15°$ con la horizontal. (a) Si se supone que $\bar{I}_z = \bar{I}/4$ y se desprecia la resistencia del aire, encuentre el ángulo θ que localiza al eje de precesión y calcule las razones de giro y precesión. (b) Utilice un dibujo de los conos anclado y espacial para obtener el rango de γ durante el vuelo.

19.83 El satélite con simetría axial rota con velocidad angular $\omega = 0.6$ rad/s, dirigida con $\beta = 30°$ desde eje z. Dado que $\bar{I}_z = 2\bar{I}$, (a) determine el ángulo θ que localiza al eje de precesión y encuentre las razones de precesión y giro; y (b) dibuje los conos espacial y anclado.

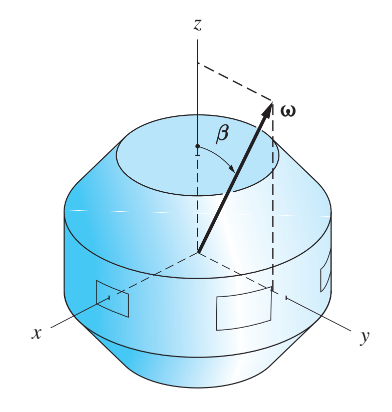


Fig. P19.83, P19.84

19.84 El satélite con simetría axial rota con el vector de velocidad angular ω, donde el ángulo β entre $\boldsymbol{\omega}$ y el eje z es muy pequeño. Demuestre que las razones de precesión y giro del satélite son $\dot{\phi} = \omega\bar{I}_z/\bar{I}$ y $\dot{\psi} = \omega(1 - \bar{I}_z/\bar{I})$, respectivamente.

19.85 El disco delgado homogéneo de radio R se lanza con velocidad de giro de 60 rad/s en la dirección que se muestra. Durante el vuelo, el eje del disco se tambalea a 30º respecto al eje vertical Z. (a) Determine la velocidad de precesión del disco. (b) Dibuje los conos espacial y anclado.

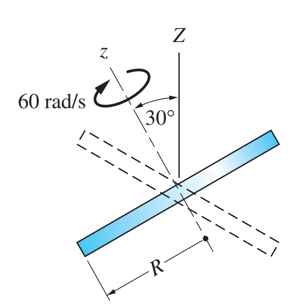


Fig. P19.85

19.86 Durante su vuelo libre, se observa que el cohete hace un movimiento de precesión permanente respecto al eje Z horizontal a razón de 1 ciclo cada 3 minutos. Si se sabe que los momentos de inercia respecto a los ejes que pasan por el centro de masa G están relacionados por $\bar{I} = 8\bar{I}_z$, calcule la magnitud y dirección del vector de velocidad angular del cohete.

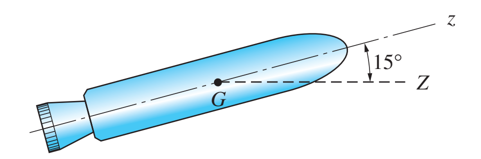


Fig. P19.86

19.87 Debido a que la Tierra está ligeramente aplanada en los polos, su momento de inercia $\bar{I}_z$ respecto al eje z (el eje de simetría) es ligeramente mayor que su momento de inercia $\bar{I}$ respecto a un diámetro ecuatorial. Además, su eje polar, respecto al cual rota a razón de una revolución por día, forma un pequeño ángulo β con el eje z. Si se sabe que los polos tienen un movimiento de precesión respecto el eje z a una razón aproximada de un ciclo completo cada 430 días, estime la razón $\bar{I}_z/\bar{I}$. (*Sugerencia:* al emplear las ecuaciones (19.53), asegúrese de identificar correctamente la variable que representa la velocidad de precesión de los polos respecto al eje z.)

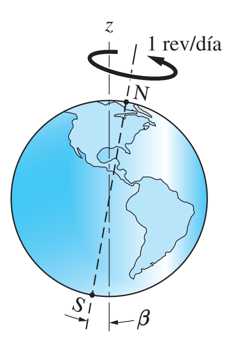


Fig. P19.87

Repaso de ecuaciones

Derivación de una función vectorial en un marco de referencia en rotación

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right)_{/\mathcal{B}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} \quad \text{(marco fijo en el cuerpo } \mathcal{B}\text{)}$$

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right)_{/x'y'z'} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} \quad \text{(marco en rotación } x'y'z'\text{)}$$

Componentes rectangulares de la cantidad de movimiento angular

$$h_x = I_x\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z$$

$$h_y = -I_{yx}\omega_x + I_y\omega_y - I_{yz}\omega_z \quad \text{(Respecto a un punto fijo o centro de masa)}$$

$$h_z = -I_{zx}\omega_x - I_{zy}\omega_y + I_z\omega_z$$

Energía cinética de un cuerpo rígido

$$T = \frac{1}{2}m\bar{v}^2 + \frac{1}{2}(\bar{I}_x\omega_x^2 + \bar{I}_y\omega_y^2 + \bar{I}_z\omega_z^2 - 2\bar{I}_{xy}\omega_x\omega_y - 2\bar{I}_{yz}\omega_y\omega_z - 2\bar{I}_{zx}\omega_z\omega_x)$$

Ecuaciones de momento del movimiento de Euler

$$\Sigma M_x = I_x\dot{\omega}_x + \omega_y\omega_z(I_z - I_y)$$

$$\Sigma M_y = I_y\dot{\omega}_y + \omega_z\omega_x(I_x - I_z) \quad \text{(los ejes } xyz \text{ son principales)}$$

$$\Sigma M_z = I_z\dot{\omega}_z + \omega_x\omega_y(I_y - I_x)$$

Ecuaciones de Euler modificadas

$$\Sigma M_x = I_x\dot{\omega}_x + I_z\Omega_y\omega_z - I_y\Omega_z\omega_y$$

$$\Sigma M_y = I_y\dot{\omega}_y - I_z\Omega_x\omega_z + I_x\Omega_z\omega_x \quad \text{(el eje } z \text{ es de simetría)}$$

$$\Sigma M_z = I_z\dot{\omega}_z + I_y\Omega_x\omega_y - I_x\Omega_y\omega_x$$

Precesión permanente de un cuerpo con simetría axial

$$\Sigma M_x = (I_z - I)\dot{\phi}^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta + I_z\dot{\phi}\dot{\psi}\operatorname{sen}\theta \qquad \Sigma M_y = \Sigma M_z = 0$$
$$\Sigma M_x = I_z\omega_z\dot{\phi}\operatorname{sen}\theta - I\dot{\phi}^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta \qquad \Sigma M_y = \Sigma M_z = 0$$

$\theta =$ ángulo de nutación,
$\dot{\phi} =$ velocidad de precesión
$\dot{\psi} =$ velocidad de giro



20

Vibraciones



La suspensión de un automóvil es el ejemplo de un sistema masa-resorte amortiguado, donde el amortiguador disminuye de manera progresiva de la intensidad de las vibraciones. Las vibraciones amortiguadas constituyen uno de los temas que se analizan en este capítulo. (© Leslie Garland Picture Library/Alamy)

20.1 Introducción

El término vibración se refiere a la oscilación de un cuerpo o sistema mecánico respecto a su posición de equilibrio. Algunas vibraciones son deseables, como la oscilación del péndulo que controla el movimiento de un reloj o la vibración de una cuerda en un instrumento musical. Sin embargo, la mayoría de ellas se consideran objetables o perjudiciales, desde las simplemente molestas (el ruido inducido por la vibración) hasta las catastróficas (el fallo estructural en una aeronave). La vibración excesiva en las máquinas o estructuras puede aflojar juntas y conexiones, y causar desgaste prematuro y fatiga del metal (rotura debido a carga cíclica).

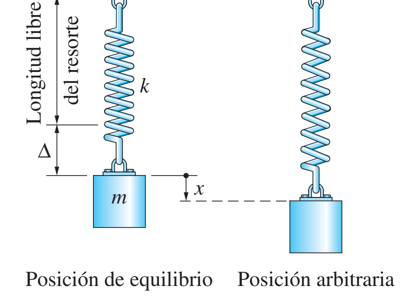
El estudio de las vibraciones es muy extenso y por tal motivo existen libros completos dedicados a este tema. Aquí la intención es presentar los fundamentos del tópico que todos los ingenieros deben entender y que sirven como precedente para estudios posteriores. Sólo se considera el caso más sencillo: la vibración de los sistemas de un grado de libertad, es decir, problemas en los que el movimiento puede describirse en términos de una sola coordenada de posición.

Las dos componentes básicas de todos los sistemas vibratorios son la masa y la fuerza restauradora. Es frecuente que un mecanismo elástico origine la fuerza restauradora, como un resorte, que tiende a que la masa del sistema regrese a su posición de equilibrio. Cuando la masa se desplaza de dicha posición y se libera, rebasa la posición de equilibrio, se detiene de manera momentánea e invierte su dirección. Esta oscilación entre dos posiciones estacionarias es un ejemplo sencillo del movimiento vibratorio. Si la fuerza restauradora es lineal, también la ecuación de movimiento resultante lo será y la solución correspondiente puede obtenerse por medios analíticos. Las fuerzas restauradoras no lineales originan ecuaciones diferenciales no lineales que en general se resuelven con métodos numéricos.

En términos generales, las vibraciones se clasifican como forzadas o libres y amortiguadas o no amortiguadas. Cuando una fuerza externa mantiene la vibración de un sistema se dice que esta última es *forzada*. Si no existen fuerzas externas que controlen el sistema se habla de vibración *libre*. Las vibraciones *amortiguadas* se refieren a un sistema en el que la energía se pierde por la fricción o por un amortiguador viscoso (resistencia causada por el arrastre viscoso de un fluido). Si no hay amortiguamiento, el movimiento se llama *no amortiguado*.

En el caso de las vibraciones libres no amortiguadas, no se suministra o disipa energía desde el sistema; en consecuencia, el movimiento continúa de manera indefinida, al menos en teoría. En realidad siempre existe algún amortiguamiento, aunque sea pequeño, que al final detendrá la vibración. En una vibración forzada, la oscilación puede continuar aun si hay amortiguamiento, ya que la fuerza que se aplica aporta energía al sistema que puede compensar cualquier otra que se pierda por el amortiguamiento.

Este capítulo inicia con un análisis de las vibraciones libres de las partículas, tanto amortiguadas como no amortiguadas, seguidas de las vibraciones forzadas de las partículas. El capítulo concluye con las vibraciones del cuerpo rígido y la aplicación de los métodos de energía.



(a)

$k(x + \Delta)$

mg = $m\ddot{x}$

DCL DMA

(b)

Fig. 20.1

20.2 Vibraciones libres de partículas

a. Vibraciones libres no amortiguadas

Considere el movimiento vertical del sistema masa-resorte que se muestra en la figura 20.1(a). La coordenada de posición x de la masa se mide hacia abajo desde la posición de equilibrio estático. Observe que en $x = 0$ la elongación del resorte es

$$\Delta = mg/k \tag{a}$$

La figura 20.1(b) representa el diagrama de cuerpo libre (DCL) y el diagrama de masa-aceleración (DMA) de la masa en una posición arbitraria. Las fuerzas en el DCL son el peso mg de la masa y la fuerza del resorte $k(x + \Box)$. El DMA contiene el vector de inercia $m\ddot{x}$ de la masa. La ecuación de movimiento de la masa es

$$\Sigma F_x = ma_x \quad \overset{+}{\downarrow} \quad mg - k(x + \Delta) = m\ddot{x}$$

Al sustituir para □ de la ecuación (a), la ecuación de movimiento se reduce a

$$m\ddot{x} + kx = 0 \tag{20.1a}$$

La fuerza kx se denomina *fuerza restauradora* porque tiende a hacer que la masa regrese a su posición de equilibrio. Al dividir la ecuación (20.1a) entre m, se obtiene

$$\ddot{x} + p^2 x = 0 \tag{20.1b}$$

donde

$$p = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{20.2}$$

La (20.1b) es una ecuación diferencial lineal de segundo orden. Su solución es

$$x = A \cos pt + B \operatorname{sen} pt \tag{20.3}$$

donde A y B son constantes de integración que se determinan mediante las condiciones iniciales. Al derivar de manera sucesiva a la ecuación (20.3) resulta

$$\dot{x} = p(-A \operatorname{sen} pt + B \cos pt) \tag{b}$$

$$\ddot{x} = -p^2(A \cos pt + B \operatorname{sen} pt) = -p^2 x \tag{c}$$

Al sustituir la ecuación (c) en la (20.1b), se tiene $-p^2x + p^2x = 0$, que comprueba la solución.

Otra forma conveniente para la solución se obtiene al establecer:

$$A = E \operatorname{sen} \alpha \qquad B = E \cos \alpha \tag{d}$$

Entonces la ecuación (20.3) se convierte en:

$$x = E(\cos pt \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} pt \cos \alpha)$$

que puede escribirse como

$$x = E \operatorname{sen}(pt + \alpha) \tag{20.4}$$

Ahora considere el caso en que las condiciones iniciales se dan en el tiempo $t = 0$. Al sustituir $t = 0$, $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = v_0$ en las ecuaciones (20.3) y (b), se obtiene

$$A = x_0 \qquad B = v_0 / p \tag{20.5}$$

Cuando se sustituyen las ecuaciones (20.5) por las ecuaciones (d) y se despeja a α y E resulta:

$$\tan \alpha = \frac{x_0 p}{v_0} \qquad E = \sqrt{x_0^2 + (v_0/p)^2} \tag{20.6}$$

En la figura 20.2 se muestra una representación gráfica de la ecuación (20.4). Considere el movimiento de un punto c a lo largo del círculo de radio E, la recta

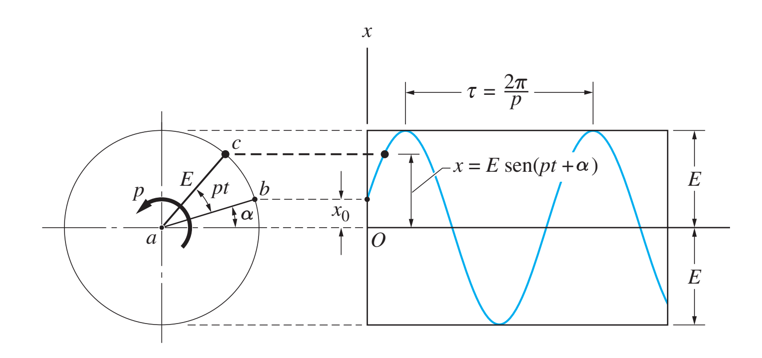


Fig. 20.2

radial *ac* tiene velocidad angular constante p. Si el punto parte en b en el tiempo $t = 0$, su posición vertical en el tiempo t es $x = E$ sen $(pt + \alpha)$, que es idéntica a la ecuación (20.4). Observe que E sen $\alpha = x_0$ representa la posición en $t = 0$.

La gráfica de x contra t en la figura 20.2 muestra que la masa oscila o vibra, respecto a su posición de equilibrio $x = 0$. Como el movimiento se repite a intervalos de tiempo iguales, entonces se le llama *movimiento periódico*. Además, el movimiento que se describe en términos de las funciones circulares, seno y coseno, se conoce como *movimiento armónico*. (Todo movimiento armónico es periódico, pero no todo el periódico es armónico.) El parámetro p se designa como la *frecuencia circular* (natural), E es la *amplitud* y α es el *ángulo de fase*. Como se muestra en la figura 20.2, τ denota el *periodo* del movimiento, es decir, el tiempo requerido para completar un ciclo del movimiento. Por tanto, $p\tau = 2\pi$, que da

$$\tau = \frac{2\pi}{p} \tag{20.7}$$

La *frecuencia* del movimiento es el número de ciclos completados por unidad de tiempo:

$$f = \frac{1}{\tau} = \frac{p}{2\pi} \tag{20.8}$$

La ecuación diferencial que describe el movimiento del sistema masa-resorte, ecuación (20.1a), es lineal porque la fuerza restauradora kx es una función lineal del desplazamiento x. A las vibraciones descritas por las ecuaciones diferenciales lineales se les llama *vibraciones lineales*.

Ejemplo de vibración libre no lineal

Como un ejemplo considere el péndulo simple que se representa en la figura 20.3(a), que consiste en una bola de masa m unida al extremo de una cuerda de longitud L y masa despreciable. El desplazamiento angular del péndulo respecto a la vertical se mide con el ángulo θ. El diagrama de cuerpo libre en la figura 20.3(b) indica que las fuerzas que actúan sobre la bola son la tensión T y su peso mg. Las componentes normal y tangencial (n-t) del vector de inercia se muestran en el diagrama de masa-aceleración en la figura 20.3(b). Observe que la fuerza restauradora; es decir, la que tiende a regresar el péndulo a su posición de equilibrio, es mg sen θ, que es una

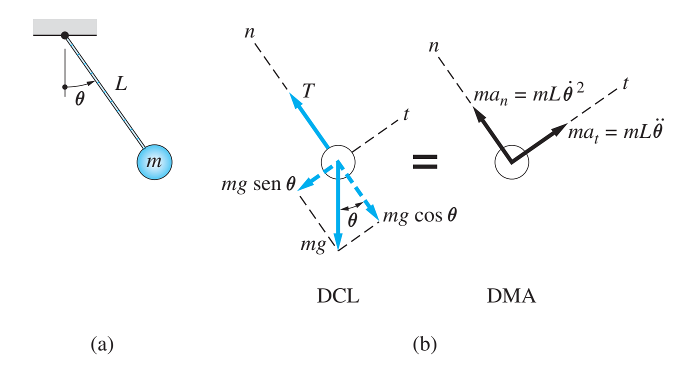


Fig. 20.3

función no lineal del desplazamiento angular θ. Al sumar las fuerzas en la dirección tangencial, se obtiene

$$\Sigma F_t = ma_t \quad +\nearrow \quad -mg \operatorname{sen} \theta = ma_t = mL\ddot{\theta}$$

es decir

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \operatorname{sen} \theta = 0 \tag{20.9}$$

La solución de esta ecuación diferencial no lineal debe obtenerse numéricamente. No obstante que el movimiento del péndulo es periódico, no es armónico; en otras palabras, la solución de la ecuación (20.9) no puede expresarse en términos de las funciones seno y coseno. Es posible obtener de manera aproximada el movimiento del péndulo con una solución armónica sólo si se supone que la amplitud de la vibración es pequeña. Al emplear sen $\theta \approx \theta$, una aproximación que en la mayoría de las aplicaciones es suficientemente exacta para $\theta < 6^{\circ}$, la ecuación (20.9) se reduce a

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0 \tag{20.10}$$

que tiene la misma forma que la ecuación (20.1a). Por tanto, el movimiento del péndulo simple es armónico para las oscilaciones pequeñas, siendo la frecuencia circular $p = \sqrt{g/L}$.

Muchos problemas de vibración son no lineales si la amplitud es grande, pero se simplifican a una forma lineal si se supone que la amplitud es suficientemente pequeña. Pero es preciso ser cuidadosos: no todos los problemas de vibración pueden linealizarse de esta manera; hay que demostrar que una ecuación lineal de movimiento es una aproximación válida para las amplitudes pequeñas.

b. Vibraciones libres amortiguadas

Cuando la energía se disipa de un sistema vibrante, se dice que el movimiento es *amortiguado*. Las formas comunes de amortiguamiento son la viscosa, la de Coulomb y la sólida. El amortiguamiento viscoso describe la resistencia al movimiento que es proporcional a la primera potencia de la velocidad. (Es frecuente suponer que el amortiguamiento incidental es viscoso, tal como la resistencia del aire. Sin embargo, una descripción más exacta sería una fuerza de amortiguamiento proporcional al cuadrado de la velocidad.) El amortiguamiento de Coulomb surge de la fricción seca entre las superficies deslizantes. El amortiguamiento sólido es causado por la fricción interna del propio cuerpo. En este libro sólo se considera el amortiguamiento viscoso.

En el amortiguamiento viscoso, la fuerza de amortiguamiento F_d es proporcional a la velocidad; es decir, $F_d = -cv$, en donde v es la velocidad y c es la constante de proporcionalidad, llamada *coeficiente de amortiguamiento viscoso*. El signo negativo indica que la fuerza de amortiguamiento siempre se opone a la velocidad. La dimensión de c es $[FT/L]$ con las unidades N · s/m o lb · s/pie.

Un ejemplo común de un amortiguador viscoso (también conocido como un *amortiguador de pistón*) es el automotriz. Cuando un automóvil pasa por un bache, los amortiguadores reciben la mayor parte del impacto, evitando así que las espiras de los resortes se cuelguen. También son los encargados de atenuar las oscilaciones del automóvil hacia arriba y abajo. Cada uno de ellos consiste en un pistón rodeado de aceite y montado entre la rueda y el chasis del vehículo. Conforme el pistón se mueve, se propicia que el aceite fluya de un lado al otro a través de un agujero. La cantidad de amortiguamiento (que se debe a la resistencia viscosa del aceite) depende mucho del tamaño del orificio que se utilice.

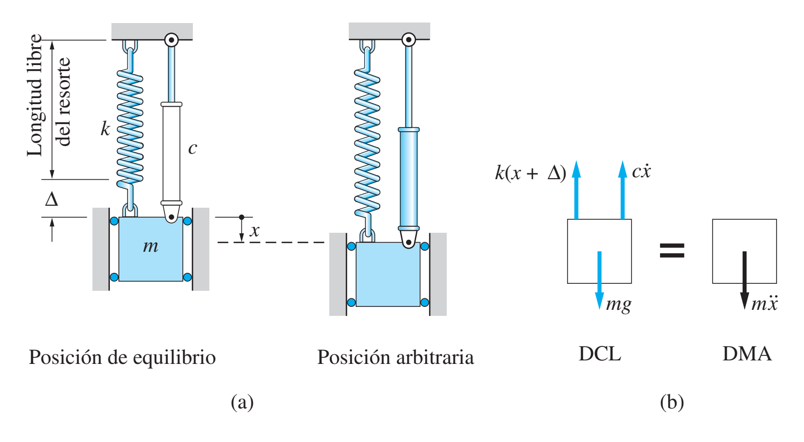


Fig. 20.4

La figura 20.4(a) muestra un sistema masa-resorte. Se ha añadido un amortiguador con coeficiente de amortiguamiento c. Al elegir x como el desplazamiento hacia abajo de la masa, medido desde su posición de equilibrio, resulta el DCL de la figura 20.4(b), donde □ es la deflexión estática del resorte. En la figura 20.4(b), el diagrama de masa-aceleración consiste en el vector de inercia $m\ddot{x}$. La ecuación diferencial de movimiento es

$$\Sigma F_x = ma_x \quad \overset{+}{\downarrow} \quad mg - k(x + \Delta) - c\dot{x} = m\ddot{x}$$

Al utilizar la ecuación de equilibrio $mg - k$□ $= 0$, se obtiene

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \tag{20.11}$$

Una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes, como la ecuación (20.11), admite una solución de la forma

$$x = Ae^{\lambda t}$$

donde A y λ son constantes. Al sustituir esto en la ecuación (20.11) y dividir cada término entre $Ae^{\lambda t}$ se obtiene la *ecuación característica*

$$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0 \tag{20.12}$$

cuyas raíces son

$$\left.\begin{matrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{matrix}\right\} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \tag{20.13}$$

El *coeficiente de amortiguamiento crítico* c_{cr} se define como el valor de c para el que el radical en la ecuación (20.13) se convierte en cero. Por tanto, se encuentra que

$$c_{cr} = 2mp \tag{20.14}$$

donde $p = \sqrt{k/m}$, la frecuencia circular no amortiguada del sistema. Es conveniente presentar el *factor de amortiguamiento* ζ, que se define como la razón del amortiguamiento real para el amortiguamiento crítico; es decir,

$$\zeta = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2mp} = \frac{c}{2\sqrt{km}} \tag{20.15}$$

Ahora la ecuación (20.13) puede escribirse en la forma

$$\left.\begin{matrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{matrix}\right\} = p\left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\right) \tag{20.16}$$

La solución general de la ecuación (20.11) es cualquier combinación lineal de las dos soluciones correspondientes a λ_1 y λ_2:

$$x = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$$

donde A_1 y A_2 son constantes arbitrarias. Después de la sustitución para las λ de la ecuación (20.16), la solución queda como

$$x = A_1 e^{\left(-\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)pt} + A_2 e^{\left(-\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)pt} \tag{20.17}$$

Existen tres categorías de amortiguamiento, determinadas por el valor del factor de amortiguamiento ζ.*

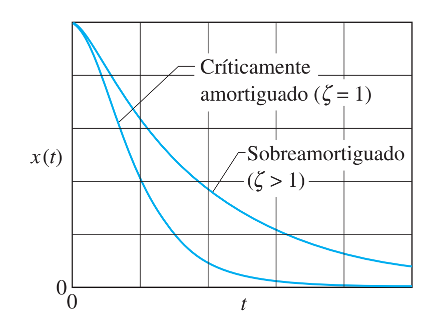
1 ***Sobreamortiguamiento:*** $\zeta > 1$ Las raíces λ_1 y λ_2 en la ecuación (20.16) son reales y distintas. En consecuencia, el movimiento es no oscilatorio y decae con el tiempo, como se muestra en la figura 20.5. Al movimiento de este tipo se le llama *aperiódico* o de *oscilación amortiguada*.

2 ***Amortiguamiento crítico:*** $\zeta = 1$ Las raíces λ_1 y λ_2 en la ecuación (20.16) son iguales a $-p$ y la solución en la ecuación (20.17) da

$$x = (A_1 + A_2 t)e^{-pt} \tag{20.18}$$

donde A_1 y A_2 son constantes arbitrarias. Otra vez, el movimiento es aperiódico, como se muestra en la figura 20.5.

*Aquí se establecen las tres formas de solución sin prueba. Para un análisis completo, véase algún libro sobre ecuaciones diferenciales.



Ambas curvas dibujadas para la condición inicial $\dot{x}_0 = 0$

Fig. 20.5

3 *Subamortiguamiento:* $\zeta < 1$ Las raíces λ_1 y λ_2 en la ecuación (20.16) son complejos conjugados. Es posible demostrar que la ecuación (20.17) adquiere la forma

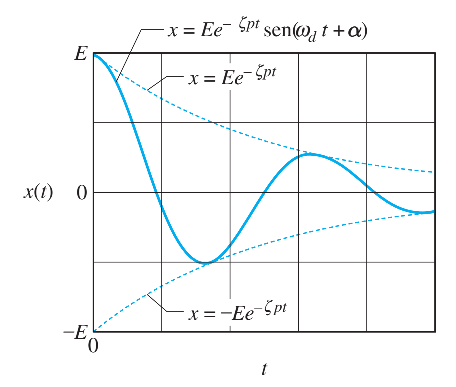


Fig. 20.6

$$x = Ee^{-\zeta pt}\,\mathrm{sen}(\omega_d t + \alpha) \tag{20.19}$$

donde E y α son constantes arbitrarias y

$$\omega_d = p\sqrt{1-\zeta^2} \tag{20.20}$$

El movimiento que se representa con la ecuación (20.19) es oscilatorio con amplitud decreciente, como se indica en la figura 20.6 (la gráfica corresponde a $\alpha = 0$). Observe que la gráfica es tangente a las curvas $x = \pm E\,e^{-\zeta pt}$. No obstante que el movimiento no se repite, a ω_d se le llama *frecuencia circular amortiguada* y el *periodo amortiguado* correspondiente está dado por

$$\tau_d = \frac{2\pi}{\omega_d} \tag{20.21}$$

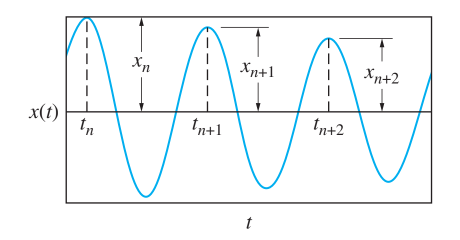


Fig. 20.7

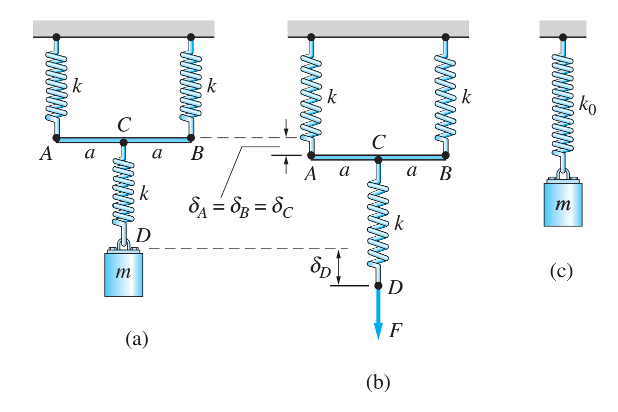
De acuerdo con la ecuación (20.20), la frecuencia circular amortiguada ω_d es menor que la frecuencia circular p. En consecuencia, el periodo amortiguado τ_d es mayor que el periodo de la vibración libre no amortiguada.

Sean $x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots$ los picos del desplazamiento (medidos desde la posición de equilibrio) de un sistema subamortiguado, como se muestra en la figura 20.7. Se puede demostrar que la razón x_{n+1}/x_n de dos picos sucesivos es constante. El logaritmo natural de esta razón, llamado *decremento logarítmico*, es (véase el problema 20.16)

$$\ln\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = -\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \tag{20.22}$$

Problema de ejemplo **20.1**

Tres resortes idénticos, cada uno de rigidez k, soportan un bloque de masa m, como se muestra en la figura (a). Se puede despreciar la deformación de la barra AB. 1. Encuentre la rigidez k_0 equivalente del resorte, es decir, la de un solo resorte como se indica en la figura (c), que puede reemplazar a los resortes originales sin cambiar las características de desplazamiento del bloque. 2. Si este último pesa 0.5 lb y $k =$ 60 lb/pie, obtenga la frecuencia circular, la frecuencia y periodo de vibración libre.



Solución

Parte 1

La figura (b) muestra un método para calcular la rigidez equivalente del resorte. Primero, se aplica una fuerza vertical estática F al punto D y se calcula el movimiento vertical δ_D. La rigidez k_0 equivalente del resorte se obtiene al usar $F = k_0\delta_D$. Siguiendo este procedimiento, la masa en la figura (c) tendrá las mismas características de desplazamiento que la masa en la figura (a).

En el análisis de equilibrio de la figura (b) se observa que las fuerzas del resorte son iguales a F en el resorte inferior y a $F/2$ en cada uno de los superiores (C es el punto medio de la barra AB). Las elongaciones de los resortes superiores son, por tanto, idénticas y cada uno de los desplazamientos verticales δ_A, δ_B y δ_C es igual a $(F/2)/k$ (observe que la barra AB permanece horizontal). Ahora se tiene que el movimiento vertical de D es igual al de C más la elongación del resorte inferior; es decir, $\delta_D = \delta_C + (F/k)$. Así, la rigidez equivalente del resorte queda

$$k_0 = \frac{F}{\delta_D} = \frac{F}{\delta_C + (F/k)} = \frac{F}{(F/2k) + (F/k)}$$

$$= \frac{1}{(1/2k) + (1/k)} = \frac{2k}{3} \qquad \textit{Respuesta}$$

Parte 2

Con los datos que se han proporcionado y el sistema equivalente que se muestra en la figura (c), la frecuencia circular, la frecuencia y el periodo de vibración libre son

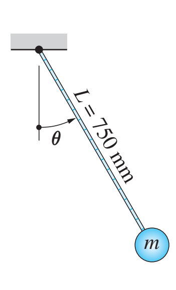
$$p = \sqrt{\frac{k_0}{m}} = \sqrt{\frac{2k/3}{m}} = \sqrt{\frac{2(60)/3}{0.5/32.2}} = 50.75 \text{ rad/s} \qquad \textit{Respuesta}$$

$$f = \frac{p}{2\pi} = \frac{50.75}{2\pi} = 8.077 \text{ Hz}$$ *Respuesta*

$$\tau = \frac{1}{f} = \frac{1}{8.077} = 0.1238 \text{ s}$$ *Respuesta*

 Problema de ejemplo **20.2**

El péndulo simple consiste en una pequeña bola de masa m unida al extremo de una cuerda. El péndulo se suelta del reposo cuando $\theta = 30^\circ$. Con la integración numérica de la ecuación diferencial de movimiento, calcule: 1. el periodo de oscilación y 2. la velocidad angular máxima. Compare la velocidad angular máxima con el valor exacto obtenido con el método de trabajo-energía.



Solución

Parte 1

Como el péndulo es un sistema conservativo, oscila entre $\theta = \pm 30^\circ$. El movimiento es periódico, pero no es armónico porque θ no es un ángulo pequeño, es decir, no es menor que 6º. El periodo del péndulo se calcula al observar que el tiempo que utiliza para viajar desde la posición inicial ($\theta = 30^\circ$) a la posición vertical ($\theta = 0$) es igual a un cuarto del periodo.

De la ecuación (20.9), la ecuación diferencial de movimiento es $\ddot{\theta} = -(g/L) \text{ sen } \theta = -(9.81/0.750) \text{ sen } \theta = -13.080 \text{ sen } \theta$. Las ecuaciones de primer orden equivalentes son

$$\dot{\theta} = \omega \qquad \dot{\omega} = -13.080 \,\text{sen}\, \theta$$

con las condiciones iniciales $\theta = 30^\circ = \pi/6$ rad y $\omega = 0$ en $t = 0$ (el tiempo en que se suelta). El intervalo de integración se extiende desde $t = 0$ hasta el tiempo en que por primera vez $\theta = 0$. Es posible obtener una estimación del periodo con la ecuación diferencial linealizada, la (20.10): $\ddot{\theta} + (g/L)\theta = 0$. De la ecuación (20.7) se obtiene que $\tau = 2\pi/p = 2\pi/\sqrt{g/L} = 2\pi/\sqrt{9.81/0.75} = 1.737$ s. Para estar en terreno seguro, el periodo de integración para el problema no lineal debería ser algo mayor que 1.737/4. En el programa en MATLAB que se muestra a continuación se utilizó 0.45 s.

```
function example20_3
[t,x] = ode45(@f,[0:0.01:0.45],[pi/6 0]);
printSol(t,x)
    function dxdt = f(t,x)
    dxdt = [x(2); -13.080*sin(x(1))];
    end
end
```

Las dos últimas líneas de salida (x1 corresponde a θ) fueron

```
     t              x1              x2
  4.4000e-001  3.5331e-003   -1.8721e+000
  4.5000e-001  -1.5186e-002  -1.8713e+000
```

El valor de t cuando $\theta = 0$ ahora puede obtenerse por interpolación lineal:

$$\frac{-0.015\,186 - 0.003\,533\,1}{0.45 - 0.44} = \frac{0 - 0.003\,533\,1}{t - 0.44}$$

que da $t = 0.4419$ s para un cuarto de periodo. Por tanto, el periodo es

$$\tau = 4(0.4419) = 1.768\text{ s}$$ *Respuesta*

Parte 2

La velocidad angular máxima (x2 en los resultados impresos) ocurre cuando $\theta = 0$. Por inspección, se observa que

$$\left|\dot{\theta}\right|_{max} = 1.872\text{ rad/s}$$ *Respuesta*

Para calcular el valor exacto de $\dot{\theta}_{max}$ con el método de trabajo-energía, se denota a las posiciones $\theta = \pi/6$ rad y $\theta = 0$ con los subíndices 1 y 2, respectivamente. Las energías cinéticas correspondientes son $T_1 = 0$ (el péndulo se encuentra estacionario en la posición 1) y $T_2 = (1/2)m(L\dot{\theta}_{max})^2$, donde $L\dot{\theta}_{max}$ es la velocidad del péndulo en la posición 2. El trabajo efectuado por el peso de la masa conforme se mueve de la posición 1 a la 2 es $U_{1-2} = mg(L - L\cos\theta) = mgL[1 - \cos(\pi/6)]$, porque la distancia vertical entre las dos posiciones es igual a $L - L\cos\pi/6$. Al aplicar el principio de trabajo-energía, se obtiene

$$U_{1-2} = T_2 - T_1$$

$$mgL\left(1 - \cos\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}m(L\dot{\theta}_{max})^2 - 0$$

de donde se encuentra el valor de $\dot{\theta}_{max}$:

$$\dot{\theta}_{max} = \sqrt{\frac{2g}{L}\left(1 - \cos\frac{\pi}{6}\right)} = \sqrt{\frac{2(9.81)}{0.750}\left(1 - \cos\frac{\pi}{6}\right)}$$

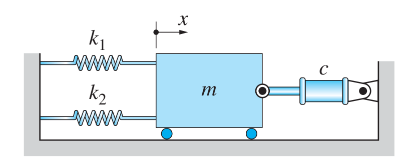
$$= 1.872\text{ rad/s} \quad \text{(en sentido de las manecillas del reloj)}$$

Se observa que el valor para $\dot{\theta}_{max}$ que se ha obtenido por integración numérica concuerda con el resultado anterior con los cuatro dígitos significativos utilizados, con lo que se comprueba la exactitud de la integración numérica.

Es útil notar que, no obstante que la velocidad angular en cualquier posición puede calcularse de manera analítica, el tiempo de viaje entre dos posiciones debe obtenerse numéricamente.

Problema de ejemplo **20.3**

El bloque de masa m que se muestra en la figura (a) está en reposo en la posición de equilibrio en $x = 0$ cuando recibe un impulso que resulta en la velocidad inicial $\dot{x}(0) = v_0$. 1. Deduzca la ecuación diferencial de movimiento para el bloque. Si se supone que el sistema está críticamente amortiguado, determine: 2. el coeficiente de amortiguamiento c, y 3. el desplazamiento máximo del bloque.



(a)

Solución

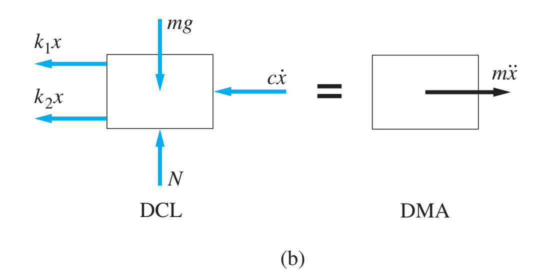
Parte 1

En la figura (b) se muestran los diagramas de cuerpo libre (DCL) y de masa-aceleración (DMA) del bloque en una posición arbitraria. Las fuerzas que actúan sobre la masa son su peso mg, la reacción normal resultante N, las dos fuerzas de resorte y la fuerza ejercida por el amortiguador. La ecuación diferencial de movimiento en la dirección x es

$$\Sigma F_x = ma_x \quad \xrightarrow{+} \quad -k_1 x - k_2 x - c\dot{x} = m\ddot{x}$$

o

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + (k_1 + k_2)x = 0 \qquad \textit{Respuesta} \quad \text{(a)}$$



(b)

Parte 2

Al comparar la ecuación (a) con la (20.11), se deduce que la frecuencia circular no amortiguada es

$$p = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} \qquad \text{(b)}$$

Por tanto, el coeficiente de amortiguamiento crítico es, véase la ecuación (20.14),

$$c = c_{cr} = 2mp = 2m\sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} = 2\sqrt{m(k_1 + k_2)} \qquad \textit{Respuesta}$$

Parte 3

El desplazamiento del bloque está dado por la ecuación (20.18)

$$x = (A_1 + A_2 t)e^{-pt} \qquad \text{(c)}$$

Por tanto, la velocidad es

$$\dot{x} = A_2 e^{-pt} - p(A_1 + A_2 t)e^{-pt} \qquad \text{(d)}$$

Al sustituir las condiciones iniciales $x = 0$ y $\dot{x} = v_0$ en $t = 0$ en las ecuaciones (c) y (d) resulta que $A_1 = 0$ y $A_2 = v_0$. En consecuencia,

$$x = v_0 t e^{-pt} \qquad \dot{x} = v_0(1 - pt)e^{-pt}$$

El desplazamiento máximo ocurre cuando $\dot{x} = 0$ que sucede en el tiempo $t = 1/p$. Por tanto, el desplazamiento máximo es

$$x_{\max} = \frac{v_0}{p} e^{-1} = 0.368 v_0 \sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}} \qquad \textit{Respuesta}$$

Problema de ejemplo **20.4**

El sistema que se muestra en la figura (a) del problema de ejemplo 20.3 está subamortiguado, con el factor de amortiguamiento $\zeta = 0.25$. Si las condiciones iniciales sobre el movimiento del bloque son $x = 0$ y $\dot{x} = 4$ m/s, determine el desplazamiento del bloque en el tiempo $t = 0.1$ s. Utilice los datos $m = 0.2$ kg, $k_1 = 20$ N/m y $k_2 = 30$ N/m.

Solución

El movimiento de un sistema subamortiguado se describe con la ecuación (20.19):

$$x = E e^{-\zeta p t} \operatorname{sen}(\omega_d t + \alpha)$$

donde E y α deben determinarse a partir de las condiciones iniciales. De la ecuación (b) del problema de ejemplo 20.3, se tiene

$$p = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} = \sqrt{\frac{20 + 30}{0.2}} = 15.811 \text{ rad/s}$$

Por tanto $\zeta p = 0.25(15.811)=3.953$ rad/s. La frecuencia circular amortiguada está dada por la ecuación (20.20):

$$\omega_d = p\sqrt{1 - \zeta^2} = 15.811\sqrt{1 - 0.25^2} = 15.309 \text{ rad/s}$$

Por tanto, el desplazamiento y la velocidad del bloque son

$$x = E e^{-3.953t} \operatorname{sen}(15.309t + \alpha)$$
$$\dot{x} = E e^{-3.953t} [15.309 \cos(15.309t + \alpha) - 3.953 \operatorname{sen}(15.309t + \alpha)]$$

Al aplicar las condiciones iniciales resulta

$$x(0) = E \operatorname{sen} \alpha = 0$$
$$\dot{x}(0) = E(15.309 \cos \alpha - 3.953 \operatorname{sen} \alpha) = 4 \text{ m/s}$$

La solución es $\alpha = 0$ y $E = 4/15.309 = 0.2613$ m. En consecuencia, el desplazamiento es

$$x = 0.2613 e^{-3.953t} \operatorname{sen} 15.309t \text{ m}$$

Al sustituir $t = 0.1$ s, se obtiene

$$x(0.1) = 0.2613 e^{-0.3953} \operatorname{sen} 1.5309 = 0.1758 \text{ m} \qquad \textit{Respuesta}$$

Problemas

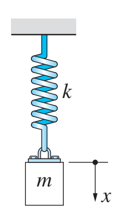


Fig. P20.1, P20.2

20.1 La masa $m = 10$ kg está suspendida de un resorte ideal de rigidez $k = 250$ N/m. Si se pone en movimiento en $t = 0$ con las condiciones iniciales $x_0 = 40$ mm y $v_0 = -80$ mm/s, calcule: (a) la amplitud del movimiento y (b) el tiempo en que se detiene por primera vez. Suponga que x se mide desde la posición de equilibrio de la masa.

20.2 La masa m está suspendida de un resorte ideal de rigidez k y se pone en movimiento con las condiciones iniciales $x_0 = 7$ mm y $v_0 = 1.5$ m/s. Suponga que x se mide desde la posición de equilibrio de la masa. Si la amplitud de la vibración es 12 mm, determine: (a) la frecuencia y (b) x como una función del tiempo.

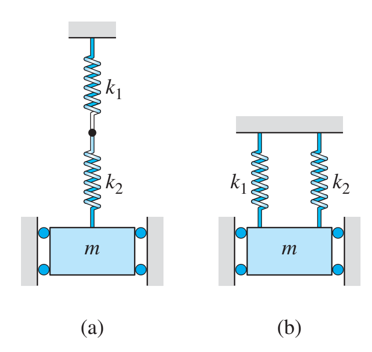


Fig. P20.3

20.3 La masa m está suspendida de dos resortes de rigidez k_1 y k_2. Obtenga la expresión para la frecuencia circular de la masa si los resortes se han dispuesto como se indica en (a) y (b).

20.4 Un bloque de masa m está suspendido de tres resortes con rigidez k_1 y k_2 como se muestra. La frecuencia de vibración de este sistema es 5 Hz. Después de eliminar el resorte central, la frecuencia desciende a 3.6 Hz. Determine la razón k_2/k_1.

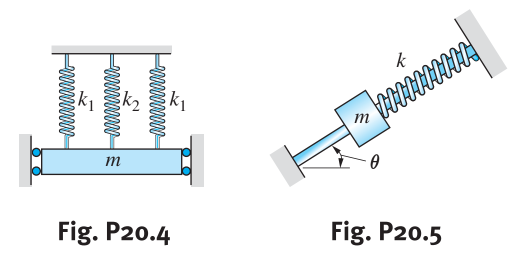


Fig. P20.4 **Fig. P20.5**

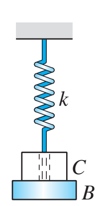


Fig. P20.6, P20.7

20.5 La masa m del sistema masa-resorte se desliza con fricción despreciable sobre la varilla inclinada. Al deducir la ecuación diferencial de movimiento para la masa, pruebe que la frecuencia de vibración es independiente del ángulo θ.

20.6 Cuando sólo la masa B está unida al resorte ideal, la frecuencia del sistema es de 3.90 Hz. Cuando se agrega la masa C, la frecuencia disminuye a 2.55 Hz. Obtenga la razón m_B/m_C de las dos masas.

20.7 El resorte ideal de rigidez $k = 120$ lb/pie está conectado a la masa B a través de un agujero en la masa C. Los pesos de B y C son 0.4 lb y 0.8 lb, respectivamente. Encuentre la amplitud de la vibración más pequeña de manera que C pierda contacto con B. ¿Se alteraría el resultado si se intercambiaran los pesos de B y C?

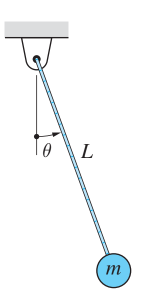


Fig. P20.8

20.8 El péndulo simple se libera a partir del reposo en $\theta = \theta_0$. Determine las expresiones para los valores máximos de $\dot{\theta}$ y $\ddot{\theta}$ (a) si se supone que θ es pequeño (movimiento armónico simple) y (b) sin hacer simplificaciones. (c) Compare las expresiones que se encuentran en (a) y (b) para $\theta_0 = 5°$, $10°$ y $15°$.

20.9 Una pequeña polea soporta un bloque de masa m. Un extremo del cable que pasa por la polea está unido a un soporte fijo, mientras que el otro está conectado a un resorte. Determine la frecuencia circular p del sistema. Desprecie la masa de la polea.

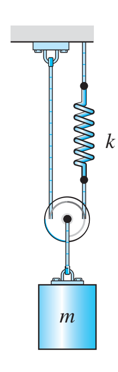


Fig. P20.9

20.10 La figura muestra dos cuerdas elásticas, cada una de longitud L, conectadas a una pequeña bola de masa m que se desliza sobre una superficie horizontal lisa. Las cuerdas se estiran con una tensión inicial T entre soportes rígidos. A la bola se le da un pequeño desplazamiento $x = x_0$ perpendicular a las cuerdas y después se libera a partir del reposo en el tiempo $t = 0$. Deduzca la ecuación de movimiento para la bola y pruebe que ésta efectúa un movimiento armónico simple.

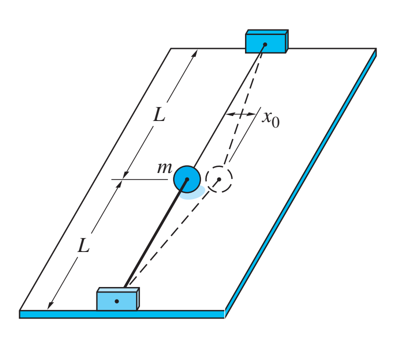


Fig. P20.10

20.11 El metrónomo consiste en una pequeña masa de 0.2 kg unida al brazo OA. El periodo de oscilación del metrónomo puede ajustarse al cambiar la distancia L. Determine el valor de L de manera que el periodo sea 1.0 s para las amplitudes pequeñas. Desprecie la masa del brazo OA.

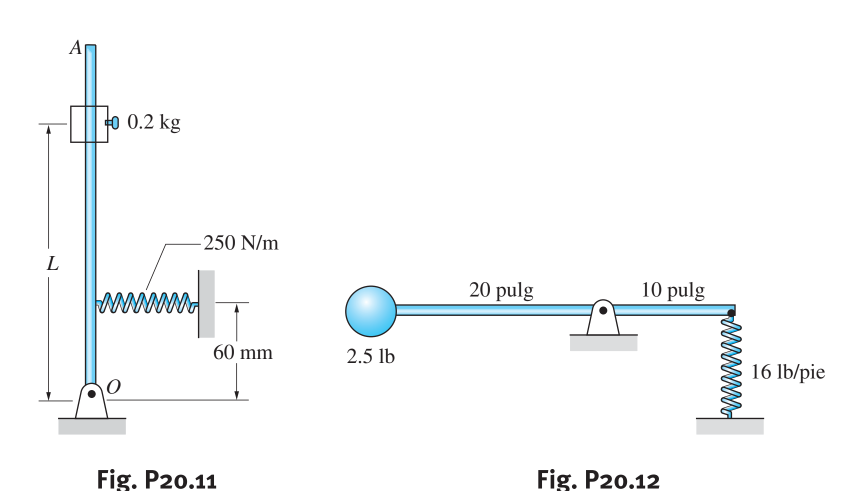
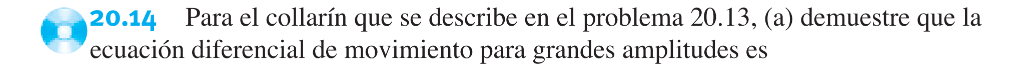


Fig. P20.11 **Fig. P20.12**

20.12 El sistema está en equilibrio en la posición que se muestra. Encuentre el periodo de vibración para las amplitudes pequeñas. Desprecie el peso de la varilla y el tamaño del peso de 2.5 lb.

20.13 Dos resortes idénticos de longitud libre L_0 y rigidez k están unidos al collarín de peso W. Es posible despreciar la fricción entre el collarín y la varilla horizontal. Si se suponen amplitudes pequeñas, (a) deduzca la ecuación diferencial de movimiento y (b) encuentre la frecuencia dado que $W = 0.2$ lb, $L_0 = 4$ pulg, $b = 6$ pulg y $k = 0.4$ lb/pulg.

20.14 Para el collarín que se describe en el problema 20.13, (a) demuestre que la ecuación diferencial de movimiento para grandes amplitudes es



$$\ddot{x} = -\frac{2gk}{W}\left(1 - \frac{L_0}{\sqrt{b^2 + x^2}}\right)x$$

(b) Utilizando los datos que se dieron en el problema 20.13, determine el periodo si la amplitud es de 6 pulg.

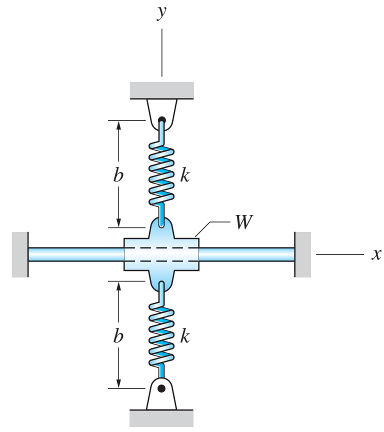


Fig. P20.13, P20.14

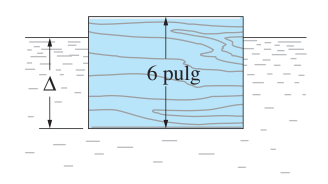


Fig. P20.15

***20.15** Un bloque de madera flota en el agua en la posición de equilibrio estable que se muestra. Se desplaza ligeramente en la dirección vertical y se libera. Deduzca la ecuación diferencial de movimiento y pruebe que el movimiento del bloque es armónico simple. Encuentre el periodo, si se sabe que las densidades de la madera y del agua son 0.022 lb/pulg^3 y 0.036 lb/pulg^3, respectivamente.

20.16 Deduzca la ecuación (20.22): $\ln(x_{n+1}/x_n) = -2\pi\zeta \big/ \sqrt{1-\zeta^2}$.

20.17 (a) Con la expresión para el decremento logarítmico, pruebe que

$$\ln(x_{n+k}/x_n) = -\frac{2k\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

donde k es un entero positivo mayor que 1. (b) Utilizando el resultado de la parte (a), estime el factor de amortiguamiento ζ para un sistema que tiene la curva desplazamiento contra tiempo que se muestra en la figura.

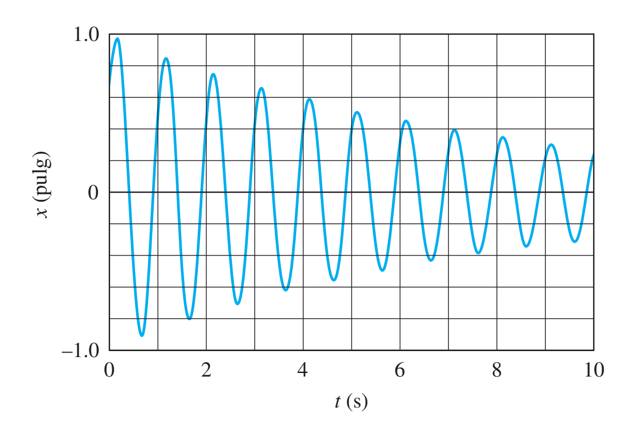


Fig. P20.17

20.18 Un oscilador consiste en un peso de 14 lb que está conectado a un resorte de rigidez $k = 16$ lb/pulg y un amortiguador viscoso con la constante de amortiguamiento $c = 8$ lb · s/pie. (a) Demuestre que el oscilador está subamortiguado. (b) Determine la razón x_{n+1}/x_n de dos picos sucesivos de desplazamiento.

20.19 (a) Utilice el decremento logarítmico para demostrar que la relación entre □E, el porcentaje de energía perdida por ciclo y el factor de amortiguamiento ζ de un oscilador subamortiguado es

$$\Delta E = \left(1 - e^{-4\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \times 100\%$$

(b) Empleando los resultados de la parte (a), calcule el factor de amortiguamiento que causaría una pérdida de 10% de energía por ciclo.

20.20 Calcule el coeficiente de amortiguamiento c si el sistema que se muestra debe estar críticamente amortiguado.

20.21 El sistema que se muestra está subamortiguado con un periodo amortiguado τ_d. Cuando se elimina el amortiguador, el periodo cambia a $0.5\tau_d$. ¿Cuál es el coeficiente de amortiguamiento c?

20.22 La masa de 3 kg tiene un desplazamiento inicial de $x(0) = 0.01$ m y una velocidad inicial de $\dot{x}(0) = -0.2$ m/s. Si se sabe que el sistema está críticamente amortiguado, determine el desplazamiento de la masa cuando $t = 0.1$ s.

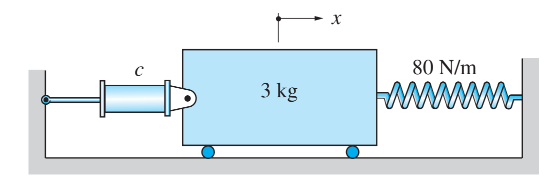


Fig. P20.20–P20.22

20.23 El sistema se libera a partir del reposo en $x = 1.0$ pulg, donde x se mide desde la posición en que los resortes no están estirados. (a) Determine si el sistema está subamortiguado, críticamente amortiguado o sobreamortiguado. (b) Deduzca la expresión para $x(t)$.

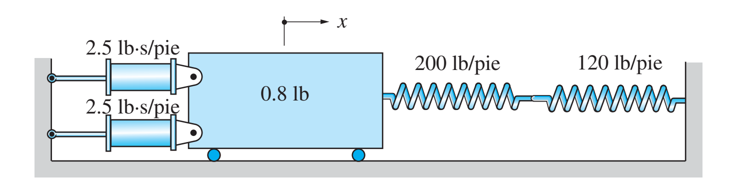


Fig. P20.23

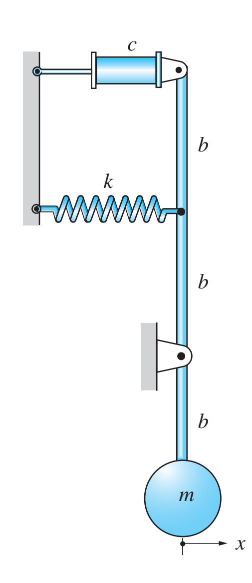


Fig. P20.24

20.24 La masa m del sistema subamortiguado se desplaza ligeramente y se suelta. Obtenga el periodo amortiguado τ_d de la oscilación resultante. Desprecie la masa de la barra y utilice los siguientes datos: $b = 0.3$ m, $m = 4$ kg, $k = 2$ kN/m y $c = 36$ N · s/m.

20.25 El sistema se libera a partir del reposo en el tiempo $t = 0$ con el desplazamiento inicial $x_0 = 50$ mm. Ambos resortes no están estirados cuando $x = 0$. Determine la expresión para $x(t)$.

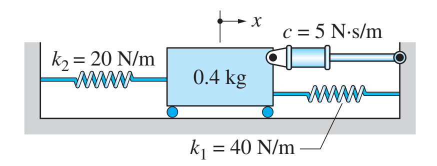


Fig. P20.25

20.26 Cada uno de los dos amortiguadores que se han montado en el extremo de un vagón de ferrocarril de 180 000 lb tiene un resorte con rigidez $k = 12 \times 10^3$ lb/pie y un coeficiente de amortiguamiento viscoso igual a 45×10^3 lb · s/pie. Si se sabe que un amortiguador pierde su eficiencia cuando su deformación excede 12 pulg, encuentre la mayor velocidad v_0 con la que el vagón pueda golpear con seguridad una pared rígida.

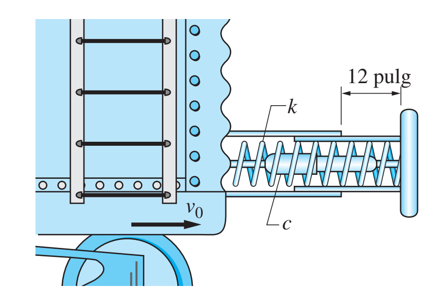


Fig. P20.26

20.27 Un oscilador críticamente amortiguado se suelta a partir del reposo con el desplazamiento inicial x_0 (medido desde la posición de equilibrio). (a) Deduzca las expresiones para el desplazamiento y la velocidad del oscilador en términos de x_0, p y t. (b) Determine la expresión para la rapidez máxima del oscilador en términos de x_0 y p.

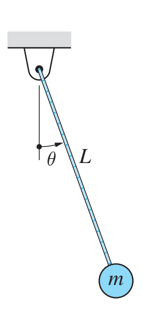


Fig. P20.28

20.28 La masa del péndulo es $m = 0.5$ kg y su longitud es $L = 1.5$ m. En cierto tiempo, la amplitud del péndulo se midió y resultó ser 5°; una hora después era 3°. Suponiendo que el amortiguamiento responsable del decaimiento de la amplitud es viscoso, calcule el coeficiente de amortiguamiento.

20.29 El amortiguamiento viscoso no es una representación exacta de la resistencia experimentada por un cuerpo que se mueve a través de un fluido de baja viscosidad, como el aire o el agua. Los experimentos indican que la fuerza de amortiguamiento es en realidad proporcional al cuadrado de la velocidad: $F_d = cv^2$. Para una esfera de una pulgada de diámetro que se mueve en el aire el valor aproximado de la constante de amortiguamiento es $c = 2.6 \times 10^{-6}$ lb · s²/pie². (a) Utilice esta información para deducir la ecuación diferencial de movimiento para el péndulo que se muestra (la masa es de acero). Desprecie el efecto de amortiguamiento de la cuerda. (b) Integre la ecuación de movimiento numéricamente en dos periodos de vibración, suponiendo que el péndulo se suelta del reposo cuando $\theta = 30°$. (c) Aplique los resultados de la integración para calcular el porcentaje de pérdida de amplitud en los primeros dos periodos. (*Nota:* para verificar que la pérdida de amplitud es real y que no se debe a errores numéricos en el proceso de integración, se recomienda repetir las partes (b) y (c) sin amortiguamiento, no debería existir pérdida de amplitud.)

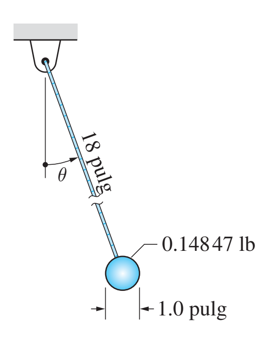


Fig. P20.29, P20.30

20.30 Repita el problema 20.29 si la masa del péndulo se sustituye por una pelota de espuma de poliestireno de una pulgada de diámetro que pesa 4.5×10^{-4} lb.

20.31 El sistema que se muestra se suelta desde el reposo con el desplazamiento inicial $x_0 = 0.1$ m, que se mide desde la posición de equilibrio. (a) Suponga que la fuerza de amortiguamiento ejercida por el amortiguador es $F_d = c_2\dot{x}^2$, donde $c_2 = 50$ N · s²/m², obtenga la razón x_1/x_0. (b) Si dicha fuerza fuera $F_d = c_1\dot{x}$, determine el valor de c_1 que daría la misma razón x_1/x_0 que en la parte (a). (c) Trace la gráfica x contra t en el periodo $t = 0$ a 1.0 s para los dos casos de amortiguamiento. ¿Cuál es la diferencia principal en el decaimiento de la amplitud entre los dos tipos de amortiguamiento?

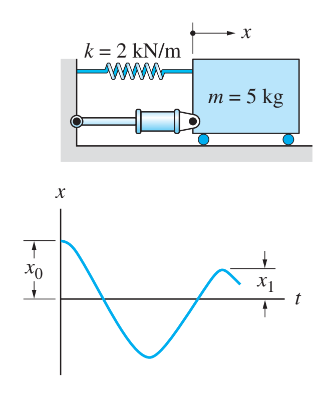


Fig. P20.31

20.3 *Vibraciones forzadas de partículas*

En las vibraciones libres, las oscilaciones se inician con una perturbación que origina un desplazamiento inicial, una velocidad inicial, o ambos. No se requieren fuerzas externas para mantener el movimiento. En una vibración forzada, una fuente externa sostenida es la responsable de mantenerla. Un ejemplo común es el "golpeteo" en un automóvil, causado por el motor o por las irregularidades del terreno. Aquí se consideran las vibraciones forzadas originadas por una función de fuerza armónica (es decir, que varía de manera senoidal) o por un desplazamiento armónico de soporte. Además de ser importante por sí misma, la entrada armónica también es útil en el análisis del movimiento forzado más general, porque cualquier función de fuerza puede descomponerse en unidades armónicas al expresarse como una serie de Fourier.

a. *Función de fuerza armónica*

La figura 20.8(a) muestra un sistema masa-resorte amortiguado que está sujeto a una fuerza dependiente del tiempo $P = P_0$ sen ωt, donde P_0 es la magnitud de la fuerza y ω es su frecuencia circular. La fuerza P es la *función de fuerza armónica* y ω es la *frecuencia de la fuerza*. La deflexión estática del resorte es Δ y x es el desplazamiento de la masa desde su posición de equilibrio. De los diagramas de cuerpo libre y de masa-aceleración que se muestran en la figura 20.8(b), se obtiene para la ecuación diferencial de movimiento

$$\Sigma F_x = ma_x \quad \overset{+}{\downarrow} \quad mg + P_0 \operatorname{sen} \omega t - k(x + \Delta) - c\dot{x} = m\ddot{x}$$

Con la ecuación de equilibrio $mg = k\Delta$, la ecuación de movimiento se simplifica a

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P_0 \operatorname{sen} \omega t \tag{20.23}$$

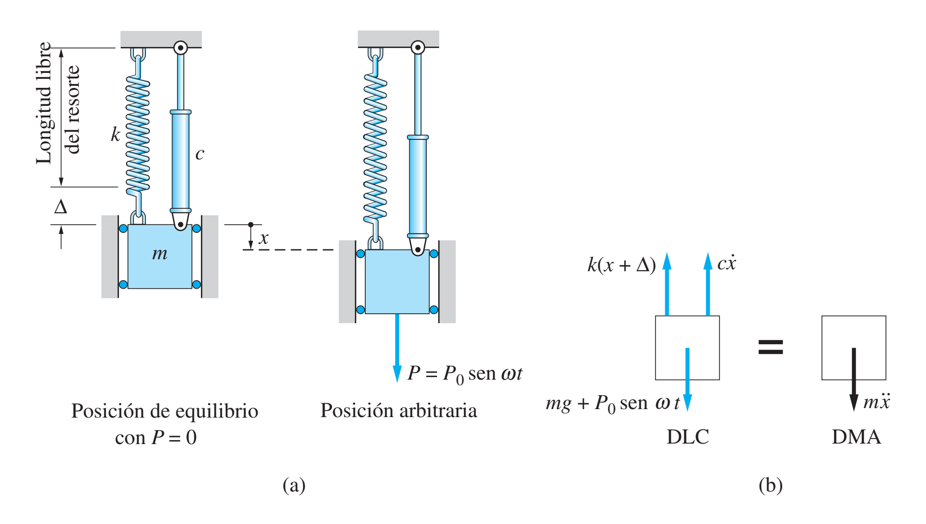


Fig. 20.8

La ecuación (20.23) es diferencial lineal de segundo orden y no homogénea (su lado derecho no es igual a cero). Su solución general puede representarse como la suma de la *solución complementaria* x_c y una *solución particular* x_p; es decir,

$$x = x_c + x_p \tag{20.24}$$

La solución complementaria de la ecuación (20.23) es una solución de la ecuación homogénea (que se obtuvo al igualar a cero el lado derecho) y la solución particular es cualquiera de la ecuación completa.

Observe que la ecuación homogénea es idéntica a la ecuación (20.11). Por tanto, la solución complementaria de la ecuación (20.23) está dada por las ecuaciones (20.17), (20.18) o (20.19), dependiendo del factor de amortiguamiento ζ.

La solución complementaria, también llamada *vibración transitoria*, en general no es interesante desde un punto de vista práctico porque decae con el tiempo. De aquí en adelante sólo se prestará atención a la solución particular, que representa la vibración del estado estacionario.

Por sustitución directa, es posible demostrar que una solución particular de la ecuación (20.23) es

$$x_p = X \operatorname{sen}(\omega t - \phi) \tag{20.25}$$

donde la amplitud X está dada por

$$X = \frac{P_0/k}{\sqrt{[1 - (\omega/p)^2]^2 + (2\zeta\omega/p)^2}} \tag{20.26}$$

y el ángulo de fase ϕ (aquel por el cual x_p se retrasa de P) es

$$\phi = \tan^{-1}\left[\frac{2\zeta\omega/p}{1 - (\omega/p)^2}\right] \tag{20.27}$$

donde $p = \sqrt{k/m}$ es la frecuencia circular no amortiguada y $\zeta = c/(2mp)$ representa el factor de amortiguamiento. El numerador P_0/k en la ecuación (20.26) es la *deflexión de frecuencia cero*, que es causada por la fuerza constante P_0 (no hay que confundirla con la deflexión estática □ $= mg/k$). El término ω/p (razón de la frecuencia de la fuerza a la frecuencia no amortiguada) es la *razón de frecuencia*.

El *factor de magnificación* se define como la razón de la amplitud de la vibración de estado estacionario dividida entre la deflexión de frecuencia cero:

$$\text{Factor de magnificación} = \frac{X}{P_0/k} = \frac{1}{\sqrt{[1 - (\omega/p)^2]^2 + (2\zeta\omega/p)^2}} \tag{20.28}$$

En la figura 20.9 se ha graficado el factor de magnificación contra la razón de frecuencia. Como se esperaba, el factor de magnificación es mayor para las frecuencias cercanas a la *resonancia* ($\omega = p$) si el coeficiente de amortiguamiento es suficientemente pequeño (el factor de magnificación se hace infinito en la resonancia sin amortiguamiento).

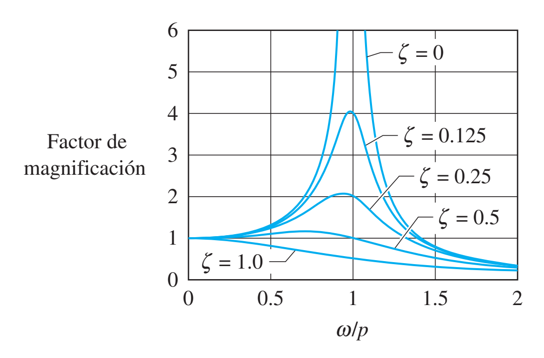


Fig. 20.9

Es posible obtener información adicional acerca de las gráficas de la figura 20.9 si la ecuación (20.28) se deriva respecto a ω/p y el resultado se iguala a cero. Este procedimiento conduce a la siguiente información: 1. en la figura 20.9 todas las curvas son tangentes a la horizontal en $\omega/p = 0$ y conforme $\omega/p \to \infty$; 2. si $\zeta > 0.707$, el máximo factor de magnificación es 1.0 y ocurre en $\omega/p = 0$; 3. si $\zeta < 0.707$, el factor de magnificación alcanza su valor máximo en $\omega/p = \sqrt{1 - 2\zeta^2}$, no en resonancia.

b. *Desplazamiento armónico del soporte*

La figura 20.10(a) muestra un sistema masa-resorte amortiguado viscosamente con el soporte que efectúa el desplazamiento armónico establecido $y = Y$ sen ωt. En la figura 20.10(b) se indican los diagramas de cuerpo libre y de masa-aceleración.

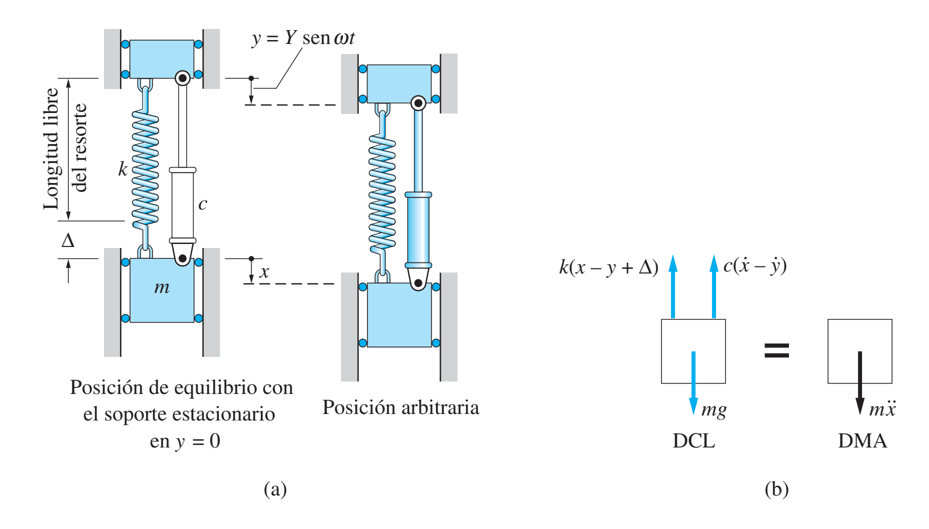


Fig. 20.10

Observe que x es el desplazamiento de la masa desde su posición de equilibrio (con soporte estacionario en $y = 0$) y Δ es la deflexión estática del resorte. Se ve que el desplazamiento relativo $x - y$ y la velocidad relativa $\dot{x} - \dot{y}$ determinan las fuerzas del resorte y de amortiguamiento, respectivamente. Al aplicar la segunda ley de Newton al DCL y al DMA, se obtiene

$$\Sigma F_x = ma_x \quad \overset{+}{\downarrow} \quad mg - c(\dot{x} - \dot{y}) - k(x - y + \Delta) = m\ddot{x} \tag{a}$$

Al observar que $mg = k\Delta$ (la ecuación de equilibrio) e introducir la coordenada de posición relativa $z = x - y$, la ecuación (a) se simplifica a

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = -m\ddot{y} \tag{b}$$

Al sustituir $y = Y \operatorname{sen} \omega t$ en la ecuación (b), la ecuación diferencial de movimiento queda

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = mY\omega^2 \operatorname{sen} \omega t \tag{20.29}$$

Si se comparan las ecuaciones (20.23) y (20.29) se observa que el análisis previo con una fuerza armónica también es aplicable a un soporte con desplazamiento armónico, si P_0 se reemplaza por $mY\omega^2$ y x por z. Al hacer esos cambios, las ecuaciones de la (20.25) a la (20.27) que describen la vibración de estado estacionario se convierten en

$$z = Z \operatorname{sen}(\omega t - \phi) \tag{20.30}$$

donde la amplitud Z y el ángulo de fase ϕ (por el cual z se retrasa de y) están dados por

$$\begin{aligned} Z &= \frac{mY\omega^2/k}{\sqrt{[1 - (\omega/p)^2]^2 + (2\zeta\omega/p)^2}} \\ &= Y \frac{(\omega/p)^2}{\sqrt{[1 - (\omega/p)^2]^2 + (2\zeta\omega/p)^2}} \end{aligned} \tag{20.31}$$

y, como antes,

$$\phi = \tan^{-1}\left[\frac{2\zeta\omega/p}{1 - (\omega/p)^2}\right] \tag{20.32}$$

donde $p = \sqrt{k/m}$ y $\zeta = c/(2mp)$.

Problema de ejemplo **20.5**

El motor eléctrico y su chasis que se muestran en la figura (a) tienen una masa combinada M. El desequilibrio del rotor es equivalente a una masa m (incluida en M), que se localiza a una distancia e del centro O del eje. Guías verticales, un resorte de rigidez k y un perno en A soportan el chasis. (El perno en A se insertó cuando el motor estaba en reposo en la posición de equilibrio estático.) El motor funciona con velocidad angular constante ω cuando el perno se elimina en el instante en que la masa m está en la posición que se muestra. 1. Deduzca la ecuación diferencial de movimiento del ensamblado. 2. Grafique el desplazamiento total, transitorio y de estado estacionario contra el tiempo, con los datos $M = 40$ kg, $m = 1.2$ kg, $e = 150$ mm, $k = 900$ N/m y $\omega = 8$ rad/s.

(a)

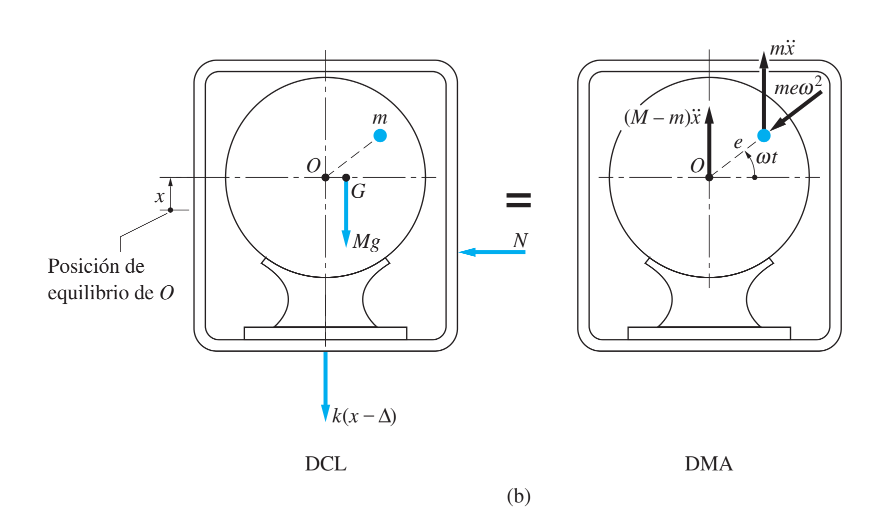
Solución

El desequilibrio giratorio causa que la posición del centro de masa del conjunto varíe con el tiempo, lo que origina vibraciones en la dirección vertical (las guías verticales evitan el movimiento horizontal del chasis).

Parte 1

En la figura (b) se muestra el diagrama de cuerpo libre (DCL) del ensamblado. Observe que x es el desplazamiento de O desde su posición de equilibrio estático. El DCL contiene el peso total Mg del eslabonamiento, que actúa en su centro de masa G, la fuerza del resorte $k(x - \Delta)$, donde Δ es la deflexión estática del resorte y la fuerza horizontal resultante N ejercida por las guías verticales. El diagrama de masa-aceleración en la figura (b) representa los vectores de inercia $(M - m)\ddot{x}$ y $m\ddot{x}$ asociados con el movimiento vertical del ensamblado y el vector de inercia radial $me\omega^2$ causado por la rotación de la masa m respecto de O. Al igualar las fuerzas verticales resultantes en el DCL y el DMA, se obtiene

$$\overset{+}{\uparrow} \quad -Mg - k(x - \Delta) = (M - m)\ddot{x} + m\ddot{x} - me\omega^2 \operatorname{sen} \omega t \qquad \text{(a)}$$



(b)

Después de eliminar □ por medio de la ecuación de equilibrio $Mg - k□ = 0$, la ecuación diferencial de movimiento queda

$$M\ddot{x} + kx = me\omega^2 \operatorname{sen} \omega t \qquad \textit{Respuesta}$$

Al comparar la ecuación (b) con la (20.23) se observa que son idénticas si $c = 0$ y se reemplaza la magnitud P_0 de la función de fuerza por $me\omega^2$ (algunas veces se hace referencia al término $me\omega^2$ como la fuerza centrífuga debida a la masa desequilibrada).

Parte 2

Con $P_0 = me\omega^2$ y $\zeta = 0$ (sin amortiguamiento), las ecuaciones (20.26) y (20.27) implican

$$X = \frac{me\omega^2/k}{1 - (\omega/p)^2} \qquad \text{y} \qquad \phi = 0$$

de modo que la solución particular de la ecuación (b) es, véase la ecuación (20.25),

$$x_p = \frac{me\omega^2/k}{1 - (\omega/p)^2} \operatorname{sen} \omega t$$

Debido a que el sistema es no amortiguado, la solución complementaria está dada por la ecuación (20.4): $x_C = E \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)$. Por tanto, la solución completa es

$$x = x_c + x_p = E \operatorname{sen}(\omega t + \alpha) + \frac{me\omega^2/k}{1 - (\omega/p)^2} \operatorname{sen} \omega t \qquad \text{(c)}$$

Al utilizar los valores numéricos dados, se obtiene

$$p = \sqrt{k/M} = \sqrt{900/40} = 4.743 \text{ rad/s}$$

$$\frac{me\omega^2/k}{1 - (\omega/p)^2} = \frac{1.2(0.15)(8)^2/900}{1 - (8/4.743)^2} = -0.006\,938 \text{ m} = -6.938 \text{ mm}$$

Al sustituir estos valores en la ecuación (c) resulta

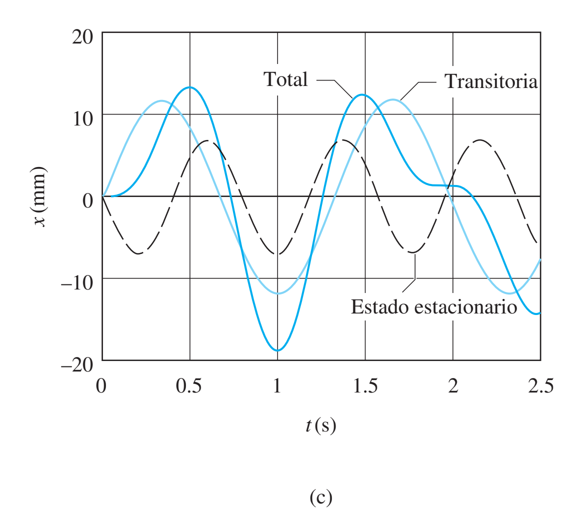
$$x(t) = E \operatorname{sen}(4.743t + \alpha) - 6.938 \operatorname{sen} 8t \text{ mm} \qquad \text{(d)}$$

Realizando la derivada temporal, se obtiene para la velocidad

$$\dot{x}(t) = 4.743\, E \cos(4.743t + \alpha) - 55.50 \cos 8t \text{ mm/s} \qquad \text{(e)}$$

Si se sustituyen las condiciones iniciales ($x = 0$ y $\dot{x} = 0$ cuando $t = 0$) en las ecuaciones (d) y (e) da $E \operatorname{sen} \alpha = 0$ y $4.743\, E \cos \alpha - 55.50 = 0$, de donde se obtiene $\alpha = 0$ y $E = 11.701$ mm. Por tanto, la descripción del movimiento es

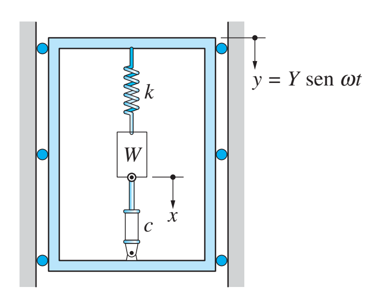
$$x(t) = 11.70 \operatorname{sen} 4.74t - 6.94 \operatorname{sen} 8t \text{ mm} \qquad \textit{Respuesta} \quad \text{(f)}$$



(c)

La figura (c) muestra las gráficas de la vibración transitoria (con el periodo $\tau_t = 2\pi/p = 2\pi/4.743 = 1.325$ s), de la vibración de estado estacionario (periodo $\tau_s = 2\pi/\omega = 2\pi/8 = 0.785$ s) y la superposición de las dos. Debido a que en la ecuación (f) el coeficiente de sen (8*t*) es negativo, la vibración de estado estacionario está 180º fuera de fase con la rotación de la masa desequilibrada.

Problema de ejemplo **20.6**



Un bloque de peso W está conectado a un marco rígido entre un resorte lineal y un amortiguador viscoso. El marco está sujeto al desplazamiento vertical dependiente del tiempo $y(t) = Y \operatorname{sen} \omega t$. El desplazamiento x del bloque se mide desde su posición de equilibrio estático (con soporte estacionario en $y = 0$). Determine la solución de estado estacionario para 1. el desplazamiento relativo $z = x - y$ y 2. el desplazamiento absoluto x. Utilice $Y = 1.5$ pulg, $\omega = 400$ rad/s, $W = 6$ lb, $k = 1500$ lb/pulg y $c = 40$ lb · s/pie.

Solución

Parte 1

Ya que el sistema dado es equivalente al que se muestra en la figura 20.10, las ecuaciones de la (20.30) a la (20.32) pueden emplearse para determinar el desplazamiento relativo a z. Los parámetros que aparecen en esas ecuaciones son

$$p = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1500(12)}{6/32.2}} = 310.8 \text{ rad/s}$$

$$\zeta = \frac{c}{2mp} = \frac{40}{2(6/32.2)(310.8)} = 0.3453 \quad \text{(subamortiguado)}$$

$$\frac{\omega}{p} = \frac{400}{310.8} = 1.287$$

Ahora la amplitud relativa de la solución de estado estacionario se obtiene de la ecuación (20.31)

$$\begin{aligned} Z &= Y\frac{(\omega/p)^2}{\sqrt{[1-(\omega/p)^2]^2+(2\zeta\omega/p)^2}} \\ &= 1.5\frac{(1.287)^2}{\sqrt{[1-(1.287)^2]^2+[2(0.3453)(1.287)]^2}} \\ &= 2.249 \text{ pulg} \end{aligned}$$

y el ángulo de fase se calcula con la ecuación (20.32)

$$\begin{aligned} \phi &= \tan^{-1}\left[\frac{2\zeta\omega/p}{1-(\omega/p)^2}\right] = \tan^{-1}\left[\frac{2(0.3453)(1.287)}{1-(1.287)^2}\right] \\ &= -0.9347 \text{ rad} \end{aligned}$$

Así el desplazamiento relativo queda

$$z(t) = 2.249 \operatorname{sen}(400t + 0.9347) \text{ pulg}$$ *Respuesta*

Observe que $z(t)$ se adelanta a $y(t)$ por 0.9347 rad(53.6º).

Parte 2

Al usar la identidad trigonométrica $\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b$, la expresión para $z(t)$ en la parte 1 se puede escribir como

$$\begin{aligned} z(t) &= 2.249(\cos 0.9347 \operatorname{sen} 400t + \operatorname{sen} 0.9347 \cos 400t) \\ &= 1.336 \operatorname{sen} 400t + 1.809 \cos 400t \text{ pulg} \end{aligned}$$

Por tanto, la expresión para el desplazamiento absoluto de la masa es

$$\begin{aligned} x &= z + y \\ &= (1.336 \operatorname{sen} 400t + 1.809 \cos 400t) + 1.5 \operatorname{sen} 400t \\ &= 2.836 \operatorname{sen} 400t + 1.809 \cos 400t \ \text{ pulg} \end{aligned}$$ *Respuesta*

Problemas

20.32 El sistema masa-resorte está en reposo en la posición de equilibrio $x = 0$ cuando se aplica la fuerza armónica $P(t) = P_0$ sen ωt en $t = 0$, donde $P_0 = 100$ N y $\omega = 25$ rad/s. Determine: (a) la expresión para el desplazamiento $x(t)$ (incluya las soluciones transitoria y de estado estacionario); (b) el factor de magnificación y (c) el máximo valor de $x(t)$.

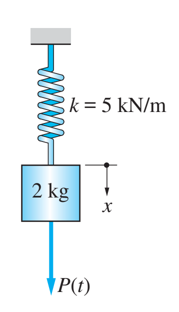


Fig. P20.32, P20.33

20.33 La masa montada en el resorte es afectada por la fuerza $P(t) = P_0$ sen ωt, donde $P_0 = 100$ N. Calcule los dos valores de ω para los cuales la amplitud de la vibración de estado estacionario es 50 mm.

20.34 El peso de 0.5 lb está suspendido de un marco rígido. El perno A en el extremo del brazo OA encaja en una ranura del marco, haciendo que éste oscile en la dirección vertical conforme el brazo gira. Si la velocidad angular de OA es $\omega = 35$ rad/s, establezca la amplitud de la vibración de estado estacionario del peso relativa al marco.

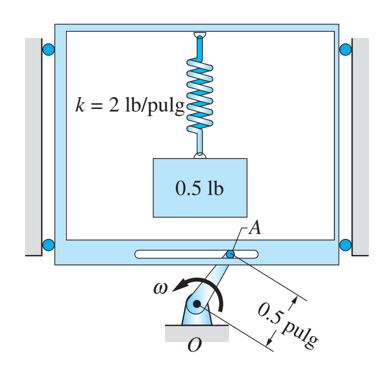


Fig. P20.34

20.35 El bloque de masa $m = 4$ kg está unido a un resorte de rigidez k. Cuando la fuerza armónica P_0 sen ωt se aplica al bloque en donde $P_0 = 0.25$ lb y $\omega = 6$ rad/s, la amplitud de estado estacionario es 7.5 mm. Encuentre los dos valores posibles de k.

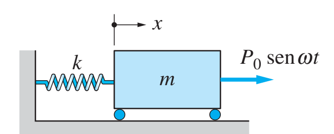


Fig. P20.35–P20.37

20.36 El sistema masa-resorte se encuentra bajo la acción de la fuerza armónica P_0 sen ωt. Cuando $\omega = 5$ rad/s, la amplitud de estado estacionario del bloque es 20 mm. Cuando la frecuencia se incrementa a $\omega = 10$ rad/s, con P_0 sin alterar, la amplitud cambia a 4 mm. Determine: (a) la frecuencia natural p del sistema y (b) la deflexión de frecuencia cero P_0/k.

20.37 El sistema que se muestra consiste en la masa $m = 6$ kg y un resorte no lineal. La relación fuerza-extensión en el resorte es $F = kx[1 + (x/b)^2]$, donde x se mide en metros, $k = 1200$ N/m y $b = 0.25$ m. La amplitud y frecuencia de la fuerza que actúa son $P_0 = 60$ N y $\omega = 14.142$ rad/s, respectivamente, y la última es igual a la frecuencia circular natural del sistema para amplitudes pequeñas. (Observe que si $x \ll b$, entonces $F \approx kx$ y $p = \sqrt{k/m} = \sqrt{1200/6} = 14.142$ rad/s.)

El sistema parte del reposo en la posición de equilibrio $x = 0$ cuando $t = 0$. (a) Demuestre que la ecuación diferencial de movimiento es

$$\ddot{x} = -200x(1 + 16x^2) + 10 \operatorname{sen} 14.142t \text{ m/s}^2$$

(b) Integre la ecuación de movimiento numéricamente de $t = 0$ a $t = 2$ s y trace la gráfica de x contra t.

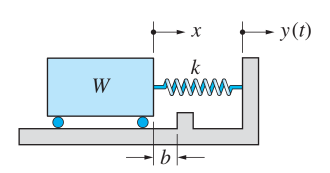
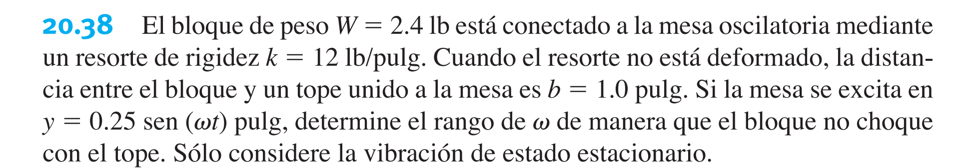


Fig. P20.38



20.38 El bloque de peso $W = 2.4$ lb está conectado a la mesa oscilatoria mediante un resorte de rigidez $k = 12$ lb/pulg. Cuando el resorte no está deformado, la distancia entre el bloque y un tope unido a la mesa es $b = 1.0$ pulg. Si la mesa se excita en $y = 0.25$ sen (ωt) pulg, determine el rango de ω de manera que el bloque no choque con el tope. Sólo considere la vibración de estado estacionario.

20.39 El contenedor del sistema que se muestra experimenta el desplazamiento vertical $y(t) = Y$ sen ωt. Si se sabe que $Z = 5Y$, donde Z es la amplitud de estado estacionario de la masa m relativa al soporte, obtenga la frecuencia forzada ω.

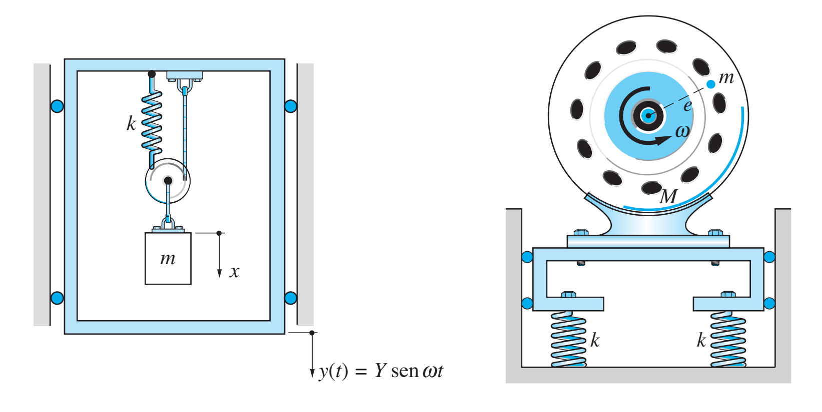


Fig. P20.39 **Fig. P20.40**

20.40 Un motor eléctrico y su base, con una masa combinada de $M = 12$ kg, se apoyan en cuatro resortes idénticos, cada uno con rigidez $k = 480$ kN/m. El desequilibrio del motor es equivalente a una masa $m = 0.005$ kg que se localiza a una distancia $e = 90$ mm de su eje. (a) Calcule la rapidez angular del motor que causaría resonancia. (b) Encuentre el desplazamiento máximo de estado estacionario del motor cuando su velocidad angular es 99% de la rapidez en resonancia.

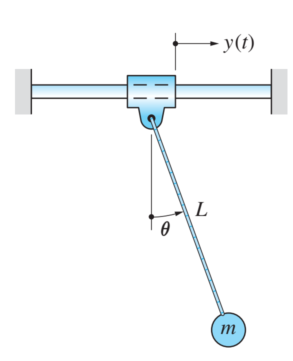


Fig. P20.41, P20.42

20.41 El péndulo de longitud L y masa m está suspendido de un collarín deslizante. Si se impone sobre el collarín el desplazamiento horizontal $y(t) = Y$ sen ωt, pruebe que para θ suficientemente pequeño, la amplitud de estado estacionario del péndulo es

$$\theta_{\max} = \frac{\omega^2 L}{|g - \omega^2 L|} \frac{Y}{L}$$

20.42 El péndulo de longitud $L = 1.09$ m está suspendido de un collarín deslizante, cuyo desplazamiento lo da $y(t) = 0.545$ sen $(5t)$ m, en donde t está en segundos. Se sabe que al tiempo $t = 0$, $\theta = 30°$ y $\dot{\theta} = 0$. (a) Deduzca la ecuación diferencial

de movimiento para el péndulo, eligiendo θ como la coordenada independiente (no limite θ a los ángulos pequeños). (b) Integre numéricamente la ecuación de movimiento de $t = 0$ a $t = 10$ s y trace la gráfica de θ contra t para el periodo de integración. (c) Describa el movimiento del péndulo durante este periodo.

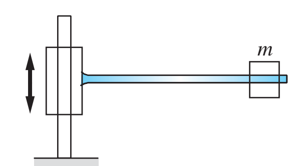


Fig. P20.43

20.43 Cuando la masa m está unida al extremo de una ligera barra elástica, su deflexión estática es 0.8 pulg. Entonces se da al collarín deslizante que soporta a la varilla un desplazamiento vertical armónico de amplitud 0.2 pulg con una frecuencia circular de 18 rad/s. Determine la amplitud de estado estacionario de la masa relativa al collarín.

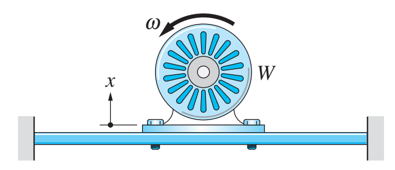


Fig. P20.44

20.44 Un motor ligeramente desequilibrado de peso W está unido a la mitad de una ligera viga elástica. El desequilibrio es equivalente a un peso $W/400$ que se localiza a una distancia $e = 8$ pulg del eje del motor. Cuando éste rota con $\omega = 1280$ rev/min, se sabe que ésta es menor que la rapidez de resonancia, entonces su amplitud de estado estacionario es $x_{max} = 0.04$ pulg. Encuentre la rapidez angular del motor en la que ocurrirá la resonancia.

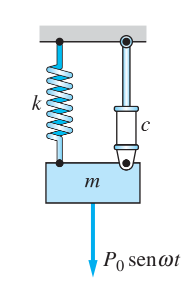


Fig. P20.45–P20.48

20.45 Para el sistema amortiguado que se muestra, pruebe que la máxima amplitud de estado estacionario, para un factor de amortiguamiento ζ dado, ocurre en la razón de frecuencia $\omega/p = \sqrt{1-2\zeta^2}$ para $\zeta^2 \leq 1/2$. También demuestre que la amplitud máxima correspondiente es

$$x_{max} = \frac{P_0/k}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

20.46 Para el sistema que se muestra, $m = 0.2$ kg y $k = 2880$ N/m. Cuando está bajo la acción de la fuerza armónica de amplitud P_0, se observa que la amplitud de la vibración de estado estacionario es la misma en $\omega = 96.0$ rad/s y en $\omega = 126.4$ rad/s. Calcule el coeficiente de amortiguamiento c.

20.47 Para el sistema que se muestra, $mg = 30$ lb, $k = 60$ lb/pie y $c = 8$ lb · s/pie. La frecuencia ω de la fuerza aplicada es la mitad de la frecuencia resonante. Determine la amplitud P_0 de dicha fuerza si la amplitud del estado estacionario es 3 pulg.

20.48 La masa $m = 0.5$ slugs está suspendida de un resorte no lineal y de un amortiguador viscoso con el coeficiente de amortiguamiento $c = 18.6$ lb · s/pie. La relación fuerza-deformación del resorte es $F = kx[1 + (x/b)^2]$ lb, donde $k = 10$ lb/pulg, $b = 2$ pulg y x se mide en pulgadas desde la posición no deformada del resorte. La amplitud de la fuerza aplicada es $P_0 = 10$ lb y su frecuencia circular es $\omega = 12$ rad/s. (a) Demuestre que la ecuación diferencial de movimiento de la masa es

$$\ddot{x} = -240x(1+36x^2) - 37.2\dot{x} + 32.2 + 20\,\text{sen}\,12t \text{ pies/s}^2$$

donde x es el desplazamiento en pies que se mide desde la posición no deformada del resorte (no de la posición de equilibrio) y t es el tiempo en segundos. (b) Utilice la integración numérica a fin de determinar los valores máximo y mínimo de x para el movimiento de estado estacionario. (*Sugerencia:* inicie con el sistema en reposo en la posición de equilibrio e integre hasta que el término transitorio se haya disipado). ¿El movimiento es simétrico respecto a la posición de equilibrio?

20.49 (a) Deduzca la ecuación diferencial de movimiento para el sistema que se muestra. (b) Calcule la amplitud de la vibración de estado estacionario y el ángulo de fase si $W = 6$ lb, $k = 500$ lb/pie, $c = 18$ lb · s/pie, $Y = 1.5$ pulg y $\omega = 20$ rad/s.

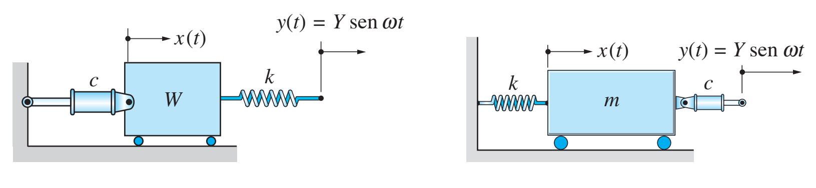
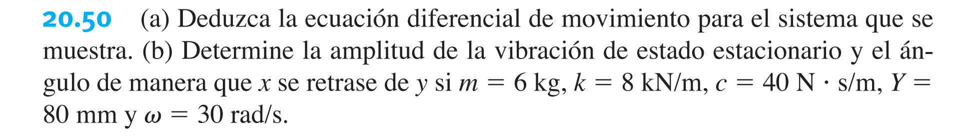


Fig. P20.49 **Fig. P20.50**



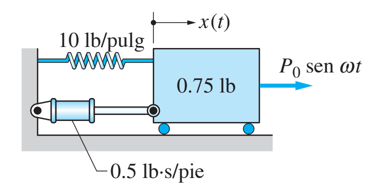


Fig. P20.51

20.50 (a) Deduzca la ecuación diferencial de movimiento para el sistema que se muestra. (b) Determine la amplitud de la vibración de estado estacionario y el ángulo de manera que x se retrase de y si $m = 6$ kg, $k = 8$ kN/m, $c = 40$ N · s/m, $Y = 80$ mm y $\omega = 30$ rad/s.

20.51 Determine la expresión para el desplazamiento de estado estacionario $x(t)$ del bloque si $P_0 = 0.1$ lb y $\omega = 60$ rad/s. ¿$x(t)$ se adelanta o se retrasa al desplazamiento $y(t)$ impuesto?

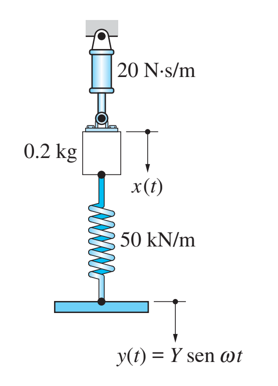


Fig. P20.52

20.52 Encuentre la expresión para la respuesta de estado estacionario $x(t)$ del bloque si $Y = 10$ mm y $\omega = 600$ rad/s. ¿$x(t)$ se retrasa o se adelanta al desplazamiento $y(t)$ impuesto?

20.53 El bloque A está conectado a la mesa oscilatoria B por medio de un resorte y un amortiguador viscoso. Cuando el desplazamiento horizontal $y(t) = Y \text{ sen } \omega t$ se impone sobre la mesa, el desplazamiento de estado estacionario resultante del bloque relativo a la mesa es $z(t) = Z \text{ sen}(\omega t - \phi)$. Demuestre que si el factor de amortiguamiento $\zeta \geq 1/\sqrt{2}$, entonces Z nunca excede a Y sin importar el valor de ω.

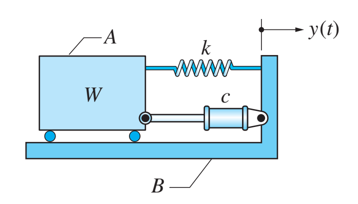


Fig. P20.53–P20.55

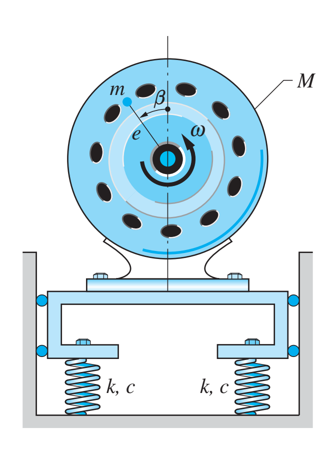


Fig. P20.56

20.54 Para el sistema que se describe en el problema 20.53, obtenga el mayor valor posible de Z y la razón de frecuencia ω/p correspondiente si $\zeta = 1/2$.

20.55 Para el sistema que se muestra, $W = 12$ lb, $k = 160$ lb/pie y $c = 2.5$ lb · s/pie. El desplazamiento horizontal impuesto sobre la mesa B es $y(t) = 1.0$ sen $(18t)$ pulg, donde el tiempo t se mide en segundos. Determine la amplitud de estado estacionario del bloque.

20.56 Un motor eléctrico y su base tienen una masa combinada de $M = 12$ kg. Cada uno de los cuatro resortes unidos a la base tiene una rigidez $k = 480$ kN/m y un coeficiente de amortiguamiento viscoso c. El desequilibrio del motor es equivalente a una masa $m = 0.005$ kg que se localiza a una distancia $e = 90$ mm del centro del eje. Cuando el motor funciona con $\omega = 400$ rad/s, su amplitud de estado estacionario

es 1.8 mm. Determine: (a) el coeficiente de amortiguamiento de cada resorte y (b) el ángulo de fase entre el desplazamiento del motor y ωt.

20.57 Cuando el sistema está en la posición que se muestra, el resorte no tiene deformación. Obtenga la amplitud de la vibración de estado estacionario del peso C causado por la función de fuerza armónica que actúa en A. Desprecie todos los pesos excepto el de C.

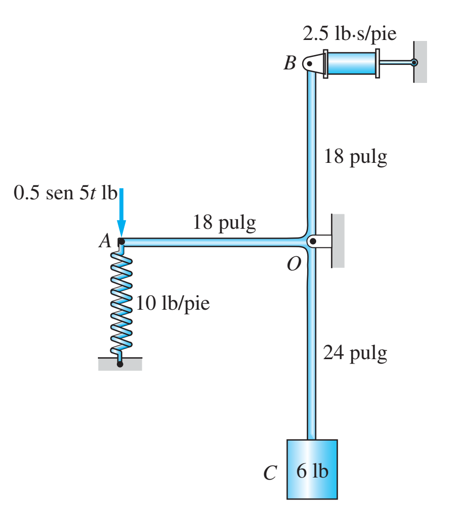


Fig. P20.57

20.58 (a) Deduzca la ecuación diferencial de movimiento para el bloque de 10 kg en términos de su desplazamiento absoluto $x(t)$. (b) Determine la expresión para la respuesta de estado estacionario si la frecuencia de fuerza ω es igual a la frecuencia natural p del sistema.

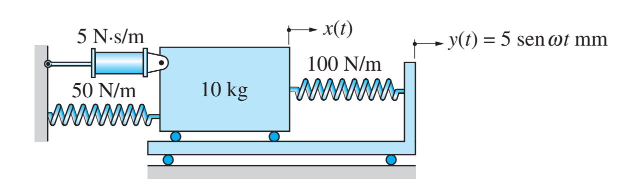


Fig. P20.58

20.59 Las dos masas están unidas a la barra en forma de L que es libre de rotar respecto al perno en O. (a) Despreciando la masa de la barra, deduzca la ecuación diferencial de movimiento para los pequeños desplazamientos angulares θ de la barra. (b) Calcule la amplitud Θ y el ángulo de fase ϕ de la vibración de estado estacionario si $m = 0.6$ kg, $k = 150$ N/m, $c = 4$ N · s/m, $b = 0.5$ m, $P_0 = 2$ N y $\omega = 8$ rad/s.

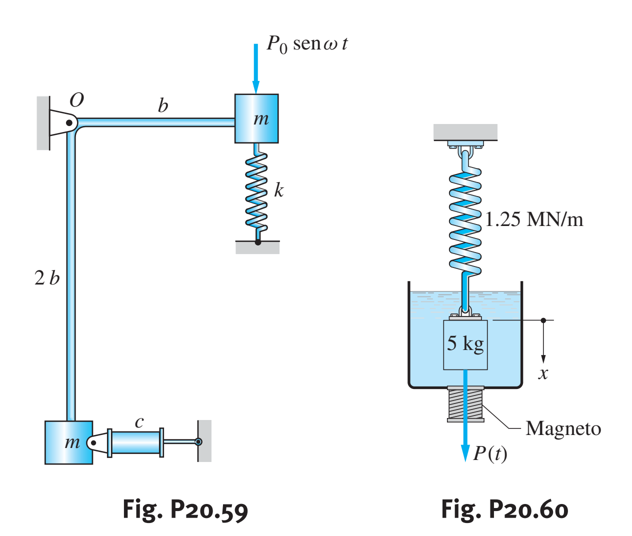


Fig. P20.59 **Fig. P20.60**

20.60 Un cilindro de hierro está suspendido de un resorte y se coloca en un contenedor lleno de fluido. Un electroimán en la base del contenedor aplica la fuerza $P(t) = P_0$ sen ωt al cilindro, donde $P_0 = 1.0$ kN y $\omega = 500$ rad/s. La fuerza de amortiguamiento que actúa sobre el cilindro debido al fluido es $F_d = c\dot{x}^2$, donde $c = 250$ N · s^2/m^2. (a) Deduzca la ecuación diferencial de movimiento del cilindro. (b) Estime la amplitud de estado estacionario del cilindro por medio de la integración numérica de la ecuación de movimiento. [*Sugerencia:* comience con la condición inicial $x(0) = \dot{x}(0) = 0$, e integre hasta que se haya eliminado el movimiento transitorio.]

20.61 El peso de 0.5 lb está suspendido de un marco rígido como se muestra. El perno A, en el extremo del brazo OA en rotación, encaja en una ranura en el marco haciendo que éste oscile en la dirección vertical. El brazo se acelera de manera uniforme a partir del reposo en $t = 0$ y $\theta = 0$ a razón $\dot{\omega} = 100$ rad/s². (a) Pruebe que la ecuación diferencial de movimiento del peso en términos del desplazamiento relativo $z = x - y$ es

$$\ddot{z} = -1546z - 7.73\dot{z} - 4.17(\cos 50t^2 - 100t^2 \operatorname{sen} 50t^2) \text{ pies/s}^2$$

donde z y t se miden en pies y segundos, respectivamente. (b) Utilice la integración numérica para obtener la gráfica de z contra t desde $t = 0$ hasta $t = 1.0$ s. (c) Aplique los resultados numéricos de la parte (b) para determinar el valor mayor de z.

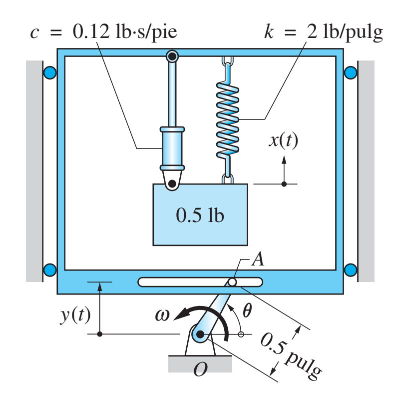


Fig. P20.61

20.4 *Vibraciones de un cuerpo rígido*

El análisis de las vibraciones de un cuerpo rígido no es en esencia distinto del de las partículas que vibran. Primero se deduce la ecuación de movimiento empleando los diagramas de cuerpo libre y de masa-aceleración del cuerpo y entonces se busca una solución de dicha ecuación. Si el sistema es lineal, la ecuación de movimiento será diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes. Para un sistema bajo acción armónica con un grado de libertad, esta ecuación tendrá la forma general

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = F_0 \operatorname{sen} \omega t \tag{20.33}$$

donde q es una variable que define la posición del cuerpo (puede ser una coordenada de posición lineal o angular). La ecuación (20.33) tiene la misma forma que la de movimiento para una partícula, $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P_0 \operatorname{sen} \omega t$, entonces su solución puede escribirse por analogía. Por ejemplo, la solución del movimiento de estado estacionario de fuerza es

$$q = Q \operatorname{sen}(\omega t - \phi) \tag{20.34a}$$

donde

$$Q = \frac{F_0/K}{\sqrt{[1 - (\omega/p)^2]^2 + (2\zeta\omega/p)^2}} \tag{20.34b}$$

y

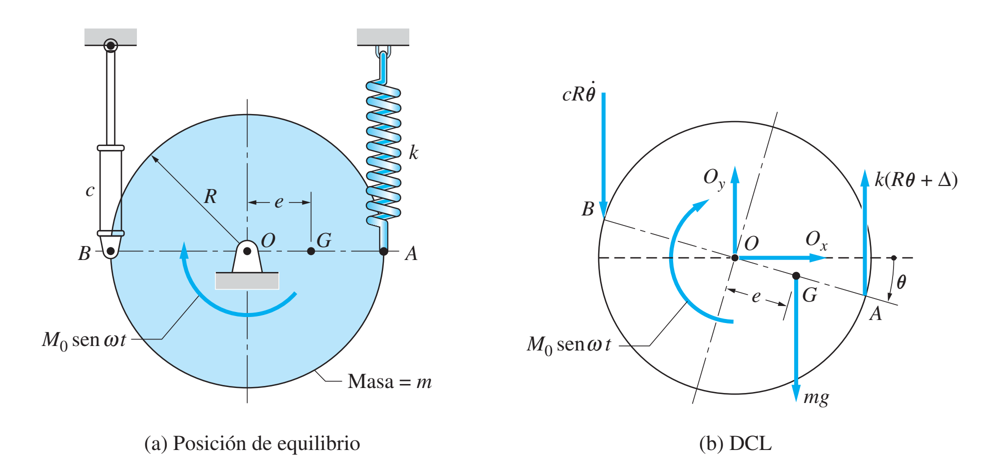
$$\phi = \tan^{-1}\left[\frac{2\zeta\omega/p}{1-(\omega/p)^2}\right] \tag{20.34c}$$

Los parámetros que se presentan en las ecuaciones anteriores para Q y ϕ son

$$\left.\begin{array}{lr} \text{Frecuencia circular no amortiguada} & p = \sqrt{\dfrac{K}{M}} \\ \text{Constante de amortiguamiento crítico} & C_{\mathrm{cr}} = 2Mp \\ \text{Factor de amortiguamiento} & \zeta = \dfrac{C}{C_{\mathrm{cr}}} = \dfrac{C}{2Mp} \end{array}\right\} \tag{20.34d}$$

La expresión para la vibración transitoria puede escribirse de la misma manera (su forma dependería de si el movimiento es sobreamortiguado, subamortiguado o críticamente amortiguado).

Como ejemplo considere el disco no homogéneo de radio R y masa m que se muestra en la figura 20.11(a). El centro de masa G del disco se localiza a la distancia e del perno O y su momento de inercia respecto a O es I_O. Un resorte lineal y un amortiguador viscoso están unidos a la periferia del disco en A y B, respectivamente. Sobre el disco también actúa un par M_0 sen ωt en sentido negativo (de las manecillas del reloj). Suponga que la tensión del resorte se ajusta de manera que la recta OG esté horizontal cuando el disco ocupe su posición de equilibrio estático. Por tanto, la deflexión estática □ del resorte en equilibrio satisface la ecuación $mge = kR$□.



(a) Posición de equilibrio (b) DCL

Fig. 20.11

Para deducir la ecuación para el movimiento de rotación del disco se dibujó el DCL que se muestra en la figura 20.11(b). La posición angular del disco se indica con el ángulo θ, si se supone que la rotación en el sentido de las manecillas del reloj es positiva. Durante el análisis se supone que θ es pequeño, así que puede emplearse sen $\theta \approx \theta$ y cos $\theta \approx 1$. Con esas aproximaciones, el desplazamiento del punto A es $R\theta$ (hacia abajo) y la velocidad del punto B es $R\dot{\theta}$ (hacia arriba). Esto da las fuerzas del resorte y de amortiguamiento que se muestran en el DCL. Sin necesidad de

dibujar el diagrama de masa-aceleración del disco, es posible sumar los momentos respecto de O para obtener la ecuación de movimiento

$$\Sigma M_O = I_O\ddot{\theta} \quad \circlearrowleft + \quad M_0 \operatorname{sen} \omega t - k(R\theta + \Delta)R - (cR\dot{\theta})R + mge = I_O\ddot{\theta}$$

Al utilizar la ecuación de equilibrio $mge = kR\Delta$ y reacomodar los términos, se obtiene

$$I_O\ddot{\theta} + cR^2\dot{\theta} + kR^2\theta = M_0 \operatorname{sen} \omega t \qquad \text{(a)}$$

Al comparar la ecuación (a) con la (20.33) se encuentra que son de la misma forma, los coeficientes de la ecuación (20.33) son

$$M = I_O \qquad C = cR^2 \qquad K = kR^2 \qquad F_0 = M_0 \qquad \text{(b)}$$

Se concluye, por tanto, que la vibración de estado estacionario del disco es armónica para las oscilaciones pequeñas y el movimiento puede determinarse directamente de las ecuaciones (20.34). Por ejemplo, la frecuencia circular no amortiguada es

$$p = \sqrt{\frac{K}{M}} = \sqrt{\frac{kR^2}{I_O}}$$

El coeficiente de amortiguamiento crítico se obtiene de $C_{cr} = 2Mp$, que de acuerdo con las sustituciones de la ecuación (b) se convierte en

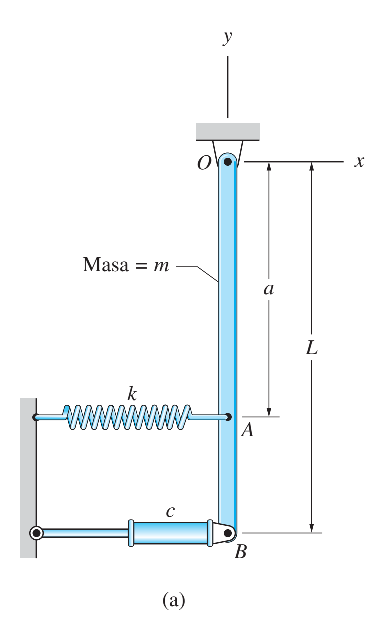
$$(cR^2)_{cr} = 2I_O\,p$$

por lo que

$$c_{cr} = \frac{2I_O\,p}{R^2}$$

Problema de ejemplo **20.7**

En la figura (a), la barra delgada homogénea de masa m y longitud L está sostenida por un perno en O. La barra también está conectada a un resorte ideal y a un amortiguador viscoso en los puntos A y B, respectivamente. Inicialmente la barra está en equilibrio en la posición que se muestra con el resorte no deformado. 1. Deduzca la ecuación diferencial de movimiento para los pequeños desplazamientos angulares de la barra. 2. Determine si la barra está sobreamortiguada o subamortiguada, dado que $m = 12$ kg, $L = 800$ mm, $a = 400$ mm, $k = 80$ N/m y $c = 20$ N · s/m.



(a)

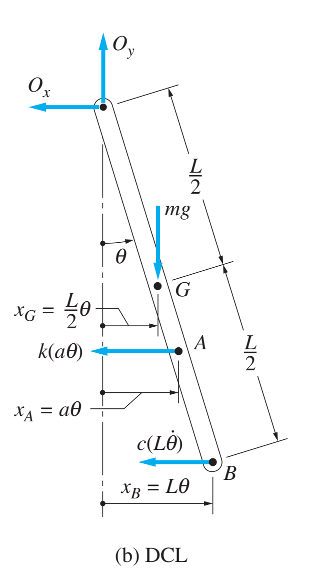
Solución

Parte 1

La figura (b) muestra el diagrama de cuerpo libre (DCL) de la barra cuando ésta se desplaza un ángulo pequeño θ, en sentido positivo, respecto a la vertical. Los desplazamientos horizontales x_G (G es el centro de masa), x_A y x_B que se muestran en la figura se obtuvieron en la aproximación del ángulo pequeño sen $\theta \approx \theta$. Las fuerzas que actúan sobre la barra son su peso mg, la fuerza del resorte $k(a\theta)$ (recuerde que este último no está deformado cuando $x_A = 0$) y la fuerza de amortiguamiento $c(L\dot{\theta})$ debida al amortiguador.

La ecuación diferencial de movimiento se deduce sumando los momentos respecto al punto O, con lo que se elimina la reacción del perno. Ya que O es un punto fijo, entonces una ecuación de movimiento válida es $\Sigma M_O = I_O\ddot{\theta}$. Del DCL en la figura (b) y con la aproximación cos $\theta \approx 1$, se obtiene

$$\Sigma M_O = I_O\ddot{\theta} \quad \circlearrowleft{+} \quad -mg\frac{L}{2}\theta - (ka\theta)a - (cL\dot{\theta})L = I_O\ddot{\theta}$$



(b) DCL

que, después de reacomodar los términos, queda

$$I_O\ddot{\theta} + cL^2\dot{\theta} + \left(ka^2 + \frac{mgL}{2}\right)\theta = 0 \qquad \textit{Respuesta} \quad \text{(a)}$$

Parte 2

Al comparar la ecuación (a) con la (20.33), se concluye que

$$M = I_O \qquad C = cL^2 \qquad K = ka^2 + \frac{mgL}{2}$$

Por tanto, la frecuencia circular no amortiguada es [véase la ecuación (20.34d)]

$$p = \sqrt{\frac{K}{M}} = \sqrt{\frac{ka^2 + (mgL/2)}{I_O}}$$

Con $I_O = mL^2/3 = 12(0.8)^2/3 = 2.560 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, ésta es

$$p = \sqrt{\frac{80(0.4)^2 + [12(9.81)(0.8)/2]}{2.560}} = 4.837 \text{ rad/s}$$

De la ecuación (20.34d) también se obtiene que $C_{cr} = 2Mp$, que en este caso equivale a $c_{cr}L^2 = 2I_Op$, así

$$c_{cr} = \frac{2I_O p}{L^2} = \frac{2(2.560)(4.837)}{(0.8)^2} = 38.70 \text{ N} \cdot \text{s/m}$$

Como la constante de amortiguamiento dada $c = 20 \text{ N} \cdot \text{s/m}$ es menor que c_{cr}, se concluye que la barra está *subamortiguada*.

Problemas

20.62 La barra delgada uniforme de masa m está en equilibrio en la posición horizontal que se muestra. Calcule la frecuencia f de las oscilaciones pequeñas respecto a la posición de equilibrio.

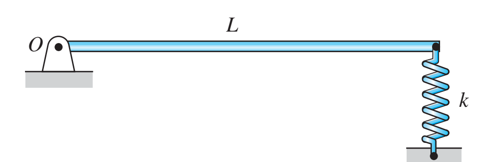


Fig. P20.62

20.63 Cada una de las dos placas delgadas homogéneas está unida a una varilla elástica idéntica que actúa como un resorte de torsión lineal (es decir, el momento de torsión restaurador es proporcional al desplazamiento angular). Si la frecuencia de la oscilación torsional de la placa circular de masa m_1 es f_1, encuentre la frecuencia f_2 de la placa cuadrada de masa m_2.

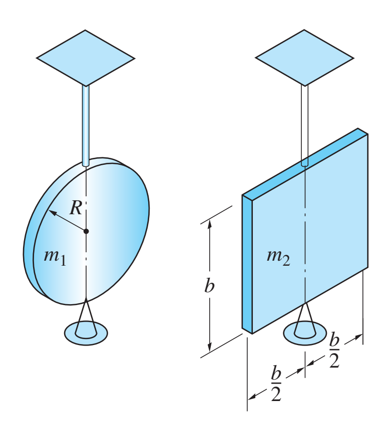


Fig. P20.63

20.64 El cuerpo rígido, que está suspendido de un perno en A, se desplaza ligeramente de su posición de equilibrio y se suelta. (a) Demuestre que la frecuencia circular de la vibración resultante es

$$p = \sqrt{\frac{gy}{\bar{k}^2 + y^2}}$$

donde y es la distancia de A al centro de masa G y $\bar{k}$ es el radio de giro del cuerpo respecto a G. (b) Determine la mayor frecuencia circular posible y el valor de y correspondiente.

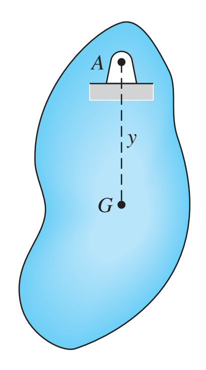


Fig. P20.64

20.65 El centro de masa del péndulo que se muestra está en G. Cuando el péndulo se suspende del perno en A, el periodo para las oscilaciones pequeñas es 1.6 s. Obtenga el periodo si el perno se mueve a B. (Sugerencia: véase el problema 20.64).

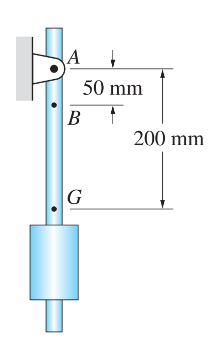


Fig. P20.65

20.66 La barra uniforme de masa m está en equilibrio en la posición horizontal. (a) Deduzca la ecuación diferencial de movimiento para las pequeñas oscilaciones de la barra. (b) Determine el factor de amortiguamiento dado que $m = 20$ kg, $c_1 = 25$ N · s/m, $c_2 = 16$ N · s/m y $k = 80$ N/m.

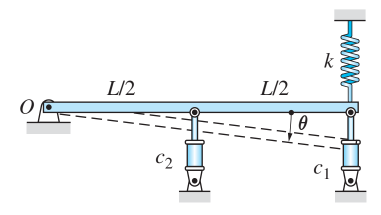


Fig. P20.66

20.67 La barra delgada uniforme de masa m está rígidamente unida al disco homogéneo de masa $3m$. El ensamblado tiene libertad para rotar respecto al perno

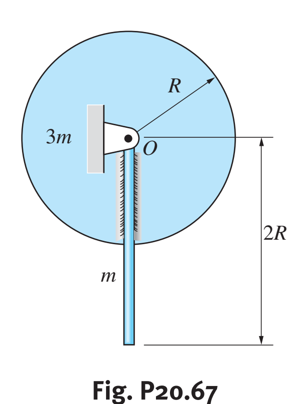


Fig. P20.67

en O. Obtenga la frecuencia f de las oscilaciones pequeñas respecto a la posición de equilibrio que se muestra.

20.68 La placa uniforme de 8 kg soportada por el perno en O está en equilibrio en la posición que se muestra. Encuentre la frecuencia f de las oscilaciones pequeñas respecto a esta posición.

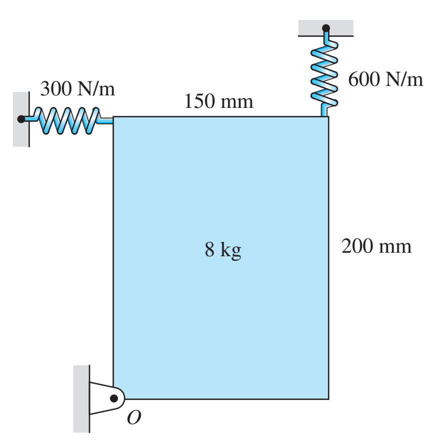


Fig. P20.68

20.69 El radio de giro del disco de 30 lb respecto a su centro de gravedad G es $\bar{k} = 15$ pulg. Un extremo del resorte está unido al disco en A y el otro extremo al bloque B. El disco se encuentra en equilibrio estático en la posición que se muestra cuando se impone el desplazamiento $y(t) = 0.5$ sen $25t$ pulg sobre B (t es el tiempo en segundos). Suponiendo que el disco no se deslice sobre la superficie horizontal, (a) deduzca la ecuación diferencial de movimiento del disco en términos de su desplazamiento angular θ y (b) determine la amplitud de la oscilación de estado estacionario en el punto G.

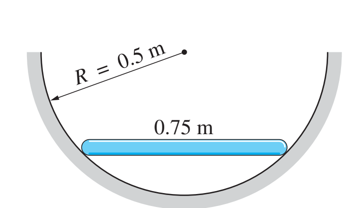


Fig. P20.70

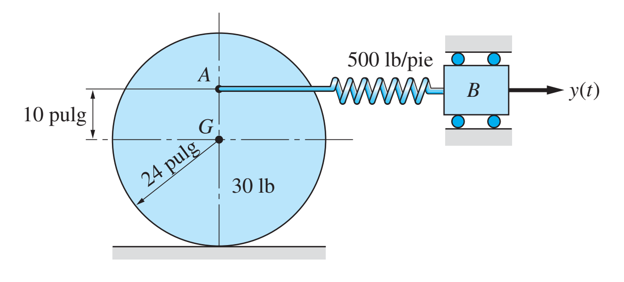


Fig. P20.69

20.70 La barra uniforme de longitud 0.75 m descansa en un canal circular sin fricción de radio 0.5 m. Si la barra se desplaza ligeramente de la posición de equilibrio y después se libera, calcule la frecuencia natural de la oscilación resultante.

20.71 Cuando se perturba el equilibrio del disco uniforme de 12 lb, éste rueda hacia adelante y atrás sin deslizarse sobre la base rígida. Si el desplazamiento máximo del centro del disco es 1.0 pulg respecto a su posición de equilibrio, encuentre: (a) la frecuencia circular de la oscilación y (b) el coeficiente de fricción mínimo entre el disco y la base.

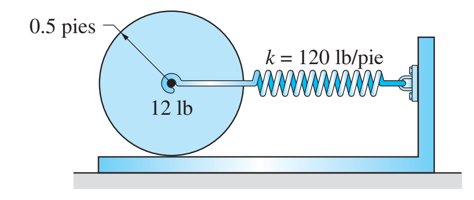


Fig. P20.71

20.72 Cuando la varilla uniforme AB de 1.8 lb está en la posición vertical, los dos resortes de rigidez $k = 100$ lb/pie no tienen deformación. El peso de la barra

horizontal unida a la varilla en A es despreciable. Si el soporte C experimenta el desplazamiento angular armónico $\beta(t) = \beta_0$ sen ωt, donde $\beta_0 = 2°$ y $\omega = 7.5$ rad/s, encuentre la amplitud angular de estado estacionario de la barra AB.

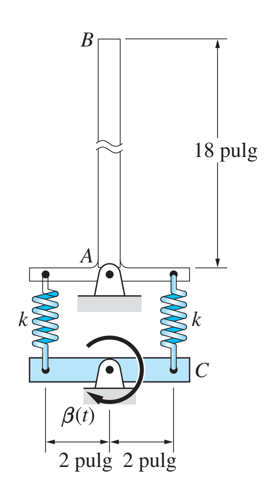


Fig. P20.72

20.73 La barra delgada uniforme de masa m está inicialmente en equilibrio estático en la posición que se muestra. Después rota ligeramente y se suelta. (a) Deduzca la ecuación diferencial de movimiento en términos del desplazamiento angular θ de la barra. (b) Si $m = 6$ kg y $k = 3$ kN/m, obtenga el coeficiente de amortiguamiento c que dará una vibración críticamente amortiguada.

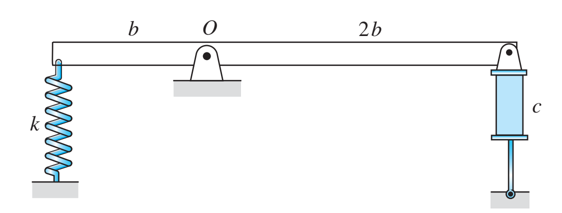


Fig. P20.73

20.74 La plataforma, sostenida por un perno en B y un resorte en C, está en equilibrio en la posición que se muestra. Cuando se desconecta el amortiguador viscoso en A, la frecuencia del sistema para las amplitudes pequeñas es 2.22 Hz. Encuentre el coeficiente de amortiguamiento c que resultaría en un sistema críticamente amortiguado.

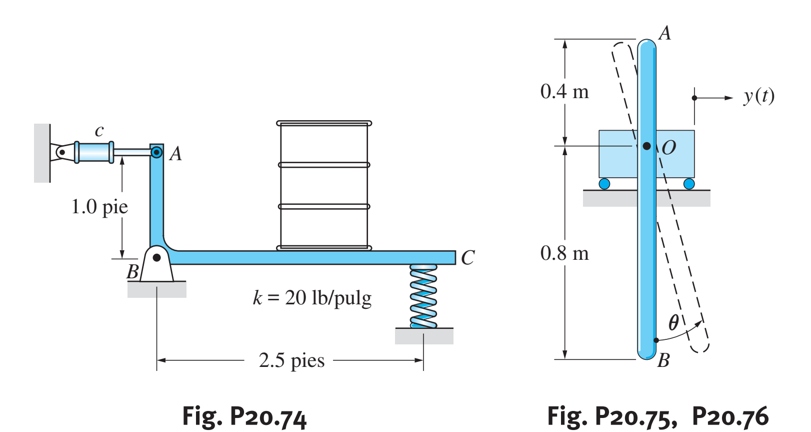


Fig. P20.74 **Fig. P20.75, P20.76**

20.75 La barra uniforme AOB de 12 kg está sujeta con un pasador al vagón en O. El vagón experimenta el desplazamiento armónico $y(t) = Y$ sen ωt, donde $Y =$ 10 mm y $\omega = 2$ rad/s. Calcule la amplitud angular de estado estacionario de la barra para las amplitudes pequeñas.

20.76 La barra uniforme AOB de 12 kg está sujeta con un pasador al vagón en O. La barra está en reposo en la posición vertical en $t = 0$ cuando se impone al vagón un desplazamiento armónico $y(t) = Y$ sen pt, donde p es la frecuencia resonante para las amplitudes pequeñas y $Y = 10$ mm. (a) Pruebe que la ecuación diferencial de movimiento para la barra es

$$\ddot{\theta} = -12.263 \operatorname{sen}\theta + 0.153\,31 \cos\theta \operatorname{sen} 3.502t \text{ rad/s}^2$$

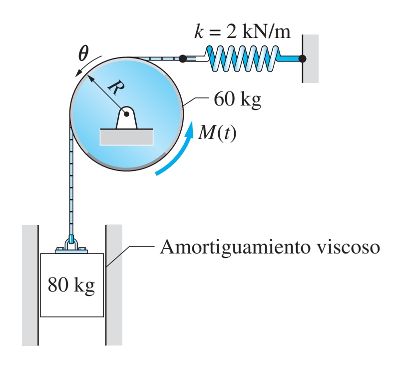


Fig. P20.77

(b) Integre la ecuación de movimiento numéricamente de $t = 0$ a $t = 50$ s y trace la gráfica de θ contra t. (c) Por inspección de la gráfica, estime el valor máximo de θ.

20.77 El radio del disco uniforme de 60 kg es $R = 500$ mm. El espacio entre la masa de 80 kg y la ranura vertical está lubricado, lo que proporciona un amortiguamiento viscoso con un factor de $\zeta = 0.15$. Si el par $M(t) = M_0$ sen ωt actúa sobre el disco, donde $M_0 = 40$ N · m y $\omega = 5$ rad/s, determine el desplazamiento angular de estado estacionario $\theta(t)$ del disco. Suponga que el cable permanece tenso y no se desliza sobre el disco.

20.78 El disco uniforme de 6 lb oscila respecto al perno en A. Este último está lubricado con grasa espesa, que da una resistencia de rotación equivalente a un par de amortiguamiento viscoso $M_d = -c\dot{\theta}$, donde c es una constante. Si el periodo de oscilación es 1.468 s, calcule (a) la razón de amortiguamiento y (b) la constante c.

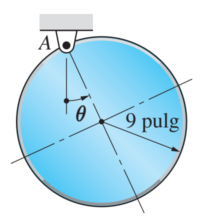


Fig. P20.78

***20.79** La ecuación diferencial de movimiento para un sistema no amortiguado con fuerzas externas constantes, de la ecuación (20.45), es $M\ddot{q} + Kq = F$, donde F es la fuerza generalizada constante. Demuestre que la gráfica de $\dot{q}/p$ contra q es el círculo que se muestra, donde p es la frecuencia circular natural del sistema. (*Nota:* el círculo se llama gráfica del sistema en el *plano fase*. Gráficas de este tipo pueden ser muy útiles al describir el comportamiento de los sistemas complejos con un solo grado de libertad. Véase, por ejemplo, el problema 20.80.)

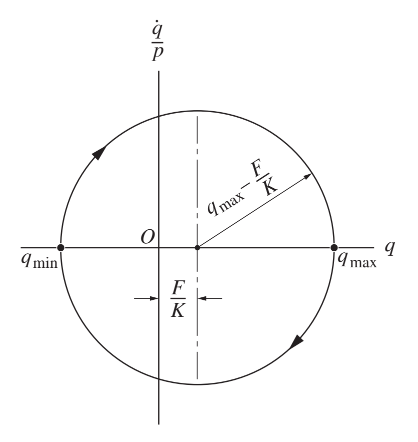


Fig. P20.79

***20.80** La ecuación diferencial de movimiento para un sistema sujeto a un amortiguamiento de Coulomb (fricción seca) de magnitud constante es

$$M\ddot{q} + Kq = \begin{cases} -F & \text{si } \dot{q} > 0 \\ F & \text{si } \dot{q} < 0 \end{cases}$$

donde F es la fuerza de fricción constante generalizada. Suponga que el sistema se libera del reposo en $q = q_0$ y sea $F = 0.15\ Kq_0$. (a) Dibuje la gráfica del sistema en el plano fase. (*Sugerencia:* véase el problema 20.79.) (b) De la gráfica en el plano fase, determine la reducción de la amplitud en cada ciclo de oscilación y el punto en que el sistema llega al reposo.

*20.5 *Métodos basados en la conservación de la energía*

Aquí se examinan dos métodos convenientes para analizar las vibraciones libres, no amortiguadas, con un solo grado de libertad: el de energía y el principio de Rayleigh. Ambos se apoyan en el principio de conservación de la energía mecánica.

a. *Método de energía*

Hasta ahora, el análisis de un sistema que vibra inició con la deducción de la ecuación diferencial de movimiento empleando un diagrama de cuerpo libre y la segunda ley de Newton. Cuando un sistema es conservativo (no hay amortiguamiento o es despreciable), es posible saltarse la ecuación de movimiento y obtener la frecuencia natural directamente del principio de conservación de la energía mecánica.

Si todas las fuerzas que actúan sobre un sistema mecánico son conservativas, entonces se conserva la energía mecánica total del sistema. Es decir,

$$T + V = \text{constante} \tag{20.35}$$

donde T es la energía cinética del sistema y V representa la energía potencial de las fuerzas que actúan sobre éste. Suponga que el sistema es lineal (su respuesta es proporcional a las fuerzas aplicadas), que tiene un grado de libertad y q es la coordenada de posición generalizada correspondiente. Su energía cinética tiene la forma

$$T = \frac{1}{2}M\dot{q}^2 \tag{20.36}$$

donde la constante M es la masa generalizada del sistema.

La energía potencial de un sistema lineal siempre es una forma cuadrática en q:

$$V = V_0 + F_0 q + \frac{1}{2}Kq^2 \tag{20.37}$$

donde V_0, F_0 y K son constantes. Para facilitar las deducciones que siguen, se supone que $q = 0$ corresponde a la posición de equilibrio estático del sistema. Por inspección de la ecuación (20.37), se observa que V_0 es la energía potencial del sistema en la posición de equilibrio. Además, ya que la condición de equilibrio estático es $dV/dq|_{q=0} = 0$, se concluye que $F_0 = 0$, entonces la energía potencial queda

$$V = V_0 + \frac{1}{2}Kq^2 \tag{20.38}$$

Al sustituir las ecuaciones (20.36) y (20.38) en la (20.35) y derivar respecto al tiempo, se obtiene

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}M\dot{q}^2 + V_0 + \frac{1}{2}Kq^2\right) = 0$$

que conduce a $(M\ddot{q} + Kq)\dot{q} = 0$. Descartando la solución trivial $\dot{q} = 0$, se obtiene la ecuación de movimiento

$$\ddot{q} + p^2 q = 0 \tag{20.39}$$

donde

$$p = \sqrt{\frac{K}{M}} \tag{20.40}$$

Como la ecuación (20.39) tiene la misma forma que la (20.1b), se concluye que p es la frecuencia circular del sistema.

En resumen, el procedimiento para calcular, utilizando la conservación de la energía, la frecuencia circular de un sistema no amortiguado es:

- Elegir una coordenada de posición q de manera que $q = 0$ en el equilibrio estático.
- Deducir la expresión para la energía potencial V en una posición arbitraria. (Cuando se hagan aproximaciones de desplazamientos pequeños, como sen $q \approx q$ y cos $q \approx 1-q^2/2$, hay que asegurarse de mantener todos los términos cuadráticos y lineales en q). Identificar K comparando su expresión con la ecuación (20.37).
- Obtener la expresión para la energía cinética T en una posición arbitraria e identificar M comparando la expresión con la ecuación (20.36).
- Calcular la frecuencia circular con $p = \sqrt{K/M}$.

b. *Principio de Rayleigh*

En algunos casos, las complicaciones geométricas dificultan el cálculo de la energía cinética en una posición arbitraria. Esos casos se analizan mejor con el principio de Rayleigh, que es una variante del principio de conservación de la energía. Este principio sólo requiere la energía cinética en una posición específica del sistema, lo que simplifica la geometría. El método también puede aplicarse para un análisis aproximado de los sistemas cuyo movimiento no es puramente armónico.

Como antes, se supone que el sistema es lineal con un solo grado de libertad. Sea q la coordenada de posición generalizada, de manera que $q = 0$ en la posición de equilibrio estático. De la conservación de la energía mecánica en la ecuación (20.35) se establecen las siguientes conclusiones:

- La posición de energía cinética máxima también es la posición de energía potencial mínima. De acuerdo con la ecuación (20.38), $V_{min} = V_0$ ocurre en $q = 0$; por tanto T_{max} también sucede en $q = 0$.
- La posición de energía potencial máxima también es la de energía cinética mínima. Observe que en esta posición $\dot{q} = 0$, tal que $T_{min} = 0$.

La conservación de la energía mecánica requiere que $T_{max} + V_{min} = T_{min} + V_{max}$. Se tiene que $V_{min} = V_0$ y $T_{min} = 0$, entonces el balance de energía da

$$T_{max} = V_{max} - V_0 \tag{20.41}$$

que se conoce como el *principio de Rayleigh*. Si el plano de referencia para la energía potencial se elige de modo que $V_0 = 0$, este principio adopta la forma más convencional $T_{max} = V_{max}$. En la ecuación (20.41) se tiene

$$V_{max} = V_0 + \frac{1}{2}Kq_{max}^2 \qquad T_{max} = \frac{1}{2}M\dot{q}_{max}^2 \tag{a}$$

Cuando se aplica el principio de Rayleigh, se debe *suponer* que el movimiento es armónico simple: $q = A\ \text{sen}(pt + \alpha)$. Por tanto, $q_{max} = A$ y $\dot{q}_{max} = Ap$, o

$$\dot{q}_{max} = pq_{max} \tag{20.42}$$

Al sustituir las ecuaciones (a) y (20.42) en la (20.41), se obtiene

$$\frac{1}{2}p^2Mq_{max}^2 = V_0 + \frac{1}{2}Kq_{max}^2 - V_0$$

de donde $p = \sqrt{K/M}$ como antes.

El procedimiento para aplicar el método de Rayleigh es:

- Elegir una coordenada de posición generalizada q de manera que $q = 0$ en equilibrio estático.
- Deducir la expresión para la energía potencial V en la posición $q = q_{max}$, obteniendo así V_{max} como una función de q_{max}. (Al hacer aproximaciones de desplazamientos pequeños, asegúrese de mantener los términos lineales y cuadráticos en q_{max}.)
- Deducir la expresión para la energía cinética T en la posición de equilibrio estático $q = 0$. El resultado es T_{max} como una función de $\dot{q}_{max}$.
- Sustituir $\dot{q}_{max}$ pq_{max} en la expresión para T_{max}, obteniendo T_{max} como una función de q_{max}.
- Sustituir las expresiones para T_{max} y V_{max} en la ecuación (20.41) y resolver para p (la q_{max} invariablemente se eliminará).

Problema de ejemplo 20.8

(a)

(b)

En la figura (a), el cuerpo rígido consiste en las pequeñas masas m_1 y m_2, que están conectadas a los extremos de una barra ligera que rota respecto a un perno en O. El resorte ideal no está deformado cuando la barra es vertical. Determine la frecuencia circular de pequeñas vibraciones.



Solución

Debido a que la energía cinética del sistema se calcula fácilmente, este problema está bien adaptado a una solución en la que se usa la conservación de la energía. Como la coordenada de posición se elige el ángulo θ que se muestra en la figura (b). Observe que $\theta = 0$ es la posición de equilibrio estático, como se requiere con el método de energía. Al tomar la posición de equilibrio como el plano de referencia para la energía potencial y referirse a la figura (b), se obtiene

$$V = m_1 g h_1 - m_2 g h_2 + \frac{1}{2} k (e\theta)^2$$

donde $h_1 = a(1 - \cos\theta)$ y $h_2 = b(1 - \cos\theta)$. Con la aproximación $\cos\theta \approx 1 - \theta^2/2$, se obtiene $h_1 \approx a\theta^2/2$ y $h_2 \approx b\theta^2/2$. Por tanto, la energía potencial queda

$$V = \frac{1}{2}(m_1 g a - m_2 g b + k e^2)\theta^2$$

La comparación con la ecuación (20.37) resulta

$$K = m_1 g a - m_2 g b + k e^2$$

Ya que O es un punto fijo, la energía cinética del sistema es

$$T = \frac{1}{2} I_O \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}(m_1 a^2 + m_2 b^2)\dot{\theta}^2$$

Al comparar esto con la ecuación (20.36) se concluye que

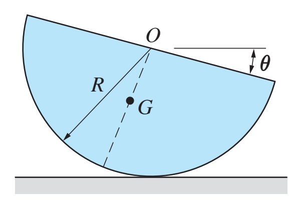
$$M = m_1 a^2 + m_2 b^2$$

Por tanto, la frecuencia circular del sistema es

$$p = \sqrt{\frac{K}{M}} = \sqrt{\frac{m_1 g a - m_2 g b + k e^2}{m_1 a^2 + m_2 b^2}}$$

Respuesta

Problema de ejemplo 20.9



(a)

La figura (a) muestra un semicilindro homogéneo que realiza un movimiento de vaivén, sin deslizarse, en el plano horizontal. El ángulo θ define la posición angular del semicilindro. Determine la frecuencia circular natural de las oscilaciones para las amplitudes pequeñas, si se supone que el movimiento es armónico simple. El centro de masa G se localiza a la distancia $4R/3\pi = 0.4244R$ del punto O.

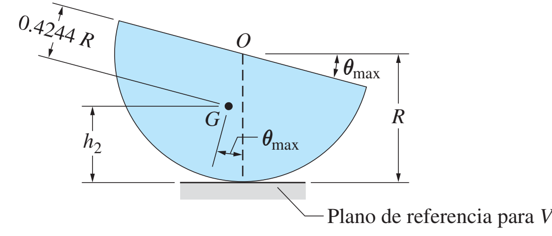
Solución

Este problema no está bien adaptado para resolverse con la conservación de la energía, debido a que la energía cinética no se calcula con facilidad en una *posición arbitraria*. La fuente de la dificultad es el desplazamiento del punto de contacto entre el semicilindro y la superficie horizontal, que origina complicaciones geométricas. Esta dificultad puede superarse utilizando el principio de Rayleigh.

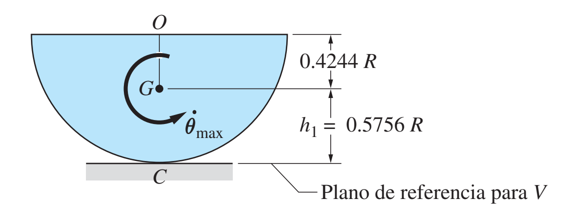
En la figura (b) se muestra la posición de máxima energía potencial. Al elegir la superficie horizontal como el plano de referencia, la energía potencial es

$$V_{max} = mg(R - 0.4244R\cos\theta_{max}) \approx mg\left(R - 0.4244R\left(1 - \frac{\theta_{max}^2}{2}\right)\right)$$
$$= 0.5756mgR + 0.2122mgR\theta_{max}^2$$

Observe que $V_0 = 0.5756mg\,R$ es la energía potencial en la posición de equilibrio ($\theta = 0$).



(b) Posición de desplazamiento máximo ($V = V_{max}$, $T = 0$)



(c) Que pasa por la posición de equilibrio ($V = V_0$, $T = T_{max}$)

La energía cinética máxima del semicilindro ocurre en la posición $\theta = 0$, que se muestra en la figura (c). Debido a que el punto de contacto C es el centro instantáneo para la velocidad, la energía cinética es $T_{max} = (1/2)I_C\dot{\theta}_{max}^2$. De acuerdo con el teorema de los ejes paralelos

$$\bar{I} = I_O - m(\overline{OG})^2 = 0.5mR^2 - m(0.4244R)^2 = 0.3199mR^2$$
$$I_C = \bar{I} + m(\overline{GC})^2 = 0.3199mR^2 + m(0.5756R)^2 = 0.6512mR^2$$

de manera que

$$T_{max} = \frac{1}{2}(0.6512mR^2)\dot{\theta}_{max}^2 = 0.3256mR^2\dot{\theta}_{max}^2$$
$$= 0.3256mR^2p^2\theta_{max}^2$$

En el último paso, se sustituyó $\dot{\theta}_{max}^2 = p^2\theta_{max}^2$, así se supuso que el movimiento es armónico.

El principio de Rayleigh $T_{max} = V_{max} - V_0$ ahora queda

$$0.3256mR^2p^2\theta_{max}^2 = 0.2122mgR\theta_{max}^2$$

de donde resulta la siguiente expresión para la frecuencia circular

$$p = 0.807\sqrt{\frac{g}{R}}$$ *Respuesta*

Problemas

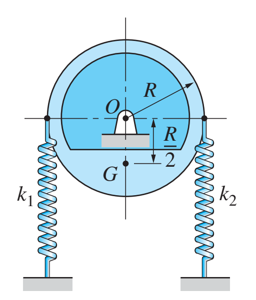


Fig. P20.81

20.81 El centro de masa del disco desequilibrado de peso W se localiza en G. En la posición de equilibrio que se muestra, los dos resortes unidos al borde del disco no tienen deformación. Con el método de la energía, determine la frecuencia circular natural del disco para las oscilaciones pequeñas. Utilice los siguientes datos: $W = 40$ lb, $R = 2.2$ pies, $\bar{k} = 1.5$ pies (radio de giro respecto a G), $k_1 = 30$ lb/pie y $k_2 = 40$ lb/pie.

20.82 Las barras uniformes AB y BC, cada una de longitud L y masa m, están conectadas por medio de un perno en B. El extremo C de la barra BC está unido al soporte deslizante. El sistema está en equilibrio en la posición que se muestra. Calcule el periodo de las oscilaciones pequeñas respecto a esta posición.

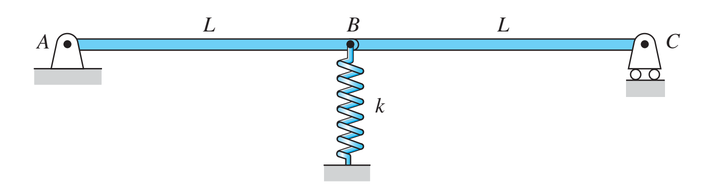


Fig. P20.82

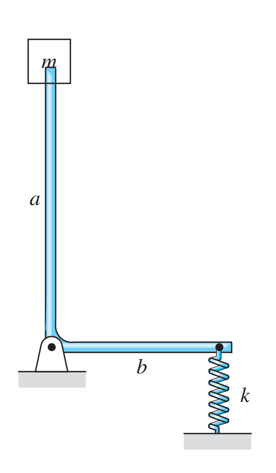


Fig. P20.83

20.83 Un extremo del brazo en forma de L está conectado al bloque de masa m, mientras que el otro se encuentra unido al resorte lineal. Es posible despreciar la masa del brazo. (a) Obtenga la frecuencia circular natural de pequeñas oscilaciones respecto a la posición de equilibrio que se muestra. (b) ¿Cuál es el rango de valores de la constante de resorte k tal que las oscilaciones sean estables?

20.84 El aro semicircular homogéneo se balancea hacia adelante y hacia atrás sin deslizarse sobre la superficie horizontal. Determine la frecuencia circular natural de las oscilaciones para las amplitudes pequeñas. Suponga que el movimiento es armónico simple.

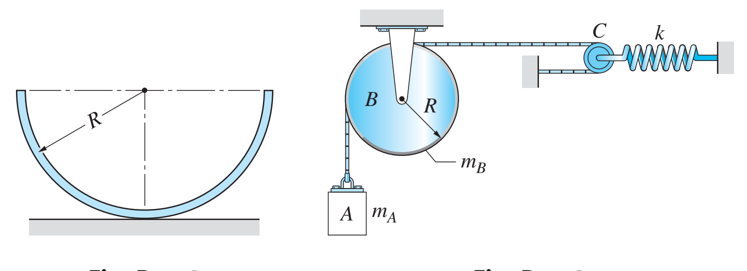


Fig. P20.84

Fig. P20.85

20.85 La polea B puede aproximarse como un disco uniforme, y es posible despreciar la masa de la polea C. Encuentre la expresión para la frecuencia natural del sistema.

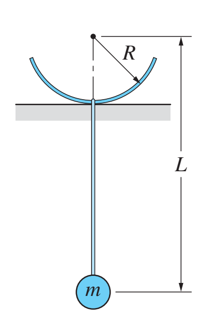


Fig. P20.86

20.86 El péndulo está rígidamente unido a un aro que rueda sin deslizarse sobre la superficie horizontal. Despreciando las masas del aro y la varilla, calcule el periodo para las oscilaciones pequeñas respecto a la posición de equilibrio que se muestra. Suponga que el movimiento es armónico simple.

20.87 La varilla uniforme de masa m y longitud R está unida a una base circular de radio R y masa despreciable. El sistema se suelta a partir del reposo en la posición que se muestra, en donde θ es un ángulo pequeño. Determine la frecuencia circular de las oscilaciones resultantes, si se supone que el movimiento es armónico y que la base no se desliza sobre la superficie horizontal.

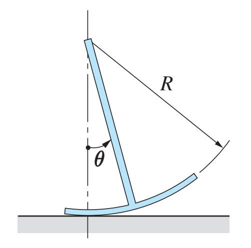


Fig. P20.87

20.88 El péndulo consiste en un disco uniforme unido a una varilla de peso despreciable. Obtenga los dos valores de la distancia L de manera que el periodo del péndulo sea 1.4 s para las amplitudes pequeñas.

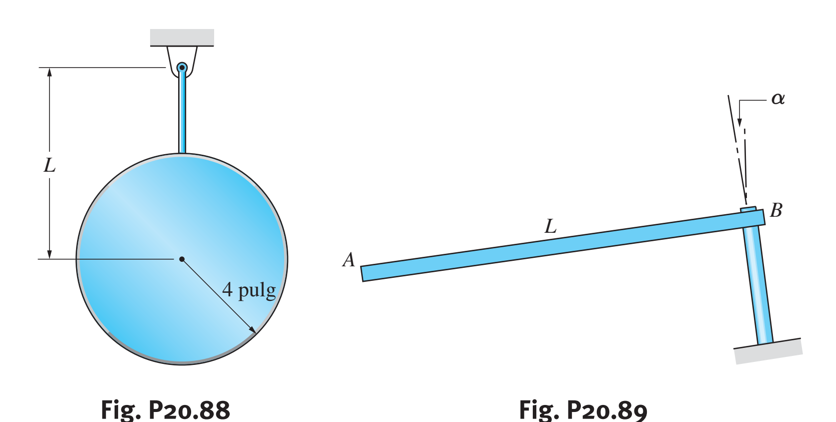


Fig. P20.88 **Fig. P20.89**

***20.89** La barra delgada uniforme AB de masa m rota con libertad respecto al eje inclinado a un ángulo α de la vertical. Se da a la barra un pequeño desplazamiento angular de la posición de equilibrio que se muestra y entonces se suelta. Determine la frecuencia de la vibración resultante.

20.90 Si la barra delgada uniforme está en equilibrio en la posición que se muestra, calcule el periodo de vibración para las amplitudes pequeñas.

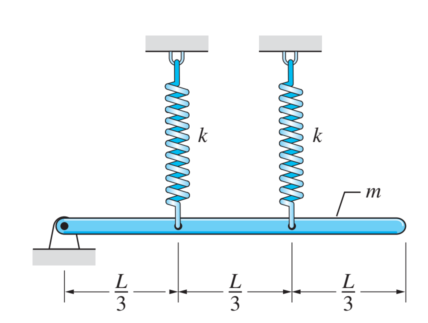


Fig. P20.90

20.91 El disco homogéneo de masa m y radio R rueda sin deslizarse sobre la superficie inclinada. Obtenga la frecuencia de las oscilaciones pequeñas del disco respecto a su posición de equilibrio.

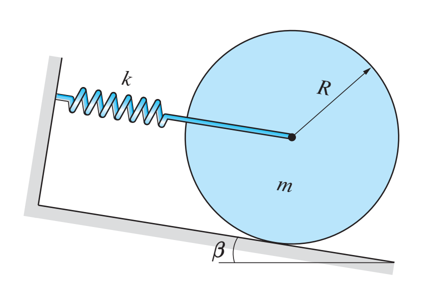


Fig. P20.91

20.92 Un bloque de madera uniforme flota en el agua cuando se desplaza ligeramente en la dirección vertical y se suelta. Encuentre el periodo de la oscilación resultante. Utilice las siguientes densidades de peso: $\rho_{\text{agua}} = 0.036$ lb/pulg^3 y $\rho_{\text{madera}} = 0.022$ lb/pulg^3.

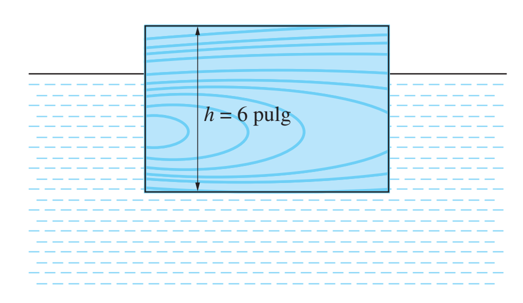


Fig. P20.92

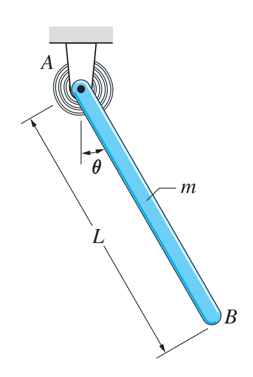
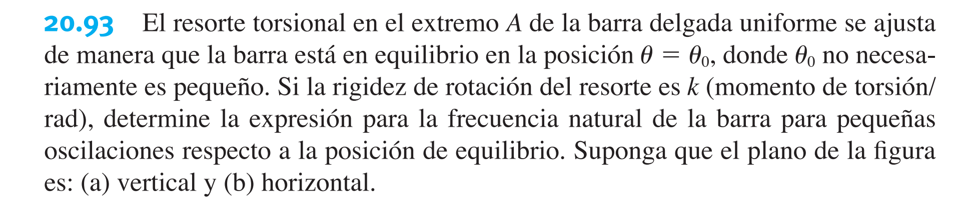


Fig. P20.93



20.93 El resorte torsional en el extremo A de la barra delgada uniforme se ajusta de manera que la barra está en equilibrio en la posición $\theta = \theta_0$, donde θ_0 no necesariamente es pequeño. Si la rigidez de rotación del resorte es k (momento de torsión/rad), determine la expresión para la frecuencia natural de la barra para pequeñas oscilaciones respecto a la posición de equilibrio. Suponga que el plano de la figura es: (a) vertical y (b) horizontal.

20.94 Los deslizadores en A y G están anclados a la barra uniforme AB y se mueven libremente en las ranuras fijas. El resorte en A inicialmente no está deformado y la barra está en reposo cuando $\theta = 0$. (a) Deduzca la ecuación diferencial de movimiento para la barra, suponga que el ángulo θ permanece pequeño. (b) Calcule el periodo de oscilación si $m = 15$ kg, $L = 1.2$ m y $k = 490.5$ N/m. (c) Si se utilizan los valores de L y k que se dieron en la parte (b), encuentre el valor mayor de m de modo que el ángulo θ permanezca pequeño.

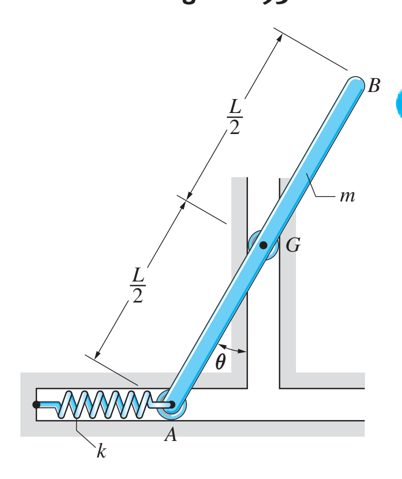


Fig. P20.94, P20.95

20.95 (a) Demuestre que la ecuación diferencial de movimiento para la barra descrita en el problema 20.94 es

$$\ddot{\theta} = -\left[\left(\dot{\theta}^2 + \frac{k}{m}\right)\cos\theta - \frac{2g}{L}\right]\frac{3\,\mathrm{sen}\,\theta}{1 + 3\,\mathrm{sen}^2\,\theta}$$

(b) Aplique integración numérica con $m = 15$ kg, $L = 1.2$ m y $k = 490.5$ N/m para calcular el periodo de oscilación si la amplitud es: (i) pequeña; (ii) 30º.

20.96 La esfera homogénea de radio r y masa m rueda sin deslizarse sobre una superficie cilíndrica de radio R. Calcule la frecuencia de las oscilaciones pequeñas respecto a la posición de equilibrio que se muestra.

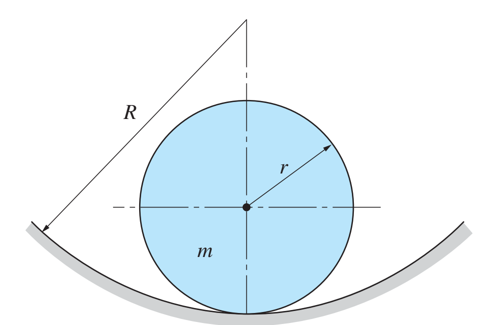


Fig. P20.96

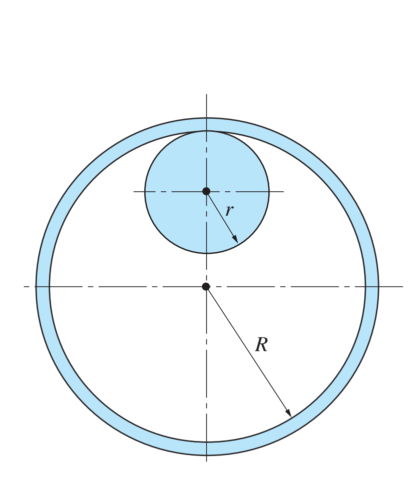


Fig. P20.97

20.97 Un aro delgado de radio R y masa m está suspendido de una clavija de radio r. Determine la frecuencia circular de las oscilaciones pequeñas respecto a la posición de equilibrio que se muestra si el aro no se desliza sobre la clavija. Suponga que el movimiento es armónico simple.

Repaso de ecuaciones

Vibración libre no amortiguada

Ecuación de movimiento: $m\ddot{x} + kx = 0$

Solución general: $x = A\cos pt + B\,\text{sen}\,pt = E\,\text{sen}(pt + \alpha)$

Frecuencia circular: $p = \sqrt{k/m}$

Vibración libre amortiguada

Ecuación de movimiento: $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$

Solución general: $x = A_1 e^{\left(-\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)pt} + A_2 e^{\left(-\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)pt}$

Factor de amortiguamiento: $\zeta = \dfrac{c}{c_{cr}} \qquad c_{cr} = 2mp$

Frecuencia circular amortiguada: $\omega_d = p\sqrt{1-\zeta^2}$

Vibración forzada

Ecuación de movimiento: $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P_0\,\text{sen}\,\omega t$

Solución particular: $X\,\text{sen}(\omega t - \phi)$

Amplitud: $X = \dfrac{P_0/k}{\sqrt{[1-(\omega/p)^2]^2 + (2\zeta\omega/p)^2}}$

Ángulo de fase: $\phi = \tan^{-1}\left[\dfrac{2\zeta\omega/p}{1-(\omega/p)^2}\right]$

Desplazamiento armónico del soporte

$$y = Y\,\text{sen}\,\omega t$$

Ecuación de movimiento: $m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = mY\omega^2\,\text{sen}\,\omega t$

$z = x - y =$ coordenada de posición de la masa relativa al soporte

Método de energía

$$V = V_0 + F_0 q + \frac{1}{2}Kq^2 \qquad T = \frac{1}{2}M\dot{q}^2 \qquad p = \sqrt{K/M}$$

Principio de Rayleigh

$$T_{max} = V_{max} - V_0$$

Problemas de repaso

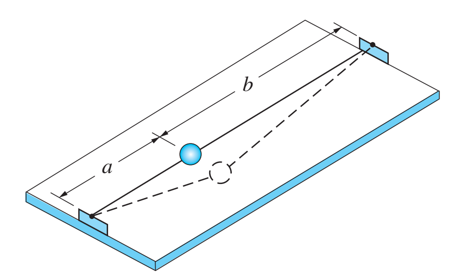


Fig. P20.99

20.98 La masa de 10 kg se pone en movimiento en el tiempo $t = 0$ con las condiciones iniciales $x = 20$ mm y $\dot{x} = -110$mm/s, donde x se mide desde la posición en que los resortes no están deformados. (a) Deduzca la ecuación diferencial de movimiento para la masa. (b) Calcule la frecuencia de vibración. (c) Determine la expresión para $x(t)$.

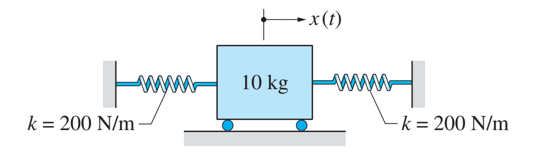


Fig. P20.98

20.99 Las dos cuerdas elásticas están conectadas a la pelota de masa m y estiradas a la tensión inicial T. Si a la pelota se le da un pequeño desplazamiento lateral y se suelta, obtenga la frecuencia de la vibración resultante.

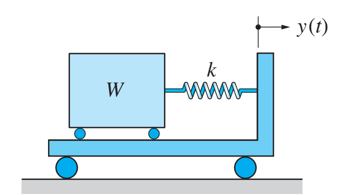


Fig. P20.100

20.100 El bloque de peso $W = 2.4$ lb está conectado a la mesa oscilatoria mediante un resorte de rigidez $k = 12$ lb/pulg. El sistema está en reposo con el resorte no deformado cuando se impone sobre la mesa el desplazamiento armónico $y(t) = 0.25$ sen $60t$ pulg. Encuentre el desplazamiento del peso relativo a la mesa como una función del tiempo.

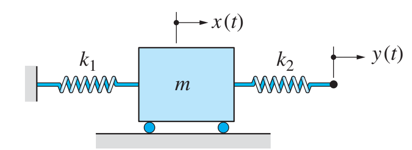


Fig. P20.101

20.101 Dos resortes de rigidez k_1 y k_2 están unidos a la masa m. Uno de ellos está conectado a un soporte rígido, mientras que el extremo libre del otro experimenta el desplazamiento armónico $y(t) = Y$ sen ωt. (a) Deduzca la ecuación diferencial de movimiento para la masa. (b) Determine la amplitud de la vibración de estado estacionario. (c) Encuentre el factor de magnificación.

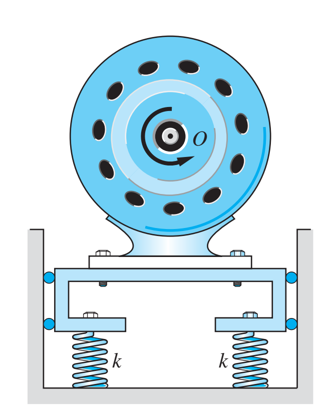


Fig. P20.102

20.102 El motor eléctrico de masa total de 30 kg se apoya en cuatro resortes idénticos de rigidez $k = 8$ kN/m cada uno. El centro de masa de la armadura de 8 kg está a 250 mm del eje O de la armadura. (a) Obtenga la rapidez resonante del motor. (b) Encuentre la amplitud de la vibración de estado estacionario si el motor funciona al doble de la rapidez resonante.

20.103 La figura muestra un oscilador amortiguado y la gráfica de su desplazamiento durante la vibración libre (x se mide desde la posición de equilibrio). Si se

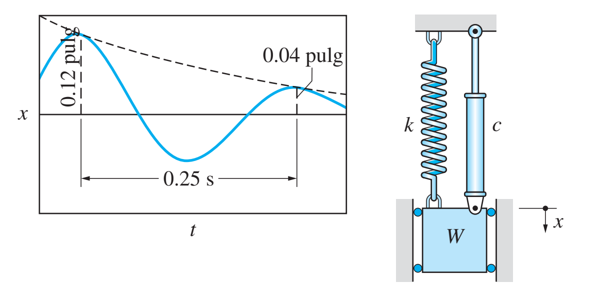


Fig. P20.103

sabe que el peso del oscilador es $W = 0.5$ lb, encuentre la rigidez del resorte k y el coeficiente de amortiguamiento c. (*Sugerencia:* utilice el decremento logarítmico).

20.104 La masa de 10 lb se libera desde el reposo al tiempo $t = 0$ en la posición $x = 2$ pulg, donde x se mide desde la posición en la que el resorte no tiene deformación. Si el factor de amortiguamiento es 0.5, obtenga la expresión para $x(t)$.

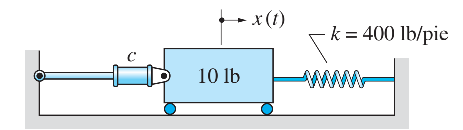


Fig. P20.104

20.105 El sistema se pone en movimiento al tiempo $t = 0$, con $x = 0$ y $\dot{x} = 2$m/s, donde x se mide desde la posición no deformada del resorte. Determine la expresión para $x(t)$.

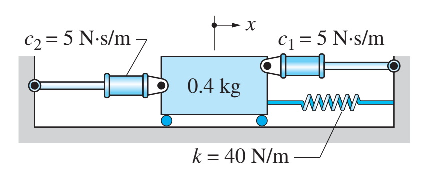


Fig. P20.105, P20.106

20.106 Resuelva el problema 20.105 si c_2 se cambia a 3 N · s/m.

20.107 Para el sistema que se muestra, $m = 0.5$ slugs, $k = 120$ lb/pie y $c = 18.6$ lb · s/pie. (a) Determine el factor de magnificación si la frecuencia circular ω de la fuerza aplicada es igual a la frecuencia resonante p del sistema. (b) Encuentre el máximo factor de magnificación posible y el valor correspondiente de ω.

20.108 Repita el problema 20.107 si el coeficiente de amortiguamiento se cambia a $c = 6$ lb · s/pie.

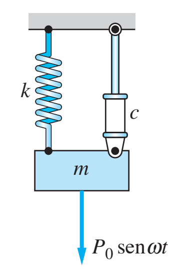


Fig. P20.107, P20.108

20.109 Determine el desplazamiento de estado estacionario $x(t)$ de la masa de 6 kg si $Y = 28$ mm y $\omega = 20$ rad/s. ¿$x(t)$ atrasa o adelanta a $y(t)$?

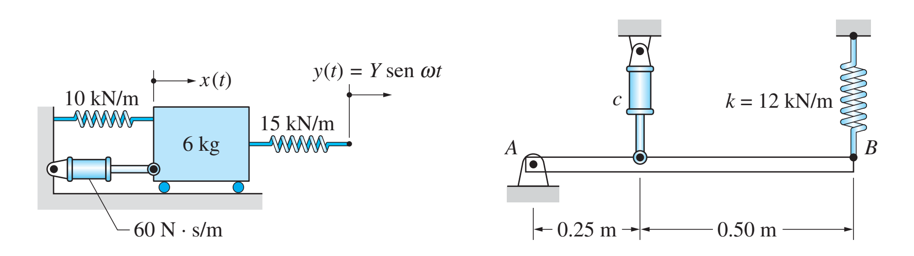


Fig. P20.109 **Fig. P20.110, P20.111**

20.110 La barra rígida AB de 24 kg está en equilibrio en la posición que se muestra. Obtenga el coeficiente de amortiguamiento c para el que la barra estaría críticamente amortiguada para las oscilaciones pequeñas.

20.111 La barra rígida AB tiene una masa de 24 kg y el coeficiente de amortiguamiento es $c = 3$ kN · s/m. La barra está bajo la acción de una fuerza vertical (que no se muestra) $P(t) = 0.5$ sen $25t$ kN que actúa en B. Encuentre la amplitud de desplazamiento del extremo B de la vibración de estado estacionario.

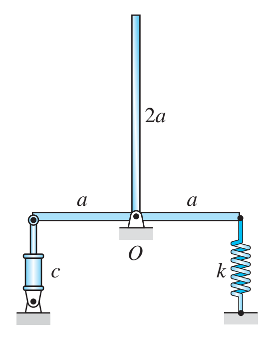


Fig. P20.112

20.112 El cuerpo en forma de T está hecho de una barra uniforme que tiene una masa por unidad de longitud ρ. En la posición que se muestra, el cuerpo está en equilibrio. Determine si el sistema es sobreamortiguado o subamortiguado para las oscilaciones pequeñas, dado que $\rho = 0.5$ kg/m, $a = 500$ mm, $c = 20$ N · s/m y $k = 800$ N/m.

20.113 La figura muestra el interior de un instrumento que se usa para medir la amplitud Y del movimiento vertical $y(t) = Y$ sen ωt. El brazo en forma de L está en equilibrio en la posición que se muestra. Deduzca la ecuación de movimiento para la masa m en términos de z, el desplazamiento de la masa relativo al marco. Suponga que hay pequeños desplazamientos y desprecie todas las masas excepto m.

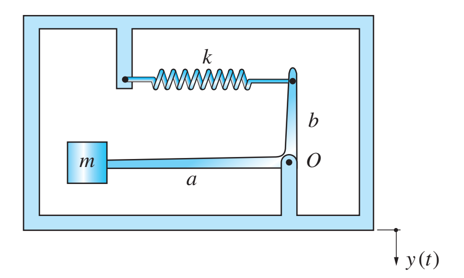


Fig. P20.113

20.114 Para el sistema masa-resorte amortiguado que se muestra, el factor de amortiguamiento es $\zeta = 0.25$ y la frecuencia natural no amortiguada es $f = 3$ Hz. Cuando el soporte experimenta el movimiento vertical $y(t) = Y$ sen $18t$ (t es el tiempo en segundos), la amplitud relativa de la vibración de estado estacionario de la masa m es $Z = 10$ mm. Obtenga la amplitud Y del desplazamiento del soporte.

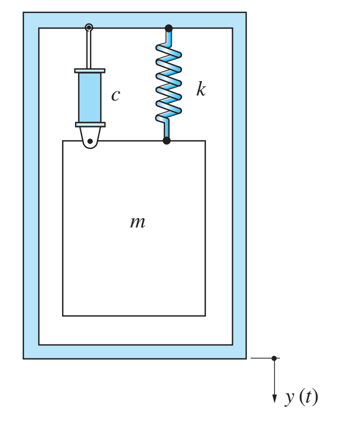


Fig. P20.114

D

Prueba de la ecuación de la velocidad relativa para el movimiento de un cuerpo rígido

Aquí se prueba la ecuación (19.1a), $\mathbf{v}_{B/A} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$, para el movimiento de un cuerpo rígido, donde $\boldsymbol{\omega}$ es la *velocidad angular* del mismo. En el caso tridimensional, este resultado no es obvio de manera intuitiva, ni su demostración es trivial.

La figura D.1 muestra cuatro puntos A, B, C, y D pertenecientes al mismo cuerpo rígido. Esos puntos pueden elegirse arbitrariamente, excepto por las siguientes restricciones: 1. el punto de referencia A no debe estar sobre las rectas BC o CD, y 2. los cuatro puntos no deben encontrarse en el mismo plano.

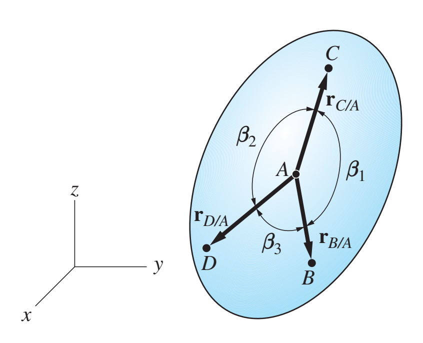


Fig. D.1

La rigidez del cuerpo impone las siguientes restricciones sobre el movimiento: 1. las longitudes de los vectores de posición relativa que se muestran en la figura D.1 permanecen constantes, y 2. los ángulos β_1, β_2 y β_3, entre los vectores de posición relativa también son constantes. Se demostrará que esas condiciones se satisfacen sólo si la velocidad relativa entre dos puntos cualesquiera sobre el cuerpo tiene la forma de la ecuación (19.1a).

Primero considere el requisito de que la magnitud del vector $\mathbf{r}_{B/A}$ es constante: $\mathbf{r}_{B/A} \cdot \mathbf{r}_{B/A} = |\mathbf{r}_{B/A}|^2 =$ constante. En esta ecuación se toma la derivada temporal de ambos lados, para obtener $(\mathbf{r}_{B/A} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{B/A}) + (\dot{\mathbf{r}}_{B/A} \cdot \mathbf{r}_{B/A}) = 0$ o $2\mathbf{r}_{B/A} \cdot \mathbf{v}_{B/A} = 0$. Un argumento similar puede aplicarse a $\mathbf{r}_{C/A}$ y $\mathbf{r}_{D/A}$. En consecuencia, resulta

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{B/A} \cdot \mathbf{v}_{B/A} &= 0 \\ \mathbf{r}_{C/A} \cdot \mathbf{v}_{C/A} &= 0 \\ \mathbf{r}_{D/A} \cdot \mathbf{v}_{D/A} &= 0 \end{aligned} \tag{D.1}$$

La primera de esas ecuaciones se satisface si $\mathbf{v}_{B/A} = \mathbf{0}$ o si $\mathbf{r}_{B/A}$ es perpendicular a $\mathbf{v}_{B/A}$. En cualquier caso, se concluye que el vector de velocidad relativa debe ser de la forma $\mathbf{v}_{B/A} = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_{B/A}$, donde $\boldsymbol{\omega}_1$ es un vector. Observe que si $\boldsymbol{\omega}_1 = \mathbf{0}$ o si $\boldsymbol{\omega}_1$ es paralelo a $\mathbf{r}_{B/A}$, se obtiene $\mathbf{v}_{B/A} = \mathbf{0}$. O bien, $\mathbf{v}_{B/A}$ es perpendicular a $\mathbf{r}_{B/A}$ (esto resulta de las propiedades del producto cruz). Si se presentan argumentos similares a los dos casos restantes en las ecuaciones (D.1), tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{B/A} &= \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_{B/A} \\ \mathbf{v}_{C/A} &= \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_{C/A} \\ \mathbf{v}_{D/A} &= \boldsymbol{\omega}_3 \times \mathbf{r}_{D/A} \end{aligned} \tag{D.2}$$

Hasta este momento no se han impuesto restricciones sobre los vectores $\boldsymbol{\omega}_1$, $\boldsymbol{\omega}_2$, y $\boldsymbol{\omega}_3$. Las ecuaciones (D.2) son necesarias y suficientes para que las magnitudes de los vectores de posición relativa durante el movimiento del cuerpo permanezcan constantes.

Ahora considere el requisito de que el ángulo β_1, entre $\mathbf{r}_{B/A}$ y $\mathbf{r}_{C/A}$, permanece constante. Al utilizar las propiedades del producto punto se tiene que $\mathbf{r}_{B/A} \cdot \mathbf{r}_{C/A} = |\mathbf{r}_{B/A}||\mathbf{r}_{C/A}| \cos \beta_1$. Si se toma la derivada temporal de esta ecuación y se impone la condición de que $|\mathbf{r}_{B/A}|$, $|\mathbf{r}_{C/A}|$ y β_1 sean constantes, resulta

$$(\mathbf{r}_{B/A} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{C/A}) + (\dot{\mathbf{r}}_{B/A} \cdot \mathbf{r}_{C/A}) = 0$$

o

$$(\mathbf{r}_{B/A} \cdot \mathbf{v}_{C/A}) + (\mathbf{r}_{C/A} \cdot \mathbf{v}_{B/A}) = 0$$

Es posible utilizar argumentos similares para β_2 y β_3, así:

$$\begin{aligned} (\mathbf{r}_{B/A} \cdot \mathbf{v}_{C/A}) + (\mathbf{r}_{C/A} \cdot \mathbf{v}_{B/A}) &= 0 \\ (\mathbf{r}_{C/A} \cdot \mathbf{v}_{D/A}) + (\mathbf{r}_{D/A} \cdot \mathbf{v}_{C/A}) &= 0 \\ (\mathbf{r}_{D/A} \cdot \mathbf{v}_{B/A}) + (\mathbf{r}_{B/A} \cdot \mathbf{v}_{D/A}) &= 0 \end{aligned} \tag{D.3}$$

Al usar las ecuaciones (D.2) para eliminar las velocidades relativas de las ecuaciones (D.3), se tiene

$$(\mathbf{r}_{B/A} \cdot \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_{C/A}) + (\mathbf{r}_{C/A} \cdot \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_{B/A}) = 0$$
(etc.)

Cuando se utilizan las propiedades del triple producto escalar, esas ecuaciones se simplifican a

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{\omega}_2) \cdot (\mathbf{r}_{B/A} \times \mathbf{r}_{C/A}) &= 0 \\ (\boldsymbol{\omega}_2 - \boldsymbol{\omega}_3) \cdot (\mathbf{r}_{C/A} \times \mathbf{r}_{D/A}) &= 0 \\ (\boldsymbol{\omega}_3 - \boldsymbol{\omega}_1) \cdot (\mathbf{r}_{D/A} \times \mathbf{r}_{B/A}) &= 0 \end{aligned} \tag{D.4}$$

Esas tres ecuaciones escalares contienen nueve incógnitas: las tres componentes de $\boldsymbol{\omega}_1$, $\boldsymbol{\omega}_2$, y $\boldsymbol{\omega}_3$.

La solución general de las ecuaciones (D.4) es (esto puede verificarse por sustitución)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_1 &= \boldsymbol{\omega} + k_1\mathbf{r}_{B/A} \\ \boldsymbol{\omega}_2 &= \boldsymbol{\omega} + k_2\mathbf{r}_{C/A} \\ \boldsymbol{\omega}_3 &= \boldsymbol{\omega} + k_3\mathbf{r}_{D/A} \end{aligned} \tag{D.5}$$

donde $\boldsymbol{\omega}$ es la velocidad angular del cuerpo y las k son constantes indeterminadas.

Cuando las ecuaciones (D.5) se sustituyen en las (D.2), las k se eliminan (porque $\mathbf{r}_{B/A} \times \mathbf{r}_{B/A} = \mathbf{0}$, etc.) y los resultados finales son

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{B/A} &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A} \\ \mathbf{v}_{C/A} &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{C/A} \\ \mathbf{v}_{D/A} &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{D/A} \end{aligned} \tag{D.6}$$

Las ecuaciones (D.6) no sólo prueban la (19.1a), sino que también demuestran que $\boldsymbol{\omega}$ (la velocidad angular) es una propiedad del cuerpo que no depende de los puntos seleccionados (recuerde que la elección de los puntos A, B, C y D fue arbitraria).





Solución numérica de ecuaciones diferenciales

E.1 Introducción

En general, la aceleración de una partícula depende de su velocidad, posición y tiempo. Por ejemplo, si una de ellas se mueve en el plano *xy*, las componentes de su aceleración son

$$a_x = f_x(x, y, v_x, v_y, t) \quad a_y = f_y(x, y, v_x, v_y, t) \tag{E.1}$$

donde f_x y f_y son funciones conocidas que se han obtenido por medio del análisis cinético. Cuando las ecuaciones se reescriben en la forma

$$\ddot{x} = f_x(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t) \quad \ddot{y} = f_y(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t) \tag{E.2}$$

se observa que representan un conjunto acoplado de ecuaciones diferenciales de segundo orden. El término *acoplado* significa que los movimientos en las tres direcciones coordenadas dependen una de otra. Es difícil, si no es que imposible, resolver analíticamente las ecuaciones diferenciales acopladas. Si éstas son lineales, quizá pueda encontrarse una solución en forma cerrada, pero rara vez vale la pena intentarlo. Como regla general, se dice que las ecuaciones diferenciales no lineales no tienen soluciones analíticas. Incluso la única ecuación diferencial que se ha encontrado en el movimiento rectilíneo

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t)$$

es imposible de resolver analíticamente, a menos que pertenezca a uno de los casos especiales que se estudiaron en el apartado 12.4.

E.2 Métodos numéricos

Como las soluciones analíticas rara vez están disponibles, los métodos numéricos son la herramienta principal para resolver las ecuaciones (E.2). Existe gran cantidad de software para la solución de las ecuaciones diferenciales ordinarias. La mayoría de los programas cuentan con aplicaciones que pueden usarse para graficar

los resultados. Casi todos los programas existentes trabajan con conjuntos de ecuaciones diferenciales de primer orden de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)\\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)\\ &\vdots\\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)\end{aligned} \tag{E.3}$$

en lugar de las de segundo orden de las ecuaciones (E.2). Esto no es problema porque las (E.2) pueden transformarse con facilidad en *ecuaciones equivalentes de primer orden* de la forma que se muestra en las (E.3). Con la notación

$$x = x_1 \quad y = x_2 \quad \dot{x} = x_3 \quad \dot{y} = x_4 \tag{E.4}$$

las ecuaciones equivalentes de primer orden son

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_3\\ \dot{x}_2 &= x_4\\ \dot{x}_3 &= f_x(x_1, x_2, x_3, x_4, t)\\ \dot{x}_4 &= f_y(x_1, x_2, x_3, x_4, t)\end{aligned} \tag{E.5}$$

En notación vectorial, estas ecuaciones son

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \tag{E.6}$$

Todos los métodos numéricos con los que se resuelven las ecuaciones diferenciales funcionan de manera similar: empiezan con las condiciones iniciales, avanzan en incrementos de tiempo Δt, calculando $\mathbf{x}$ en cada paso. Entonces el resultado es una tabla de $\mathbf{x}$ contra t. La entrada requerida consiste en el vector $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ que define las ecuaciones diferenciales de primer orden, las condiciones iniciales y el lapso de tiempo de la solución. Es poco común que se necesite especificar el incremento de tiempo Δt, porque la mayoría de los programas calculan de manera automática el valor más eficiente de Δt. La diferencia esencial entre los diversos paquetes de software está en la sintaxis que se utiliza.

E.3 Aplicación del MATLAB

a. Función `ode45` de MATLAB

MATLAB® es uno de tantos paquetes de software con los que es posible resolver ecuaciones diferenciales. No es el más fácil de emplear, pero está disponible en las instituciones académicas, así que se adopta en este libro. MATLAB tiene varias funciones para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias. La más popular de ellas es la `ode45`, que utiliza el método adaptativo de quinto orden de Runge-Kutta (los métodos “adaptativos” ajustan Δt para mantener los errores dentro de límites establecidos). La llamada de función tiene la forma

```
[t,x] = ode45(@f,[t0 t1 t2...tEnd],[x1 x2 x3...xn])
```

Los argumentos de entrada son:

`@f:` los datos de la función f proporcionada por el usuario que retorna el vector $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ en la ecuación (E.6). Una *función dato* en MATLAB contiene la información requerida para encontrar y ejecutar una función. El nombre de una función dato es simplemente el carácter @ seguido del nombre de la función.

`[t0 t1 t2 ... tEnd]:` tiempos en los que se obtendrá la solución. Si ésta se obtendrá de `t0` a `tEnd` en pasos de `dt`, utilice `[t0:dt:tEnd].`

`[x1 x2 x3 ... xn]:` los valores iniciales de $x_1, x_2, \ldots, x_n$

Los dos aspectos en la salida son:

`t:` un vector que contiene los tiempos en los que se obtendrá la solución.

`x:` la matriz de solución cuyas columnas contienen los valores de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Como ejemplo considere la solución numérica de la ecuación diferencial de segundo orden

$$\ddot{x} = -0.5(x^2 - 1)\dot{x} - x$$

donde x está en pies y t en segundos. Las condiciones iniciales son $x(0) = 1$ pie y $\dot{x}(0) = 0$. La solución por obtener será de $t = 0$ a $t = 10$ s en incrementos de 0.2 s. Con la notación $x = x_1$ y $\dot{x} = x_2$, las ecuaciones diferenciales de primer orden equivalentes son

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -0.5(x_1^2 - 1)x_2 - x_1$$

sujetas a las condiciones iniciales $x_1(0) = 1$ pie y $x_2(0) = 0$. El programa MATLAB que resuelve este problema es

```
function exampleE_1
[t,x] = ode45(@f,[0:0.2:10],[1 0]);
    function dxdt = f(t,x)
    dxdt = [x(2)
             -0.5*(x(1)^2 - 1)*x(2) - x(1)];
    end
end
```

Aquí la función primaria es `exampleE_1` (nombre elegido de manera arbitraria). La función f(t,x), que define las ecuaciones diferenciales, se conoce como una función integrada (que sólo puede llamarse por la función primaria). MATLAB brinda otras opciones para incorporar la función f(t,x) en el programa, pero el método que se utilizó en el programa listado previamente es el más sencillo.

b. Graficación de la solución

El resultado de `ode45` puede representarse de manera gráfica al llamar a la función `plot` de MATLAB. La gráfica de x_1 (primera columna de la matriz x) contra t, en la figura E.1, se obtuvo al incluir el renglón siguiente en `exampleE_1:`

```
plot(t,x(:,1))
```

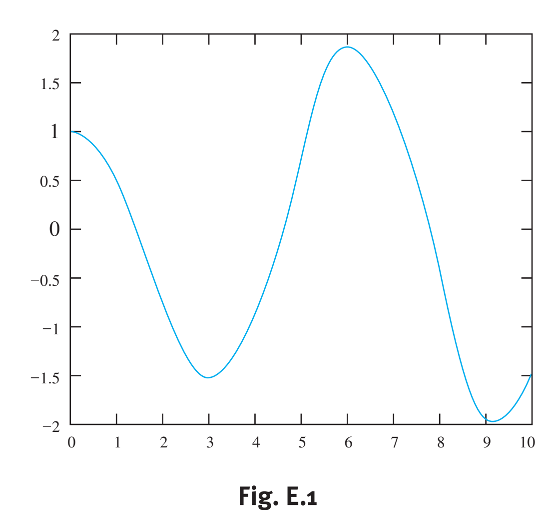


Fig. E.1

La gráfica puede mejorarse al incrementar el tamaño de la fuente, utilizar una línea más gruesa, marcar el eje y agregar una cuadrícula, como se muestra en la figura E.2. Todo eso se logra remplazando `plot(t,x(:,1))` con los siguientes comandos:

```
axes('fontsize',14)
plot(t,x(:,1),'linewidth',1.5)
xlabel('t (s)'); ylabel('x (ft)')
grid on
```

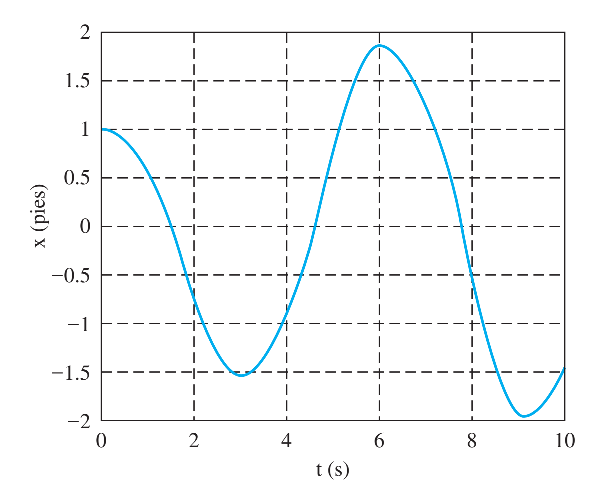


Fig. E.2

c. *Imprimir la solución*

MATLAB no tiene funciones que impriman el resultado de `ode45` en un formato de tablas. Aquí está la función que se utiliza en los problemas de ejemplo del libro:

```
function printSol(t,x)
[m,n] = size(x);
head =' 	t';
```

```
for i = 1:n
   head = strcat(head,'        x',num2str(i));
end
fprintf(head); fprintf('\n')
for i = 1:m
   fprintf('%13.4e',t(i),x(i,:)); fprintf('\n')
end
```

Al llamar a esta función en `exampleE_1`, se obtiene el siguiente listado de computadora (sólo se muestran los primeros cuatro y los últimos cuatro renglones):

```
   t              x1             x2
0.0000e+000   1.0000e+000   0.0000e+000
2.0000e-001   9.8006e-001  -1.9886e-001
4.0000e-001   9.2084e-001  -3.9245e-001
6.0000e-001   8.2356e-001  -5.7915e-001

9.4000e+000  -1.9139e+000   4.3391e-001
9.6000e+000  -1.8026e+000   6.7054e-001
9.8000e+000  -1.6482e+000   8.6656e-001
1.0000e+001  -1.4572e+000   1.0428e+000
```

E.4 Interpolación lineal

Los resultados obtenidos de las soluciones numéricas rara vez coinciden de manera exacta con los puntos de interés. Por ejemplo, suponga que ya se tiene una impresión de x contra t y se desea determinar t en el instante en que $x = 0$. Como no es posible controlar los valores de x en la impresión, es poco probable que se encuentre una recta donde $x = 0$. Lo mejor que puede hacerse es obtener a partir de la impresión el intervalo de tiempo, de t_1 a t_2, donde x cambia de signo. Para lograr una estimación más exacta de t, debe utilizarse la interpolación.

La interpolación lineal supone que durante un breve intervalo de tiempo la gráfica de x contra t puede aproximarse por una línea recta. Ya que cualquier segmento de una línea recta tiene la misma pendiente, entonces

$$\frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{x - x(t_1)}{t - t_1} \tag{E.7}$$

que es la fórmula de interpolación entre los puntos $[t_1, x(t_1)]$ y $[t_2, x(t_2)]$. Al especificar el valor de x, es posible resolver la ecuación para la t correspondiente, y *viceversa*.

A modo de ilustración se calculará t cuando $x_1 = -1.75$ pies empleando el listado de computadora del `exampleE_1`. Por inspección se observa que $9.6 < t < 9.8$. Con base en esos valores de tiempo, la fórmula de interpolación resulta en

$$\frac{-1.6482 - (-1.8026)}{9.8 - 9.6} = \frac{-1.75 - (-1.8026)}{t - 9.6}$$

La solución es $t = 9.6681$ s.



F

Momentos y productos de inercia de masa

F.1 Introducción

El concepto de momento de inercia de masa se presentó en el apartado 17.2. En él sólo se consideraron las propiedades inerciales requeridas para un análisis del movimiento en un plano de un cuerpo rígido, en específico, las definiciones de momento de inercia de masa y del radio de giro, el teorema de los ejes paralelos y el método de cuerpos compuestos. Esos conceptos se usaron de manera amplia en el análisis del movimiento en un plano en los capítulos 17 y 18. Las propiedades inerciales de un cuerpo rígido descritas en tres dimensiones se presentaron en el apartado 19.3, incluyendo la definición de producto de inercia de masa, el teorema de los ejes paralelos para los productos de inercia y los momentos principales de inercia. Las técnicas para determinar un momento de inercia por medio de la integración, que no se analizaron, se explican en este apéndice. Éste concluye con un análisis del tensor de inercia, abarcando los momentos de inercia y las direcciones principales.

F.2 Resumen del momento de inercia de masa

El momento de inercia de masa de un cuerpo rígido cuya masa es m respecto a un eje, tal como a-a de la figura F.1, se definió como

$$I_a = \int_{\mathcal{V}} r^2 \, dm \qquad \text{(17.1, repetida)}$$

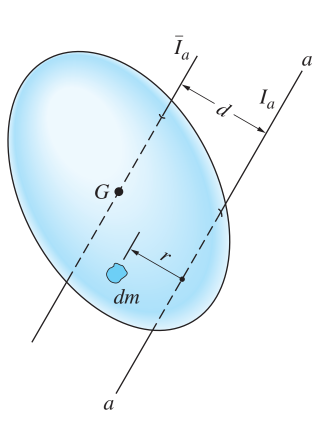


Fig. F.1

donde r es la distancia desde el eje hasta el elemento de masa dm y la integral se ha tomado sobre la región $\mathcal{V}$ ocupada por el cuerpo. En el apartado F.4 se analizan métodos para calcular la integral en la ecuación (17.1).

El radio de giro del cuerpo respecto al eje a-a se definió como

$$k_a = \sqrt{I_a/m} \qquad \text{(17.2, repetida)}$$

El teorema de los ejes paralelos (que se demostró en el apartado 17.2) establece que

$$I_a = \bar{I}_a + md^2 \qquad \text{(17.3, repetida)}$$

Como se indica en la figura F.1, $\bar{I}_a$ es el momento de inercia del cuerpo respecto al eje que es paralelo al *a-a* y que pasa por el centro de masa *G* del cuerpo (se denomina a éste *eje central*) y *d* es la distancia entre ambos. En el apartado 17.2, el uso de este teorema se limitó al cálculo de los momentos de inercia de los cuerpos compuestos. En el apartado F.4 se verá que el teorema de los ejes paralelos también es muy útil para calcular, mediante la integración, el momento de inercia de un cuerpo.

F.3 Momentos de inercia de las placas delgadas

Aquí se presenta un método conveniente para calcular los momentos de inercia de masa de las placas delgadas homogéneas a partir de los segundos momentos de sus áreas superficiales. Las placas delgadas no sólo son importantes por sí mismas, sus propiedades inerciales también son útiles en el cálculo, por integración, de las propiedades inerciales de los cuerpos sólidos.

La figura F.2 muestra una placa delgada de espesor t. Su superficie es la región plana $\mathscr{A}$ de área A y $\mathscr{V}$ denota la región sólida junto a la placa. Sea ρ la densidad de masa (masa por unidad de volumen), entonces la masa de la placa es

$$m = \rho t A \tag{F.1}$$

Al usar la definición en la ecuación (17.1) y referirse a la figura F.2, los momentos de inercia del elemento diferencial de masa dm respecto a los ejes de coordenadas son

$$dI_x = y^2\, dm \qquad dI_y = x^2\, dm \qquad dI_z = r^2\, dm \tag{a}$$

donde r se mide desde el origen O del sistema de coordenadas. Al sustituir $dm = \rho t\, dA$ e integrar sobre la región $\mathscr{A}$, resulta

$$I_x = \rho t \int_{\mathscr{A}} y^2\, dA \qquad I_y = \rho t \int_{\mathscr{A}} x^2\, dA \qquad I_z = \rho t \int_{\mathscr{A}} r^2\, dA \tag{b}$$

Las integrales en las ecuaciones (b) representan los momentos de inercia del área superficial de la placa:* $\int_{\mathscr{A}} y^2\, dA = (I_x)_{\text{área}}$, $\int_{\mathscr{A}} x^2\, dA = (I_y)_{\text{área}}$, y $\int_{\mathscr{A}} r^2\, dA = (J_O)_{\text{área}}$.

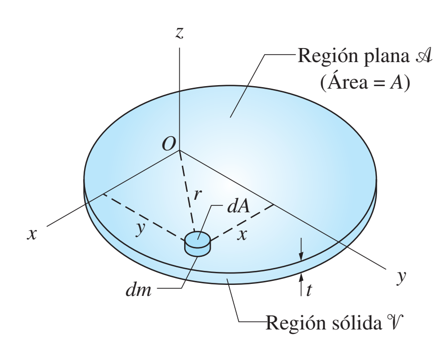


Fig. F.2

*En este apéndice se utiliza el subíndice "área" para distinguir entre el momento de inercia del área de la placa y el momento de inercia de masa de la placa.

Por tanto, los momentos de inercia de masa de la placa están relacionados con los de inercia del área mediante:

$$I_x = \rho t (I_x)_{\text{área}} \qquad I_y = \rho t (I_y)_{\text{área}}$$
$$I_z = \rho t (J_O)_{\text{área}} \tag{F.2}$$

Al sustituir $\rho t = m/A$ de la ecuación (F.1) se obtienen las siguientes formas alternativas de las ecuaciones (F.2):

$$I_x = \frac{m}{A}(I_x)_{\text{área}} \qquad I_y = \frac{m}{A}(I_y)_{\text{área}}$$
$$I_z = \frac{m}{A}(J_O)_{\text{área}} \tag{F.3}$$

Como $r^2 = x^2 + y^2$, las ecuaciones (b) conducen a la identidad

$$I_z = I_x + I_y \tag{F.4}$$

Es importante notar que la ecuación (F.4) sólo es válida para las placas delgadas. En general, no es válida para los cuerpos de forma arbitraria.

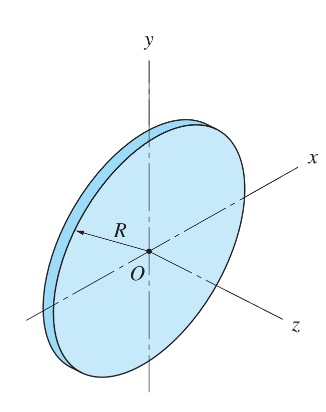
A modo de ilustración considere el disco delgado homogéneo de masa m que se muestra en la figura F.3(a). Su área superficial es el círculo de radio R en la figura F.3(b). De la tabla titulada "Momentos de inercia de área", que se encuentra al final del libro, los momentos de inercia de un área circular son $(I_x)_{\text{área}} = (I_y)_{\text{área}} = \pi R^4/4$. Por tanto, los momentos de inercia de masa de la placa pueden calcularse como sigue.

$$I_x = I_y = \frac{m}{A}(I_x)_{\text{área}} = \frac{m}{\pi R^2}\frac{\pi R^4}{4} = \frac{mR^2}{4}$$

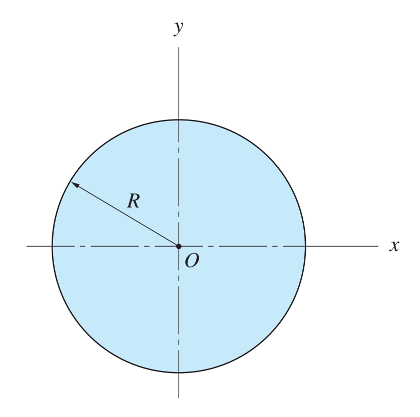
e

$$I_z = I_x + I_y = 2\left(\frac{mR^2}{4}\right) = \frac{mR^2}{2}$$

El resultado anterior para I_z también podría haberse obtenido al usar $I_z = (m/A)(J_O)_{\text{área}}$, donde $(J_O)_{\text{área}} = (I_x)_{\text{área}} + (I_y)_{\text{área}}$.



(a) Disco circular delgado y homogéneo



(b) Área superficial del disco

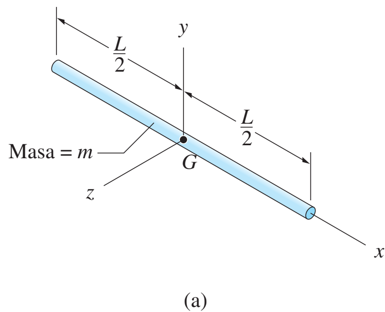
Fig. F.3

F.4 Momentos de inercia de masa por integración

De acuerdo con la ecuación (17.1), el momento de inercia de masa de un cuerpo que ocupa una región $\mathcal{V}$ se obtiene al evaluar una integral de la forma $\int_{\mathcal{V}} r^2\, dm$, que en general representa una integral triple. Utilizando coordenadas rectangulares, por ejemplo, se tiene que $dm = \rho\, dV = \rho\, dx\, dy\, dz$, donde ρ es la densidad de masa en el punto cuyas coordenadas son (x, y, z). En los libros introductorios de cálculo se explican las técnicas para evaluar integrales múltiples (se observa que la mayoría de estos textos emplean los momentos de inercia como una aplicación práctica de integración sobre regiones espaciales).

Aquí sólo se consideran los cuerpos cuya simetría permite evaluar sus momentos de inercia con una sola integración. Como se verá en el problema de ejemplo F.3, la técnica de una sola integración se basa en las propiedades inerciales de las placas delgadas que se analizaron en el apartado anterior.

Problema de ejemplo F.1



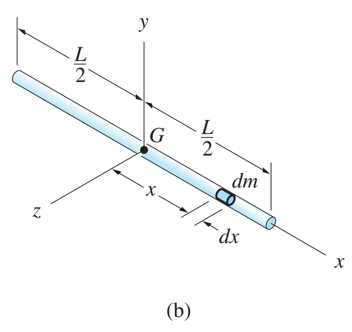
(a)

La figura (a) muestra una varilla delgada homogénea de masa m y longitud L. Determine los momentos de inercia de la varilla respecto a los ejes x, y y z que pasan por su centro de masa G.

Solución

El término *delgada* implica que las dimensiones de la sección transversal son despreciables comparadas con su longitud. Por tanto, es posible considerar que la masa de la varilla está distribuida sobre el eje x, lo cual significa que su momento de inercia respecto a ese eje es despreciable; es decir,

$$I_x \approx 0 \qquad \textit{Respuesta}$$



(b)

En la figura (b) se muestra la masa diferencial dm elegida para la integración. Debido a que x es la distancia perpendicular de los ejes y y z a dm, los momentos de inercia respecto a estos dos ejes son idénticos. Sea ρ la masa (constante) de la varilla *por unidad de longitud*, se tiene $dm = \rho\, dx$. La definición de momento de inercia da

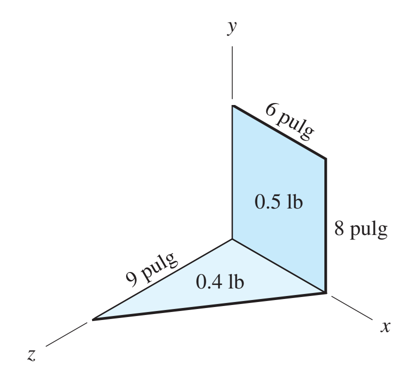
$$I_y = I_z = \int x^2\, dm = \rho \int_{-L/2}^{L/2} x^2\, \rho\, dx = \frac{\rho}{3}\left(\frac{L^3}{8} + \frac{L^3}{8}\right) = \frac{\rho L^3}{12}$$

Debido a que la masa de la varilla es $m = \rho L$, este resultado puede escribirse como

$$I_y = I_z = \frac{mL^2}{12} \qquad \textit{Respuesta}$$

Problema de ejemplo F.2

Como se indica en la figura, se forma un ensamblado al unir una placa rectangular de 0.5 lb con una triangular de 0.4 lb. Si se supone que ambas son delgadas y homogéneas, calcule el momento de inercia del ensamblado respecto a cada uno de los tres ejes de coordenadas.



Solución

Se utilizan las ecuaciones (F.3) para calcular el momento de inercia de masa de cada placa a partir de las propiedades de las áreas listadas en la tabla titulada "Momentos de inercia de masa" que se encuentra al final del libro. Así, al sumar los resultados para las dos placas resultan los momentos de inercia para el ensamblado.



$$m = \frac{0.5}{32.2} = 15.53 \times 10^{-3} \text{ slugs}$$

$$A = 6 \times 8 = 48.0 \text{ pulg}^2 = 333.3 \times 10^{-3} \text{ pies}^2$$

$$(I_x)_{\text{área}} = \frac{6 \times 8^3}{3} = 1024 \text{ pulg}^4 = 49.38 \times 10^{-3} \text{ pies}^4$$

$$(I_y)_{\text{área}} = \frac{8 \times 6^3}{3} = 576.0 \text{ pulg}^4 = 27.78 \times 10^{-3} \text{ pies}^4$$

Como la placa queda en el plano xy,

$$(J_O)_{\text{área}} = (I_x)_{\text{área}} + (I_y)_{\text{área}}$$
$$= (49.38 + 27.78)(10^{-3}) = 77.16 \times 10^{-3}\text{pie}^4$$

Al sustituir los resultados anteriores en las ecuaciones (F.3) se tiene

$$I_x = \frac{m}{A}(I_x)_{\text{área}} = \frac{15.53}{333.3}(49.38 \times 10^{-3}) = 2.301 \times 10^{-3} \text{ slugs} \cdot \text{pie}^2$$
$$I_y = \frac{m}{A}(I_y)_{\text{área}} = \frac{15.53}{333.3}(27.78 \times 10^{-3}) = 1.294 \times 10^{-3} \text{ slugs} \cdot \text{pie}^2$$
$$I_z = \frac{m}{A}(J_O)_{\text{área}} = \frac{15.53}{333.3}(77.16 \times 10^{-3}) = 3.595 \times 10^{-3} \text{ slugs} \cdot \text{pie}^2$$

Placa triangular

$$m = \frac{0.4}{32.2} = 12.42 \times 10^{-3} \text{ slugs}$$
$$A = \frac{6 \times 9}{2} = 27.0 \text{ pulg}^2 = 187.5 \times 10^{-3} \text{ pies}^2$$
$$(I_x)_{\text{área}} = \frac{6 \times 9^3}{12} = 364.5 \text{ pulg}^4 = 17.58 \times 10^{-3} \text{ pies}^4$$
$$(I_z)_{\text{área}} = \frac{9 \times 6^3}{12} = 162.0 \text{ pulg}^4 = 7.813 \times 10^{-3} \text{ pies}^4$$

Como la placa está en el plano xz, se tiene

$$(J_O)_{\text{área}} = (I_x)_{\text{área}} + (I_z)_{\text{área}}$$
$$= (17.58 + 7.813)(10^{-3}) = 25.39 \times 10^{-3} \text{ pies}^4$$

Al sustituir los resultados anteriores en las ecuaciones (F.3) (que se han modificado para tomar en cuenta el hecho de que el área está en el plano xz) resulta

$$I_x = \frac{m}{A}(I_x)_{\text{área}} = \frac{12.42}{187.5}(17.58 \times 10^{-3}) = 1.165 \times 10^{-3} \text{ slugs} \cdot \text{pie}^2$$
$$I_y = \frac{m}{A}(J_O)_{\text{área}} = \frac{12.42}{187.5}(25.39 \times 10^{-3}) = 1.682 \times 10^{-3} \text{ slugs} \cdot \text{pie}^2$$
$$I_z = \frac{m}{A}(I_z)_{\text{área}} = \frac{12.42}{187.5}(7.813 \times 10^{-3}) = 0.518 \times 10^{-3} \text{ slugs} \cdot \text{pie}^2$$

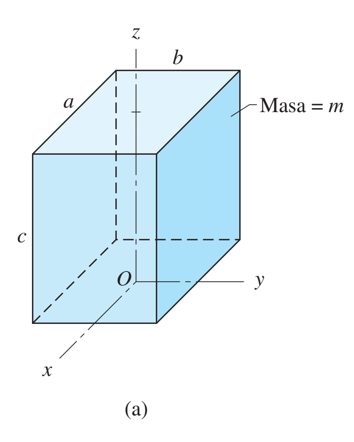
Ensamblado

Al sumar los resultados obtenidos para las dos placas resultan los siguientes valores para las propiedades inerciales del ensamblado

$$I_x = (2.301 + 1.165)(10^{-3}) = 3.466 \times 10^{-3} \text{ slugs} \cdot \text{pie}^2$$
$$I_y = (1.294 + 1.682)(10^{-3}) = 2.976 \times 10^{-3} \text{ slugs} \cdot \text{pie}^2 \qquad \textit{Respuesta}$$
$$I_z = (3.595 + 0.518)(10^{-3}) = 4.113 \times 10^{-3} \text{ slugs} \cdot \text{pie}^2$$

Problema de ejemplo F.3

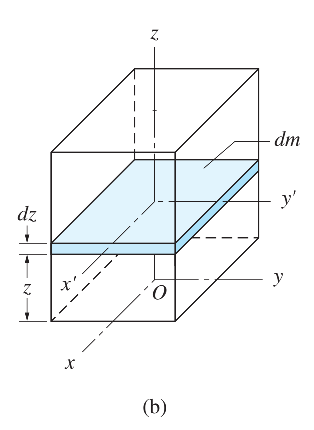
La figura (a) muestra un bloque homogéneo de masa m. Empleando la integración, calcule sus momentos de inercia de masa respecto a cada uno de los ejes de coordenadas indicados. El origen O se localiza en el centro de la cara inferior.



(a)

Solución

Como elemento diferencial se selecciona la placa de masa dm que se muestra en la figura (b). Como el espesor dz de este elemento es infinitesimal, todas las partes de la placa están a una distancia z del plano xy. Los ejes x' y y' que se muestran en la figura (b) son los ejes centrales del elemento.



(b)

Al aplicar el teorema de los ejes paralelos al elemento, se obtiene

$$dI_x = dI_{x'} + z^2\, dm \tag{a}$$

donde dI_x y $dI_{x'}$ son los momentos de inercia de masa de dm respecto a los ejes x y x', respectivamente. De acuerdo con las ecuaciones (F.3), resulta

$$dI_{x'} = \rho\, dz\, (I_{x'})_{\text{área}} = \rho\, dz\, \frac{ab^3}{12} \tag{b}$$

donde ρ es la densidad de masa (constante) del bloque; la expresión para $(I_{x'})_{\text{área}}$ se tomó de la tabla titulada "Momentos de inercia de masa", que se encuentra al final del libro.

Al sustituir la ecuación (b) y $dm = \rho ab\, dz$ en la ecuación (a), se tiene

$$dI_x = \rho\, dz \frac{ab^3}{12} + z^2(\rho ab\, dz) = \rho ab\left(\frac{b^2}{12} + z^2\right) dz \qquad \text{(c)}$$

Al integrar la ecuación (c) de $z = 0$ a $z = c$:

$$I_x = \rho ab \int_0^c \left(\frac{b^2}{12} + z^2\right) dz = \rho abc\left(\frac{b^2}{12} + \frac{c^2}{3}\right)$$

Reconociendo que la masa del bloque es $m = \rho abc$, el momento de inercia de masa respecto al eje x puede escribirse como

$$I_x = m\left(\frac{b^2}{12} + \frac{c^2}{3}\right) \qquad \textit{Respuesta} \quad \text{(d)}$$

El cálculo de I_y es idéntico al de I_x, excepto que las dimensiones a y b se han intercambiado. Por tanto, de la ecuación (d) se deduce que

$$I_y = m\left(\frac{a^2}{12} + \frac{c^2}{3}\right) \qquad \textit{Respuesta} \quad \text{(e)}$$

De las ecuaciones (F.2), el momento de inercia de masa del elemento dm respecto al eje z es

$$dI_z = \rho\, dz\, (J_O)_{\text{área}} \qquad \text{(f)}$$

donde $(J_O)_{\text{área}}$ es el momento de inercia polar del área del elemento. Al sustituir

$$(J_O)_{\text{área}} = (I_{x'})_{\text{área}} + (I_{y'})_{\text{área}} = \frac{ab^3}{12} + \frac{a^3b}{12} \qquad \text{(g)}$$

en la ecuación (f), se obtiene

$$dI_z = \rho \frac{ab}{12}\left(a^2 + b^2\right) dz$$

Integrando entre $z = 0$ y $z = c$, se encuentra que

$$I_z = \frac{\rho ab}{12}\left(a^2 + b^2\right)\int_0^c dz = \frac{\rho abc}{12}\left(a^2 + b^2\right)$$

que, al sustituir $m = \rho abc$, puede escribirse como

$$I_z = \frac{m}{12}\left(a^2 + b^2\right) \qquad \textit{Respuesta}$$

Problemas

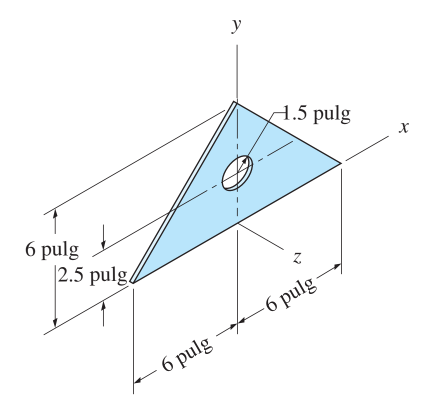


Fig. PF.1

F.1 La placa delgada pesa 4 oz. Calcule su momento de inercia respecto a cada eje de coordenadas.

F.2 La placa delgada de masa m tiene la forma de un segmento circular. Determine su momento de inercia respecto al eje z.

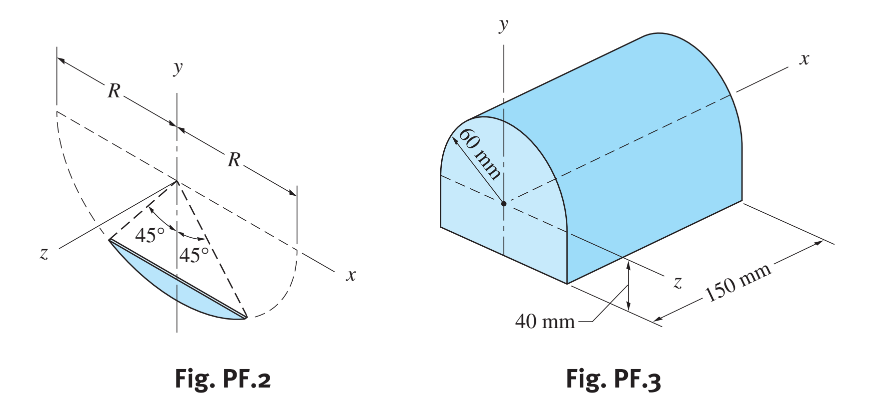


Fig. PF.2

Fig. PF.3

F.3 Calcule el momento de inercia de la pieza de hierro fundido respecto al eje x. La densidad del hierro fundido es 7200 kg/m^3.

F.4 El soporte de masa m tiene un espesor uniforme. Obtenga su momento de inercia respecto a cada eje de coordenadas.

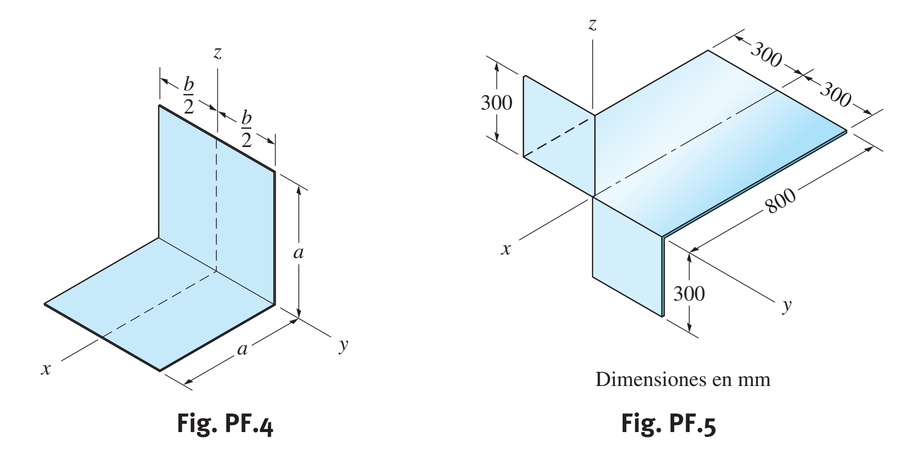


Fig. PF.4

Fig. PF.5

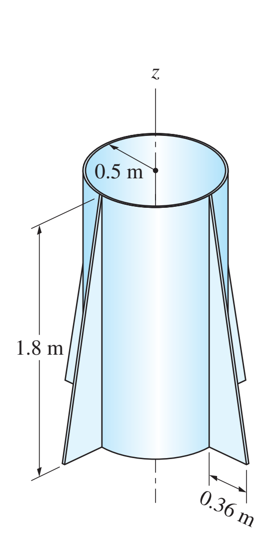


Fig. PF.6

F.5 La parte que se muestra está formada por una placa delgada cortada y doblada. Si la masa total de la placa es 7.5 kg, determine su momento de inercia respecto a los tres ejes de coordenadas.

F.6 El revestimiento del cohete consiste en un armazón cilíndrico de 120 kg y cuatro aletas triangulares, cada una de 15 kg de masa. Si se supone que todos los componentes son delgados y de espesor uniforme, encuentre el momento de inercia del revestimiento respecto al eje z.

F.7 Sin integrar, encuentre el momento de inercia del alambre respecto al eje y', que pasa por el centro de masa G.

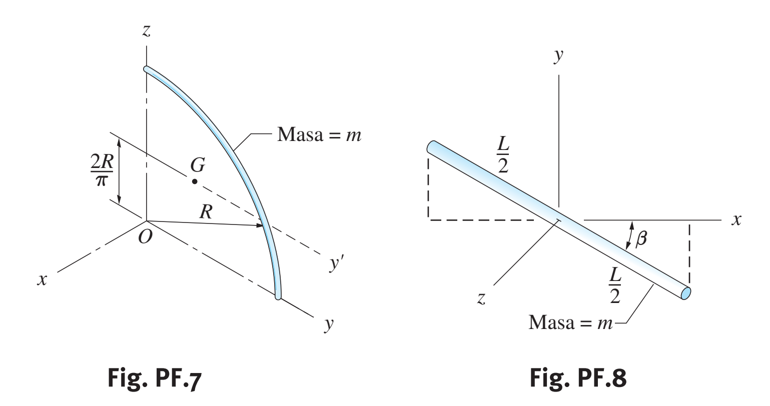
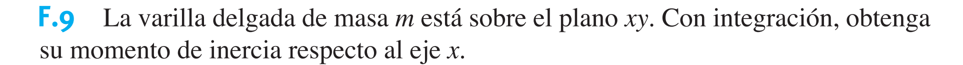


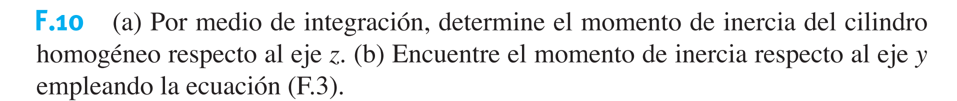
Fig. PF.7

Fig. PF.8

F.8 (a) Mediante integración, encuentre el momento de inercia de la varilla delgada respecto al eje x. (b) Utilizando los resultados de la parte (a), determine los momentos de inercia respecto a los otros dos ejes de coordenadas.



F.9 La varilla delgada de masa m está sobre el plano xy. Con integración, obtenga su momento de inercia respecto al eje x.



F.10 (a) Por medio de integración, determine el momento de inercia del cilindro homogéneo respecto al eje z. (b) Encuentre el momento de inercia respecto al eje y empleando la ecuación (F.3).

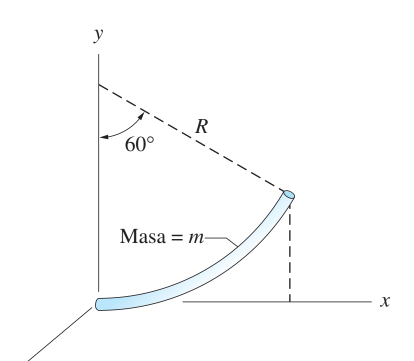


Fig. PF.9

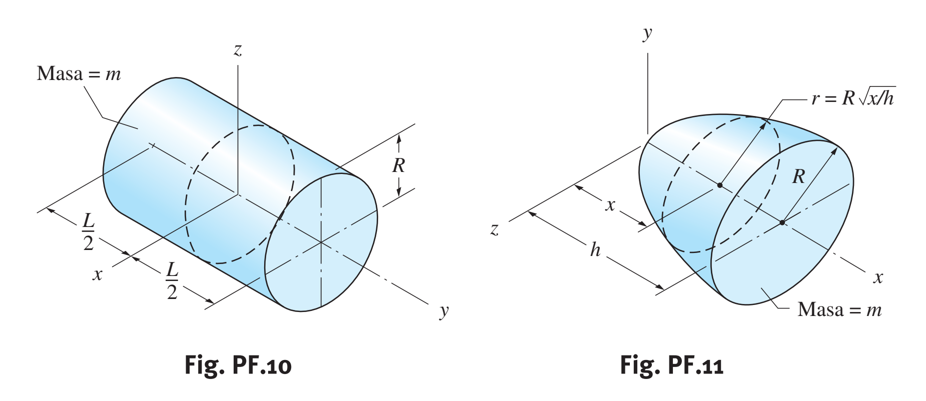


Fig. PF.10

Fig. PF.11

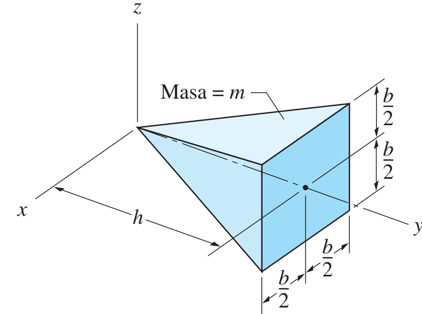


Fig. PF.12

F.11 Mediante integración, obtenga el momento de inercia del paraboloide de revolución respecto al eje x.

F.12 Utilice la integración para determinar el momento de inercia de la pirámide rectangular respecto a: (a) el eje z y (b) el eje y.

F.13 (a) Con integración, calcule el momento de inercia del hemisferio homogéneo de masa m respecto al eje y. (b) Con el resultado del inciso (a), encuentre el momento de inercia de una esfera de masa M respecto a un diámetro.

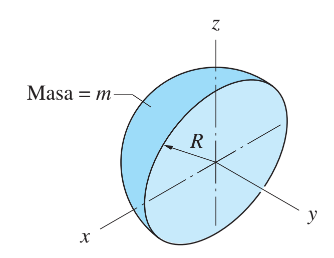


Fig. PF.13

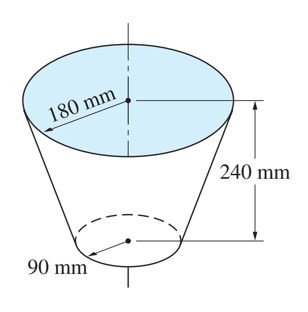


Fig. PF.14

F.14 La masa del revestimiento cónico truncado de espesor de pared constante es 1.5 kg. Mediante integración obtenga el momento de inercia respecto al eje del revestimiento.

F.15 Aplicando la integración, determine el momento de inercia del panel cilíndrico delgado respecto al eje z.

F.16 La cubierta del balón se puede aproximar por una fina capa homogénea de masa m. Encuentre su momento de inercia respecto al eje z.

F.17 Una placa delgada de acero de masa 80 kg se corta con el patrón que se muestra. Calcule el momento de inercia de la placa respecto al eje y.

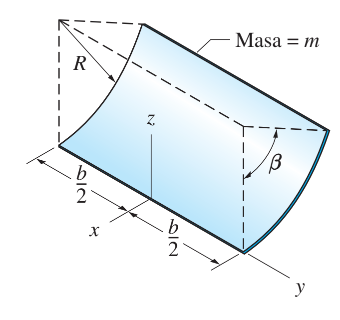


Fig. PF.15

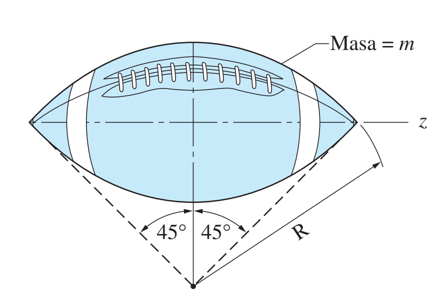


Fig. PF.16

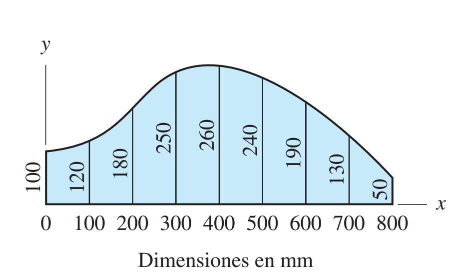


Fig. PF.17, PF.18

F.18 Una cavidad con simetría axial se forma en un molde de arena al rotar el patrón que se muestra respecto al eje x. La fundición se hace entonces llenando la cavidad con aluminio de densidad 2650 kg/m^3. Calcule el momento de inercia de la fundición respecto al eje x.

F.5 Productos de inercia de masa: teoremas de los ejes paralelos

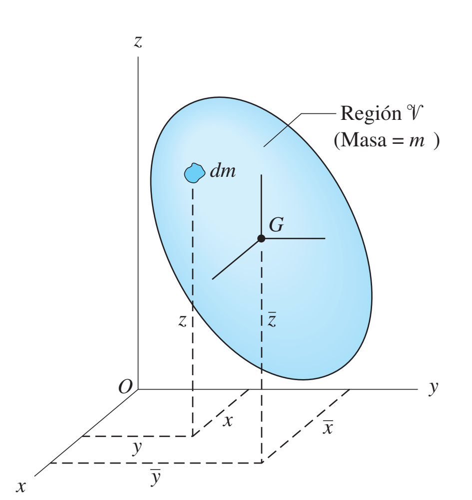


Fig. F.4

La figura F.4 muestra un cuerpo de masa m que ocupa una región $\mathcal{V}$. Los productos de inercia de masa de este cuerpo relativos a los ejes de coordenadas que se muestran se definen como

$$I_{xy} = I_{yx} = \int_{\mathcal{V}} xy\, dm$$
$$I_{yz} = I_{zy} = \int_{\mathcal{V}} yz\, dm \qquad \text{(F.5)}$$
$$I_{zx} = I_{xz} = \int_{\mathcal{V}} zx\, dm$$

Las dimensiones del producto de inercia son las mismas que para el momento de inercia, es decir, $[ML^2]$ (slug · pie^2 o kg · m^2). Mientras que el momento de inercia de un cuerpo siempre es positivo, su producto de inercia puede ser positivo, negativo o cero.

Los productos de inercia satisfacen los siguientes teoremas de los ejes paralelos, que son similares a los de los ejes paralelos para el momento de inercia.

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \bar{I}_{xy} + m\bar{x}\bar{y} \\ I_{yz} &= \bar{I}_{yz} + m\bar{y}\bar{z} \\ I_{zx} &= \bar{I}_{zx} + m\bar{z}\bar{x} \end{aligned} \tag{F.6}$$

En la primera de las ecuaciones (F.6), $\bar{I}_{xy}$ es el producto de inercia respecto a los ejes centrales que son paralelos a x y y, respectivamente, y $\bar{x}$ y $\bar{y}$ son las coordenadas del centro de masa G, véase la figura F.4. Los términos en las otras dos ecuaciones se definen de manera semejante.

Para probar el teorema de los ejes paralelos, considere la figura F.5, que muestra un cuerpo visto desde el eje z positivo. El sistema de coordenadas $x'y'$ tiene su origen en G, y sus ejes son paralelos a xy. En la figura F.5 se observa que $x = \bar{x} + x'$ y $y = \bar{y} + y'$, que, al sustituirse en la definición $I_{xy} = \int_{\mathcal{V}} xy\, dm$, da

$$I_{xy} = \int_{\mathcal{V}} (\bar{x} + x')(\bar{y} + y')\, dm$$

Al efectuar la multiplicación, se tiene

$$I_{xy} = \bar{x}\bar{y}\int_{\mathcal{V}} dm + \bar{y}\int_{\mathcal{V}} x'\, dm + \bar{x}\int_{\mathcal{V}} y'\, dm + \int_{\mathcal{V}} x'y'\, dm$$

Observe que como los ejes x' y y' pasan por G, entonces $\int_{\mathcal{V}} x'y'\, dm = \bar{I}_{xy}$, $\int_{\mathcal{V}} x'dm = 0$ y $\int_{\mathcal{V}} y'dm = 0$. En consecuencia, la ecuación anterior se reduce a $I_{xy} = \bar{I}_{xy} + m\,\bar{x}\,\bar{y}$. Esto completa la prueba del teorema de los ejes paralelos.

El método de los cuerpos compuestos para los productos de inercia de masa es equivalente al mismo método para los momentos de inercia: el producto de inercia de un cuerpo compuesto es igual a la suma de los productos de inercia de sus partes. La prueba de este enunciado resulta directamente de la definición de producto de inercia: la integral de una suma es igual a la suma de las integrales.

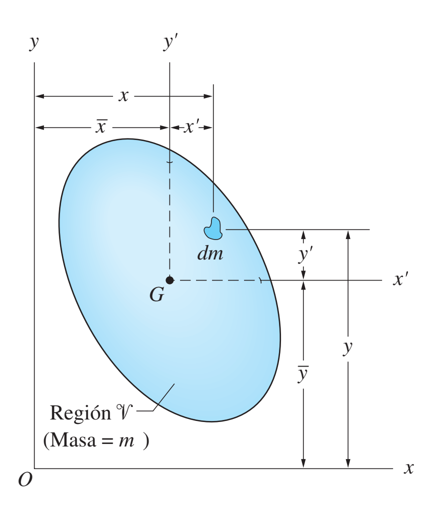


Fig. F.5

F.6 *Productos de inercia por integración: placas delgadas*

En general, la evaluación de las integrales que definen los productos de inercia de masa de un cuerpo, como $\int_{\mathcal{V}} xy\, dm$, en general requiere triple integración. Al igual que en el apartado F.4 para los momentos de masa, aquí la atención se enfocará en los cuerpos cuya simetría permite que sus productos de inercia se evalúen con una sola integración empleando las propiedades de las placas delgadas.

Los productos de inercia de masa de la placa delgada homogénea que se muestra en la figura F.2 son

$$I_{xy} = \int_{\mathcal{V}} xy\, dm \qquad I_{yz} = \int_{\mathcal{V}} yz\, dm \qquad I_{zx} = \int_{\mathcal{V}} zx\, dm \tag{a}$$

Utilizando $dm = \rho t\, dA$, las ecuaciones (a) quedan

$$I_{xy} = \rho t \int_{\mathcal{A}} xy\, dA \qquad I_{yz} = \rho t \int_{\mathcal{A}} yz\, dA \qquad I_{zx} = \rho t \int_{\mathcal{A}} zx\, dA \tag{b}$$

Las integrales en las ecuaciones (b) son los productos de inercia de la región plana $\mathcal{A}$ respecto a los ejes de coordenadas. Empleando otra vez la etiqueta "área" para referirse a las propiedades del área, las ecuaciones (b) quedan

$$I_{xy} = \rho t (I_{xy})_{\text{área}} \qquad I_{yz} = \rho t (I_{yz})_{\text{área}} \qquad I_{zx} = \rho t (I_{zx})_{\text{área}} \tag{F.7}$$

Al sustituir $\rho t = m/A$ resultan formas alternativas para las ecuaciones (F.7):

$$I_{xy} = \frac{m}{A} (I_{xy})_{\text{área}} \qquad I_{yz} = \frac{m}{A} (I_{yz})_{\text{área}} \qquad I_{zx} = \frac{m}{A} (I_{zx})_{\text{área}} \tag{F.8}$$

En la tabla titulada "Momentos de inercia de masa" que se encuentra al final del libro, se proporcionan los productos de inercia más comunes para las áreas planas.

F.7 Tensor de inercia: momento de inercia respecto a un eje arbitrario

Como se definió en el apartado 19.3, el tensor de inercia de un cuerpo en el punto O (el origen de los ejes de coordenadas) es la matriz

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{bmatrix} \tag{19.11, repetida}$$

En este apartado se muestra que el tensor de inercia en el punto O determina por completo el momento de inercia respecto a cualquier eje que pase por O.

La figura F.6 muestra un cuerpo rígido de masa m que ocupa la región $\mathcal{V}$. El punto O, un sitio sobre el cuerpo que también puede ser extendido, se selecciona como el origen del sistema de coordenadas xyz. OM es un eje arbitrario que pasa por O. El ángulo entre el vector de posición $\mathbf{r}$ de la masa diferencial dm y el eje OM se denota con θ. Además, sea λ un vector unitario en la dirección de OM. Observe que la magnitud del producto cruz de $\mathbf{r}$ y λ es $|\mathbf{r} \times \lambda| = r \operatorname{sen} \theta = a$, la distancia perpendicular entre OM y dm, como se indica en la figura F.6.

El momento de inercia del cuerpo respecto al eje OM es

$$I_{OM} = \int_{\mathcal{V}} a^2\, dm = \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{r} \times \lambda) \cdot (\mathbf{r} \times \lambda)\, dm \tag{a}$$

donde se ha usado el hecho de que el producto punto de un vector consigo mismo es igual al cuadrado de la magnitud del vector; es decir $(\mathbf{r} \times \lambda) \cdot (\mathbf{r} \times \lambda) = |\mathbf{r} \times \lambda|^2 = a^2$.

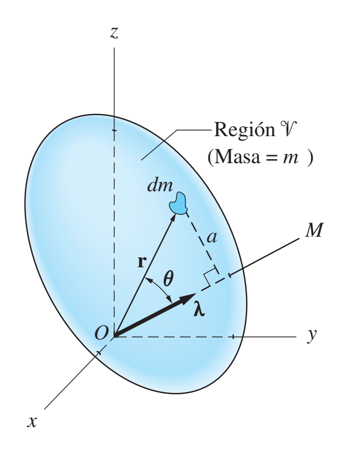


Fig. F.6

Sean x, y y z las coordenadas de la ubicación de dm y λ_x, λ_y y λ_z las componentes de λ. El producto cruz de $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ y $\lambda = \lambda_x\mathbf{i} + \lambda_y\mathbf{j} + \lambda_z\mathbf{k}$ queda

$$\mathbf{r} \times \lambda = (y\lambda_z - z\lambda_y)\mathbf{i} + (\lambda_x z - x\lambda_z)\mathbf{j} + (x\lambda_y - y\lambda_x)\mathbf{k}$$

y la expresión para a^2 es

$$a^2 = (\mathbf{r} \times \lambda) \cdot (\mathbf{r} \times \lambda) = (y\lambda_z - z\lambda_y)^2 + (z\lambda_x - x\lambda_z)^2 + (x\lambda_y - y\lambda_x)^2$$

Al desarrollar los cuadrados y agrupar los términos, se obtiene

$$\begin{aligned} a^2 = (y^2 + z^2)\lambda_x^2 + (x^2 + z^2)\lambda_y^2 + (x^2 + y^2)\lambda_z^2 \\ - 2xy\lambda_x\lambda_y - 2xz\lambda_x\lambda_z - 2yz\lambda_y\lambda_z \end{aligned} \tag{b}$$

Al sustituir la ecuación (b) en la ecuación (a) e identificar las expresiones para los momentos y productos de inercia, el momento de inercia respecto al eje OM es

$$I_{OM} = I_x\lambda_x^2 + I_y\lambda_y^2 + I_z\lambda_z^2 - 2I_{xy}\lambda_x\lambda_y - 2I_{yz}\lambda_y\lambda_z - 2I_{zx}\lambda_z\lambda_x \tag{F.9}$$

Así se ha obtenido la siguiente conclusión importante: si las componentes del tensor de inercia (I_x, I_{xy}, I_{xz}, etc.) se conocen en un punto, el momento de inercia respecto a cualquier eje que pasa por dicho sitio puede calcularse con la ecuación (F.9).

F.8 *Momentos y ejes principales de inercia*

En general, las componentes del tensor de inercia (I_x, I_{xy}, etc.) varían con la ubicación del punto de referencia O y con la orientación de los ejes xyz. En este apartado se supone que el punto de referencia no cambia y se estudia el efecto de variar la orientación de los ejes de coordenadas.

Es posible demostrar* que al menos existe una orientación de los ejes xyz de manera que el tensor de inercia adopta la siguiente *forma diagonal*:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \tag{F.10}$$

I_1, I_2 e I_3 se llaman *momentos principales de inercia* en el punto O y los ejes de coordenadas correspondientes son los *ejes principales* (o *direcciones principales*) *de inercia* en el punto O. Observe que los productos de inercia son cero respecto a los ejes principales.

*En este apartado se establecen algunas propiedades importantes de los tensores de inercia. La mayor parte de las pruebas se encuentra en casi todos los libros de dinámica avanzada, véase, por ejemplo, J. H. Ginsberg, *Advanced Engineering Dynamics*, Harper y Row, 1988.

Los momentos principales de inercia y los cosenos directores de cada eje principal (que se denotan con λ_x, λ_y y λ_z) pueden obtenerse al resolver las siguientes cuatro ecuaciones para λ_x, λ_y y λ_z:

$$\begin{aligned} (I_x - I)\lambda_x \quad -I_{xy}\lambda_y \quad -I_{xz}\lambda_z &= 0 \\ -I_{yx}\lambda_x \quad (I_y - I)\lambda_y \quad -I_{yz}\lambda_z &= 0 \\ -I_{zx}\lambda_x \quad -I_{zy}\lambda_y \quad (I_z - I)\lambda_z &= 0 \\ \lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 &= 1 \end{aligned} \tag{F.11}$$

Es posible demostrar que las primeras tres ecuaciones representan las condiciones para que se anulen los productos de inercia respecto a los ejes principales y la cuarta ecuación debe satisfacerse para que λ_x, λ_y, y λ_z sean cosenos directores.

Observe que las primeras tres ecuaciones (F.11) son lineales y homogéneas (el lado derecho es igual a cero) en las incógnitas λ_x, λ_y y λ_z. Por tanto, los tres valores de I (que se representan con I_1, I_2 e I_3) pueden obtenerse al resolver la ecuación que resulta si el determinante de los coeficientes de λ_x, λ_y y λ_z se iguala a cero; es decir,

$$\begin{vmatrix} I_x - I & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_y - I & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_z - I \end{vmatrix} = 0 \tag{F.12}$$

Una vez que se han encontrado los momentos principales de inercia, los cosenos directores de los ejes principales se obtienen de las ecuaciones (F.11).

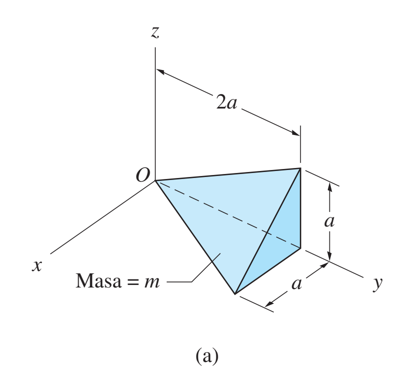
En álgebra lineal, el cálculo de los momentos principales de inercia y de los ejes principales es un ejemplo de un *problema de valores característicos de una matriz*, en el cual los momentos principales son los *valores característicos* del tensor de inercia y los vectores unitarios en la dirección de los ejes principales son sus *vectores característicos*. La ecuación (F.12) es la *ecuación característica* del problema de los valores característicos. Ya que los problemas de estos valores matriciales ocurren en muchas ramas de las ciencias físicas, sus propiedades se han estudiado de manera amplia y diversos métodos numéricos se han desarrollado para su solución (por ejemplo, el método de Jacobi).

Al usar las características de problemas de valores característicos conocidos, es posible demostrar que las soluciones de las ecuaciones (F.11) tienen las siguientes propiedades.

1. Los valores característicos, es decir, I_1, I_2 e I_3, son reales y positivos.
2. Si se supone que los valores característicos se ordenan de manera que $I_3 > I_2 > I_1$, entonces I_3 e I_1 son los momentos de inercia máximo y mínimo, respectivamente, en el punto O. En otras palabras, I_1 e I_3 son los extremos (valores extremos) de I_{OM} en la ecuación (F.9) respecto a los cambios en la dirección de OM.
3. Si los valores característicos son distintos, es decir, si la ecuación (F.12) no tiene raíces dobles, entonces los vectores característicos (ejes principales) son mutuamente perpendiculares.

Problema de ejemplo F.4

Con la integración, calcule los productos de inercia del cuerpo homogéneo en la figura (a) respecto a los ejes que se muestran. Exprese los resultados en términos de la masa m del cuerpo.

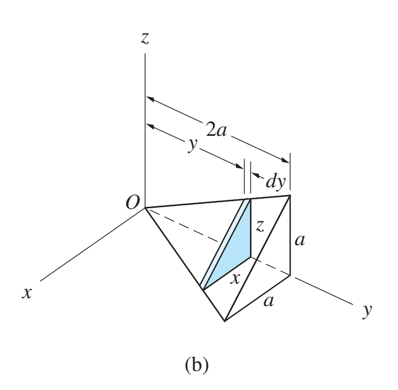


(a)

Solución

Se elige el elemento de integración que se muestra en la figura (b). Es posible considerar que este elemento es una placa delgada triangular de espesor dy, con área superficial A, como se muestra en la figura (c). Reconociendo los triángulos similares en la figura (b), se observa que $(x/y) = (a/2a)$ y que $(z/y) = (a/2a)$, que da

$$x = z = \frac{y}{2} \tag{a}$$

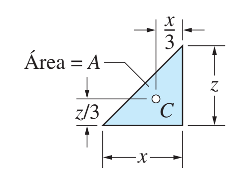


(b)

Ahora se utilizan las ecuaciones (F.7) para relacionar los productos de inercia de la masa del elemento con las propiedades de su área. Por tanto, se presta atención al cálculo de los productos de inercia del área que se muestra en la figura (c).

Productos de inercia del área A

Ya que el plano del área A es paralelo al plano xz, entonces $(\bar{I}_{xy})_{\text{área}} = (\bar{I}_{yz})_{\text{área}} = 0$. Y de la tabla "Momentos de inercia de masa", que se encuentra al final del libro, se encuentra que $(\bar{I}_{zx})_{\text{área}} = x^2z^2/24$. Al utilizar las relaciones en la ecuación (a), los productos de inercia de A quedan



(c)

$$(\bar{I}_{xy})_{\text{área}} = 0 \qquad (\bar{I}_{yz})_{\text{área}} = 0$$
$$(\bar{I}_{zx})_{\text{área}} = \frac{x^2z^2}{24} = \frac{1}{24}\left(\frac{y}{2}\right)^2\left(\frac{y}{2}\right)^2 = \frac{y^4}{384} \tag{b}$$

En términos de la coordenada y, el área A es

$$A = \frac{xz}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{y}{2}\right)\left(\frac{y}{2}\right) = \frac{y^2}{8} \tag{c}$$

y las coordenadas de su centroide C son

$$\bar{x} = \frac{x}{3} = \frac{y}{6} \qquad \bar{y} = y \qquad \bar{z} = \frac{z}{3} = \frac{y}{6} \tag{d}$$

Ahora se usa el teorema de los ejes paralelos y las ecuaciones de la (b) a la (d) para calcular los productos de inercia de A respecto a los ejes de coordenadas.

$$(I_{xy})_{\text{área}} = (\bar{I}_{xy})_{\text{área}} + A\,\bar{x}\bar{y} = 0 + \frac{y^2}{8}\left(\frac{y}{6}\right)(y) = \frac{y^4}{48} \tag{e}$$

$$(I_{yz})_{\text{área}} = (\bar{I}_{yz})_{\text{área}} + A\,\bar{y}\bar{z} = 0 + \frac{y^2}{8}(y)\left(\frac{y}{6}\right) = \frac{y^4}{48} \tag{f}$$

$$(I_{zx})_{\text{área}} = (\bar{I}_{zx})_{\text{área}} + A\,\bar{z}\bar{x} = \frac{y^4}{384} + \frac{y^2}{8}\left(\frac{y}{6}\right)\left(\frac{y}{6}\right) = \frac{7y^4}{1152} \tag{g}$$

Productos de inercia de masa

Sea ρ la densidad de masa del cuerpo y se reconsidera el elemento de masa diferencial, la placa delgada de espesor dy que se muestra en la figura (b). Al sustituir las ecuaciones de la (e) a la (g) en las ecuaciones (F.7), las propiedades inerciales del elemento de masa quedan

$$dI_{xy} = \rho\, dy\, (I_{xy})_{\text{área}} = \rho\, dy\, \frac{y^4}{48} \tag{h}$$

$$dI_{yz} = \rho\, dy\, (I_{yz})_{\text{área}} = \rho\, dy\, \frac{y^4}{48} \tag{i}$$

$$dI_{zx} = \rho\, dy\, (I_{zx})_{\text{área}} = \rho\, dy\, \frac{7y^4}{1152} \tag{j}$$

Integrando respecto a y entre los límites 0 y $2a$ resulta:

$$I_{xy} = I_{yx} = \frac{\rho}{48}\int_0^{2a} y^4\, dy = \frac{\rho}{48}\frac{(2a)^5}{5} = \frac{2\rho a^5}{15} \tag{k}$$

$$I_{zx} = \frac{7\rho}{1152}\int_0^{2a} y^4\, dy = \frac{7\rho}{1152}\frac{(2a)^5}{5} = \frac{7\rho a^5}{180} \tag{l}$$

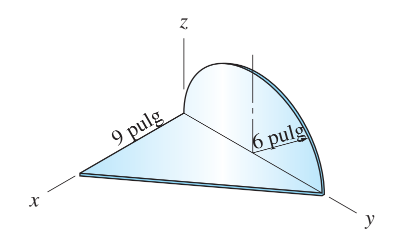
Observe que $dm = \rho\, dV = \rho A\, dy = \rho(y^2/8)dy$, que, cuando se integra entre los límites $y = 0$ y $2a$, da $m = \rho a^3/3$. Por tanto, las ecuaciones (k) y (l) quedan

$$I_{xy} = I_{yz} = \frac{2\rho a^5}{15} \cdot \frac{m}{\rho a^3/3} = \frac{2}{5}ma^2 \qquad \textit{Respuesta}$$

$$I_{zx} = \frac{7\rho a^5}{180} \cdot \frac{m}{\rho a^3/3} = \frac{7}{60}ma^2 \qquad \textit{Respuesta}$$

Problema de ejemplo **F.5**

El ensamblado que se muestra está formado por la unión de dos piezas de placa de acero de $\frac{1}{16}$ pulg. Determine sus productos de inercia respecto a los ejes indicados. El peso específico del acero es $\gamma = 490$ lb/pie^3.



Solución

En este problema se justifica el uso de la aproximación de la placa delgada de las ecuaciones (F.2) o (F.3), porque el espesor de cada placa componente es mucho menor que sus dimensiones en el plano.

Placa triangular

Como el área triangular está en el plano xy $(I_{yz})_{\text{área}} = (I_{zx})_{\text{área}} = 0$. De la tabla "Momentos de inercia de masa" se obtiene

$$(I_{xy})_{\text{área}} = \frac{(12)^2(9)^2}{24} = 486.0 \text{ pulg}^4$$

Con las ecuaciones (F.2), los productos de inercia de masa de la placa triangular quedan

$$I_{xy} = \rho t (I_{xy})_{\text{área}} = \frac{490}{32.2}\left[\frac{1}{16(12)}\right]\frac{486.0}{(12)^4} = 18.58 \times 10^{-4} \text{ slugs} \cdot \text{pie}^2 \qquad \text{(a)}$$

$$I_{yz} = I_{zx} = 0$$

En el cálculo de I_{xy}, observe que se requieren 32.2 pies/s^2 para convertir la densidad de peso en densidad de masa y que todas las dimensiones se han cambiado de pulgadas a pies.

Placa semicircular

Si se observa que el área semicircular está en el plano yz, se tiene que $(I_{xy})_{\text{área}} = (I_{zx})_{\text{área}} = 0$. Se utiliza el teorema de los ejes paralelos para calcular $(I_{yz})_{\text{área}}$. Refiriéndose a la tabla "Momentos de inercia de masa", el centroide del área semicircular se localiza en $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = 6$ pulg, $\bar{z} = 4(6)/3\pi$ pulg. También se observa que $(\bar{I}_{yz})_{\text{área}} = 0$, porque el eje z centroidal es un eje de simetría. Entonces el teorema de los ejes paralelos da

$$(I_{yz})_{\text{área}} = (\bar{I}_{yz})_{\text{área}} + A\bar{y}\bar{z}$$
$$= 0 + \frac{\pi(6)^2}{2}(6)\frac{4(6)}{3\pi} = 864.0 \text{ pulg}^4$$

Ahora los productos de inercia de masa de la placa semicircular pueden determinarse con las ecuaciones (F.2); recuerde convertir pulgadas a pies y densidad de peso a densidad de masa:

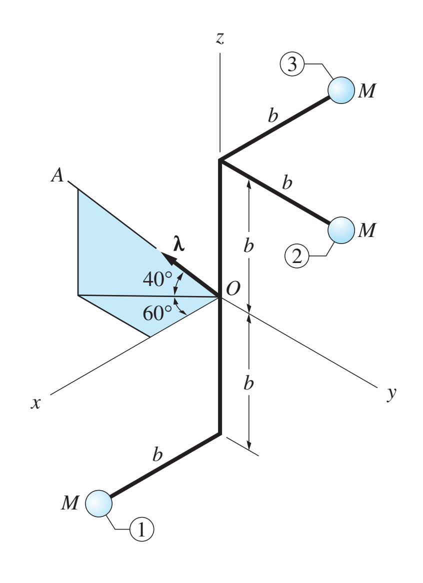
$$I_{xy} = I_{zx} = 0$$

$$I_{yz} = \rho t (I_{yz})_{\text{área}} = \frac{490}{32.2}\left[\frac{1}{16(12)}\right]\frac{864.0}{(12)^4} = 33.02 \times 10^{-4} \text{ slugs} \cdot \text{pie}^2 \qquad \text{(b)}$$

Ensamblado

Los productos de inercia de masa del ensamblado se obtienen sumando los resultados para las placas triangular y semicircular en las ecuaciones (a) y (b), lo que da

$$I_{xy} = 18.58 \times 10^{-4} \text{ slugs} \cdot \text{pie}^2$$
$$I_{yz} = 33.02 \times 10^{-4} \text{ slugs} \cdot \text{pie}^2 \qquad \textit{Respuesta}$$
$$I_{zx} = 0$$



Problema de ejemplo F.6

El ensamblado consiste en tres pelotas pequeñas, cada una de masa M, unidas a las varillas delgadas de masa despreciable. Calcule el momento de inercia del ensamblado respecto al eje OA.

Solución

El momento de inercia respecto al eje OA puede encontrarse de la ecuación (F.9). Para emplearla, primero se debe obtener el tensor de inercia en el punto O y los cosenos directores del eje OA.

La siguiente tabla muestra el cálculo del tensor de inercia en el punto O del ensamblado, que se obtiene al sumar los tensores de inercia de las pelotas individuales. Debido a que cada pelota es pequeña, es posible despreciar sus momentos y productos de inercia respecto a los ejes que pasan por su centro de masa. Por tanto, los teoremas de los ejes paralelos se simplifican a $I_x = \bar{I}_x + M(\bar{y}^2 + \bar{z}^2) = M(y^2 + z^2)$, y así sucesivamente, y a $I_{xy} = \bar{I}_{xy} + M\bar{x}\bar{y} = Mxy$, etcétera.

	Pelota 1	**Pelota 2**	**Pelota 3**	**Totales**
	$x = b,\ y = 0,\ z = -b$	$x = 0,\ y = b,\ z = b$	$x = -b,\ y = 0,\ z = b$	
$I_x = M(y^2 + z^2)$	$M[0 + (-b)^2] = Mb^2$	$M(b^2 + b^2) = 2Mb^2$	$M(0 + b^2) = Mb^2$	$4Mb^2$
$I_y = M(z^2 + x^2)$	$M[(-b)^2 + b^2] = 2Mb^2$	$M(b^2 + 0) = Mb^2$	$M[b^2 + (-b)^2] = 2Mb^2$	$5Mb^2$
$I_z = M(x^2 + y^2)$	$M(b^2 + 0) = Mb^2$	$M(0 + b^2) = Mb^2$	$M[(-b)^2 + 0] = Mb^2$	$3Mb^2$
$I_{xy} = Mxy$	$M(b)(0) = 0$	$M(0)(b) = 0$	$M(-b)(0) = 0$	0
$I_{yz} = Myz$	$M(0)(-b) = 0$	$M(b)(b) = Mb^2$	$M(0)(b) = 0$	Mb^2
$I_{zx} = Mzx$	$M(-b)(b) = -Mb^2$	$M(b)(0) = 0$	$M(b)(-b) = -Mb^2$	$-2Mb^2$

El vector unitario λ que se dirige sobre el eje OA es

$$\boldsymbol{\lambda} = (\cos 40^\circ \cos 60^\circ)\mathbf{i} - (\cos 40^\circ \operatorname{sen} 60^\circ)\mathbf{j} + \operatorname{sen} 40^\circ\mathbf{k}$$
$$= 0.3830\mathbf{i} - 0.6634\mathbf{j} + 0.6428\mathbf{k}$$

Por tanto, los cosenos directores de OA son $\lambda_x = 0.3830$, $\lambda_y = -0.6634$, y $\lambda_z = 0.6428$.

Al sustituir las propiedades inerciales del ensamblado (que se calculan en la tabla) y los cosenos directores en la ecuación (F.9), se obtiene

$$I_{OA} = I_x\lambda_x^2 + I_y\lambda_y^2 + I_z\lambda_z^2 - 2I_{xy}\lambda_x\lambda_y - 2I_{yz}\lambda_y\lambda_z - 2I_{zx}\lambda_z\lambda_x$$
$$= Mb^2[4(0.3830)^2 + 5(-0.6634)^2 + 3(0.6428)^2$$
$$- 2(0)(0.3830)(-0.6634) - 2(1)(-0.6634)(0.6428)$$
$$- 2(-2)(0.6428)(0.3830)]$$
$$= 5.86Mb^2$$

Respuesta

Problema de ejemplo F.7

El ensamblado en la figura (a) consiste en dos placas delgadas idénticas, cada una de masa M y espesor t. Para el punto 0, determine: 1. el tensor de inercia respecto a los ejes que se muestran, y 2. los momentos principales de inercia y los ejes principales.

Solución

Parte 1

El tensor de inercia en el punto O para el ensamblado se obtiene sumando los momentos y productos de inercia de las placas respecto a los ejes xyz. Se utilizan las aproximaciones descritas en los apartados F.3 y F.6.

Placa 1 Refiriéndose a la figura (a) y a la tabla de los momentos de inercia de masa, los momentos y productos de inercia para el área de la placa 1 son

$$(I_x)_{\text{área}} = \frac{a(2a)^3}{12} = \frac{2a^4}{3}$$

$$(I_y)_{\text{área}} = \frac{2a(a)^3}{3} = \frac{2a^4}{3}$$

$$(J_O)_{\text{área}} = (I_x)_{\text{área}} + (I_y)_{\text{área}} = \frac{2a^4}{3} + \frac{2a^4}{3} = \frac{4a^4}{3}$$

$$(I_{xy})_{\text{área}} = 0 \qquad (x \text{ es un eje de simetría})$$

$$(I_{yz})_{\text{área}} = (I_{zx})_{\text{área}} = 0 \qquad (\text{el área está sobre el plano } xy)$$

Con las ecuaciones para las placas delgadas [ecuaciones (F.2) y (F.7)] y $M = \rho At = \rho\, 2a^2 t$, en donde $A = 2a^2$ es el área de la placa y ρ es la densidad de masa, las propiedades de masa quedan

$$I_x = \rho t (I_x)_{\text{área}} = \rho t \frac{2a^4}{3} = \frac{1}{3}Ma^2$$

$$I_y = \rho t (I_y)_{\text{área}} = \rho t \frac{2a^4}{3} = \frac{1}{3}Ma^2$$

$$I_z = \rho t (J_O)_{\text{área}} = \rho t \frac{4a^4}{3} = \frac{2}{3}Ma^2$$

$$I_{xy} = I_{yz} = I_{zx} = 0$$

Placa 2 Los momentos y productos de inercia de área para la placa 2 son

$$(I_y)_{\text{área}} = \frac{a(2a)^3}{3} = \frac{8a^4}{3}$$

$$(I_z)_{\text{área}} = \frac{2a(a)^3}{3} = \frac{2a^4}{3}$$

z
t
Masa = M
2
Masa = M
t
2a
1
O
a
a
a
x
y

(a)

$$(J_O)_{\text{área}} = (I_y)_{\text{área}} + (I_z)_{\text{área}} = \frac{8a^4}{3} + \frac{2a^4}{3} = \frac{10a^4}{3}$$

$$(I_{xy})_{\text{área}} = (I_{zx})_{\text{área}} = 0 \qquad \text{(el área está sobre el plano } yz\text{)}$$

$$I_{yz} = \frac{a^2(2a)^2}{4} = a^4$$

Al sustituir esos resultados y $M = \rho At = \rho 2a^2t$ en las ecuaciones (F.2) y (F.7), las propiedades de la placa 2 quedan

$$I_x = \rho t(J_O)_{\text{área}} = \rho t\frac{10a^4}{3} = \frac{5}{3}Ma^2$$

$$I_y = \rho t(I_y)_{\text{área}} = \rho t\frac{8a^4}{3} = \frac{4}{3}Ma^2$$

$$I_z = \rho t(I_z)_{\text{área}} = \rho t\frac{2a^4}{3} = \frac{1}{3}Ma^2$$

$$I_{xy} = I_{zx} = 0$$

$$I_{yz} = \rho t(I_{yz})_{\text{área}} = \rho ta^4 = \frac{1}{2}Ma^2$$

Ensamblado Las propiedades de masa del ensamblado se encuentran al sumar las propiedades de las dos placas:

$$I_x = Ma^2\left(\frac{1}{3} + \frac{5}{3}\right) = 2Ma^2$$

$$I_y = Ma^2\left(\frac{1}{3} + \frac{4}{3}\right) = \frac{5}{3}Ma^2$$

$$I_z = Ma^2\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right) = Ma^2$$

$$I_{xy} = 0 + 0 = 0$$

$$I_{yz} = 0 + \frac{1}{2}Ma^2 = \frac{1}{2}Ma^2$$

$$I_{zx} = 0 + 0 = 0$$

Al sustituir esos valores en la ecuación (19.11), el tensor de inercia en el punto O para el ensamblado es

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} Ma^2$$

Respuesta

Parte 2

Al sustituir las propiedades inerciales del ensamblado que se obtuvieron en la parte 1 en las ecuaciones (F.11) resultan las siguientes ecuaciones que deben resolverse para los momentos de inercia principales y los cosenos directores de los ejes principales:

$$(2Ma^2 - I)\lambda_x \qquad + 0\lambda_y \qquad + 0\lambda_z = 0 \tag{a}$$

$$0\lambda_x + \left(\frac{5}{3}Ma^2 - I\right)\lambda_y \qquad - \frac{Ma^2}{2}\lambda_z = 0 \tag{b}$$

$$0\lambda_x \qquad - \frac{Ma^2}{2}\lambda_y + (Ma^2 - I)\lambda_z = 0 \tag{c}$$

$$\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 = 1 \tag{d}$$

La ecuación característica se construye al establecer que el determinante de los coeficientes en las ecuaciones de la (a) a la (c) es cero:

$$\begin{vmatrix} 2Ma^2 - I & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{3}Ma^2 - I & -\frac{Ma^2}{2} \\ 0 & -\frac{Ma^2}{2} & Ma^2 - I \end{vmatrix} = 0 \tag{e}$$

Al desarrollar el determinante y simplificar, resulta

$$(2Ma^2 - I)\left(I^2 - \frac{8}{3}Ma^2 I + \frac{17}{12}M^2a^4\right) = 0 \tag{f}$$

Al resolver la ecuación (f) y etiquetar las raíces como I_1, I_2 e I_3 se obtiene

$$I_1 = 0.7324Ma^2 \qquad I_2 = 1.9343Ma^2 \qquad I_3 = 2.0000Ma^2$$ *Respuesta*

como los momentos principales de inercia (valores característicos).

Los cosenos directores de un eje principal pueden encontrarse sustituyendo el valor característico correspondiente en las ecuaciones de la (a) a la (d) y después resolviendo esas ecuaciones para los cosenos directores λ_x, λ_y y λ_z. Cuando se usa $I = I_3 = 2.0\ Ma^2$, las ecuaciones de la (a) a la (c) quedan

$$0 = 0$$

$$-\frac{1}{3}\lambda_y - \frac{1}{2}\lambda_z = 0$$

$$-\frac{1}{2}\lambda_y - \lambda_z = 0$$

Debido a que las ecuaciones segunda y tercera son independientes desde el punto de vista lineal, entonces su solución es $\lambda_y = \lambda_z = 0$. Al combinar esos resultados con la ecuación (d), $\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 = 1$, se concluye que $\lambda_x = \pm 1$. Por tanto, el vector unitario en la dirección del eje asociado con I_3, es decir, el tercer vector característico, es

$$\boldsymbol{\lambda}_3 = \pm\mathbf{i}$$ *Respuesta*

El signo más-menos en esta respuesta refleja el hecho de que un vector característico sólo define la dirección del eje principal; el sentido del vector unitario es arbitrario sobre dicho eje. En otras palabras, si $\boldsymbol{\lambda}$ es un vector propio, entonces $-\boldsymbol{\lambda}$ también lo es.

Con $I = I_2 = 1.9343\ Ma^2$, las ecuaciones de la (a) a la (c) son

$$0.0657\lambda_x = 0$$
$$-0.2676\lambda_y - 0.5000\lambda_z = 0$$
$$-0.5000\lambda_y - 0.9343\lambda_z = 0$$

De la primera ecuación se obtiene $\lambda_x = 0$. Las otras dos ecuaciones no son independientes porque ambas implican que $\lambda_z = -0.5352\lambda_y$. Al sustituir esos resultados en la ecuación (d):

$$0^2 + \lambda_y^2 + (-0.5352\lambda_y)^2 = 1$$

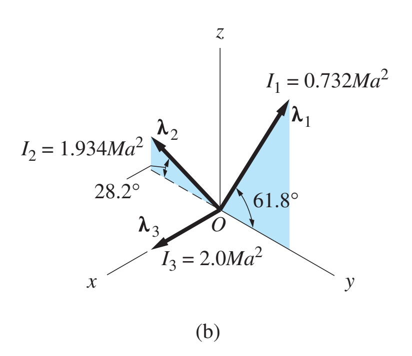
que da $\lambda_y = \pm\ 0.8817$. En consecuencia, $\lambda_z = -0.5352(\pm 0.8817) = \mp 0.4719$, por lo que el segundo vector propio es

$$\boldsymbol{\lambda}_2 = \pm 0.882\mathbf{j} \mp 0.472\mathbf{k}$$ *Respuesta*

La dirección del primer valor característico, correspondiente a $I = I_1 = 0.7324\ Ma^2$, puede obtenerse de manera semejante, y resulta

$$\boldsymbol{\lambda}_1 = \pm 0.472\mathbf{j} \pm 0.882\mathbf{k}$$ *Respuesta*

En la figura (b) se muestran los tres ejes principales. Observe que éstos son mutuamente ortogonales, como debía ser, porque los momentos principales de inercia son distintos. Además, como se indica en la figura (b), en general los signos de los vectores propios se seleccionan de manera que $\boldsymbol{\lambda}_1$, $\boldsymbol{\lambda}_2$ y $\boldsymbol{\lambda}_3$ formen una triada de mano derecha (orientación positiva).



(b)

Problemas

F.19 Utilice la integración para determinar los productos de inercia de la varilla delgada homogénea de masa m y longitud L respecto a los ejes que se muestran.

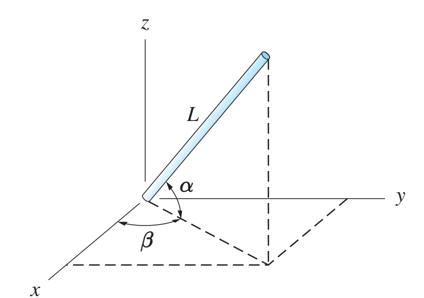


Fig. PF.19

F.20 Mediante la integración, calcule I_{xy} para la varilla delgada curva en el problema F.9.

F.21 El alambre delgado uniforme de masa m está doblado en forma de una hélice. Con la integración, encuentre los productos de inercia respecto a los ejes que se muestran. (Observe que la ecuación de la hélice es $z = h\theta/(2\pi)$, donde θ se mide en radianes.)

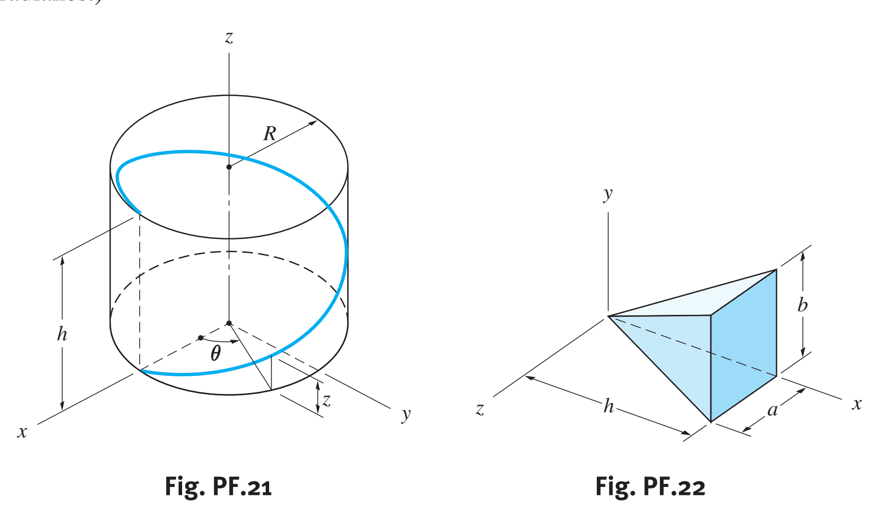


Fig. PF.21 Fig. PF.22

F.22 Utilice la integración para determinar los productos de inercia del sólido homogéneo respecto a los ejes indicados.

F.23 Por integración, obtenga los productos de inercia del prisma homogéneo respecto a los ejes que se muestran.

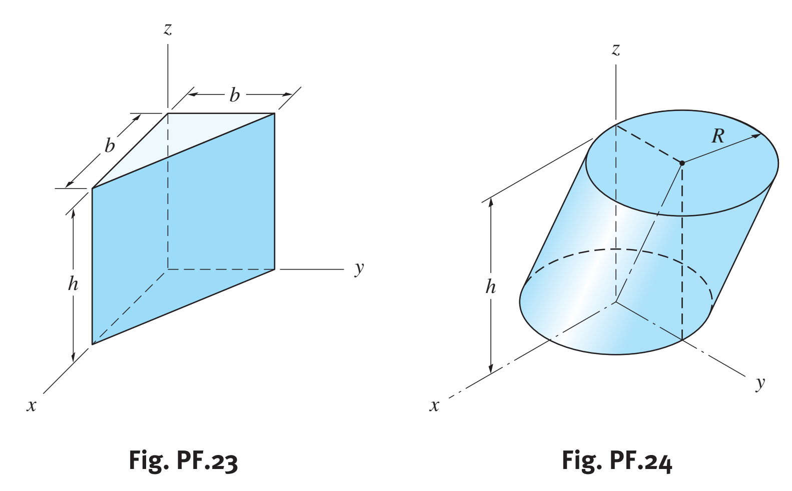


Fig. PF.23 Fig. PF.24

F.24 Determine los productos de inercia del sólido homogéneo de masa m respecto a los ejes indicados. Aplique integración.

F.25 La placa delgada homogénea tiene masa *m*. Encuentre su tensor de inercia en el punto *O* respecto a los ejes que se muestran.

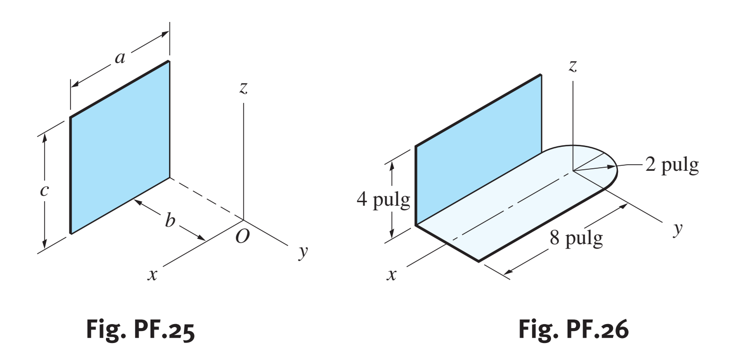


Fig. PF.25 **Fig. PF.26**

F.26 El soporte de acero tiene un espesor uniforme de 1/16 pulg. Calcule sus productos de inercia respecto a los ejes que se indican. (Para acero, $\gamma = 490$ lb/pie^3.)



F.27 Determine el momento de inercia del disco homogéneo de 18 lb respecto al eje *AB*.

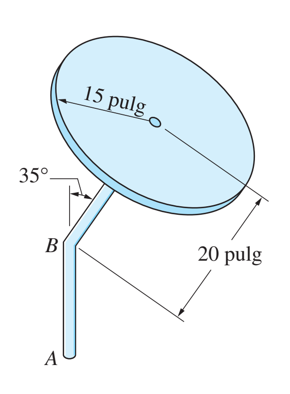


Fig. PF.27

F.28 La parte que se muestra se elaboró cortando y doblando una placa delgada circular de masa *m*. Obtenga sus productos de inercia respecto a los ejes que se indican.

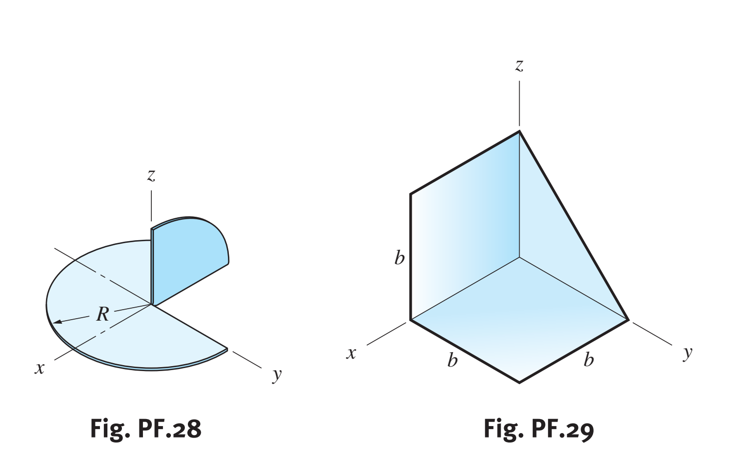


Fig. PF.28 **Fig. PF.29**

F.29 El cuerpo de masa *m* está fabricado de una hoja delgada de metal de espesor constante. Calcule sus productos de inercia respecto a los ejes que se muestran.

F.30 El ensamblado se formó al soldar tres piezas de una varilla delgada uniforme. Si la masa del ensamblado es *m*, determine su momento de inercia respecto al eje *AB*.

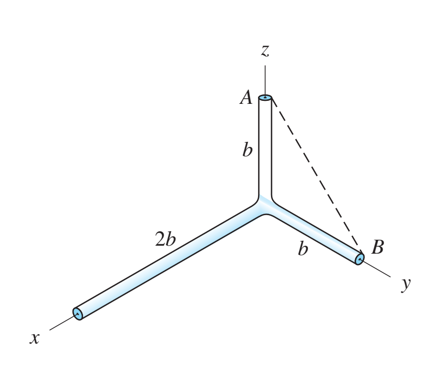


Fig. PF.30

F.31 Calcule el momento de inercia del cono homogéneo respecto al eje *OA*.

F.32 La masa del cubo uniforme es *m*. (a) Determine el momento de inercia respecto al eje *OA*. (b) Pruebe que *OA* es un eje principal de inercia en *O*. (*Sugerencia:* sustituya su respuesta del inciso (a) en la ecuación característica para el punto *O*.)

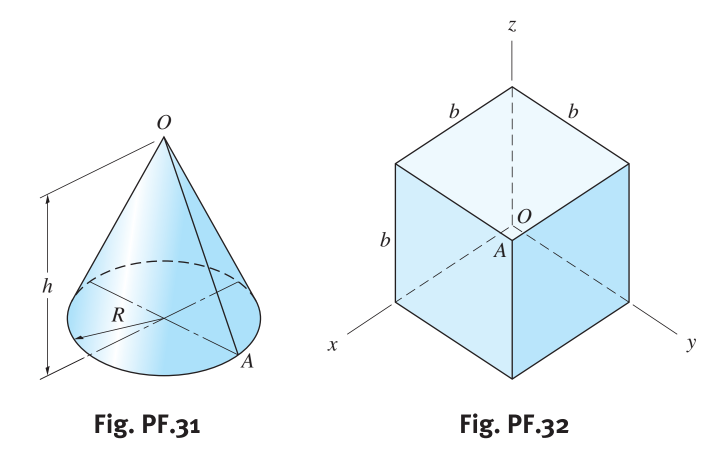


Fig. PF.31

Fig. PF.32

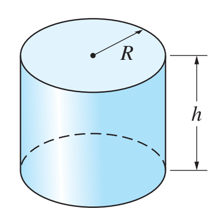


Fig. PF.33

F.33 Determine la razón h/R para el cilindro homogéneo de manera que los momentos de inercia respecto a todos los ejes que pasan por su centro de masa sean iguales.

F.34 Encuentre el momento de inercia de la placa delgada homogénea respecto al lado AB a partir de las propiedades de su área.

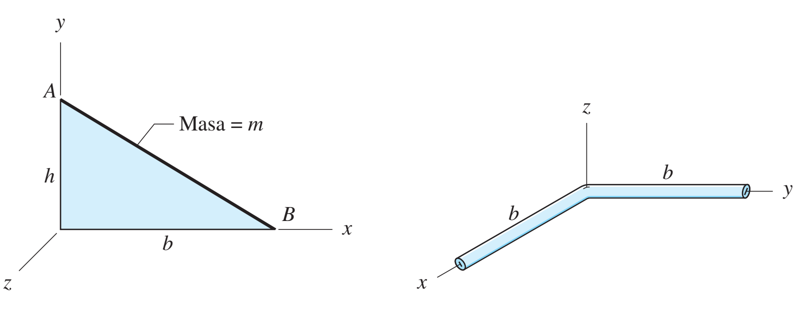


Fig. PF.34, PF.35

Fig. PF.36

F.35 Las dimensiones de la placa delgada uniforme de 0.36 kg son $b = 240$ mm y $h = 150$ mm. Para el centro de masa de la placa, (a) calcule los momentos principales de inercia y (b) encuentre el eje principal correspondiente al menor momento de inercia.

F.36 La masa de la barra delgada doblada es m. Determine los ejes y momentos principales de inercia en el centro de masa de la barra. (*Sugerencia:* los ejes principales pueden localizarse por inspección a partir de la simetría.)

F.37 Las masas pequeñas están unidas por una varilla ligera. Para el punto O, obtenga (a) el tensor de inercia respecto a los ejes que se muestran y (b) los momentos principales de inercia y los ejes principales en O. Muestre los ejes principales sobre un dibujo del cuerpo.

F.38 Las dos masas pequeñas están unidas por una varilla rígida de masa despreciable. Determine los momentos principales de inercia del sistema en su centro de masa. (*Sugerencia:* no es necesario calcular el tensor de inercia porque los ejes principales pueden encontrarse por inspección.)

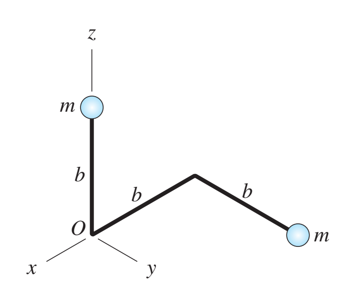


Fig. PF.37, PF.38

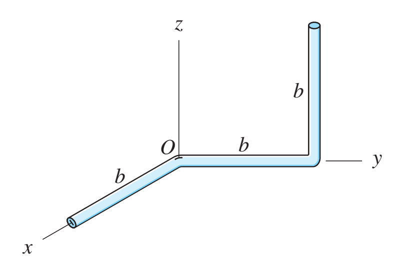


Fig. PF.39

F.39 La masa de la varilla uniforme doblada es m. Para el punto O, obtenga (a) el tensor de inercia respecto a los ejes que se muestran; (b) los momentos principales de inercia y (c) el eje principal asociado con el menor momento de inercia.

F.40 Las tres pelotas pequeñas están unidas con varillas de masa despreciable. Para el punto O, determine (a) el tensor de inercia respecto a los ejes indicados y (b) los momentos principales de inercia. Cada varilla es paralela a un eje de coordenadas.

F.41 Las tres pelotas pequeñas están unidas con varillas de masa despreciable. Calcule los momentos principales de inercia y las direcciones principales en el centro de masa del sistema.

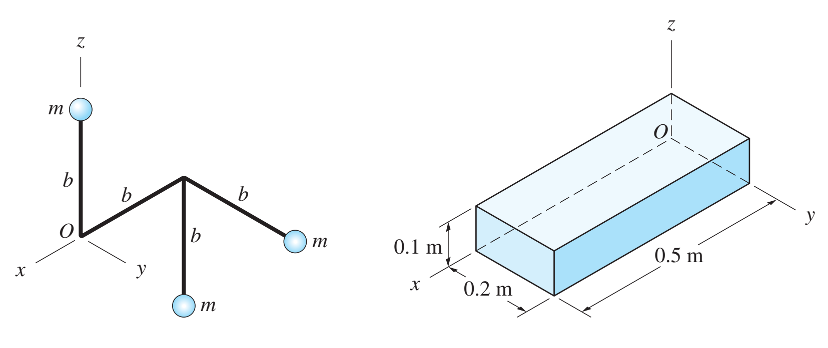


Fig. PF.40, PF.41 **Fig. PF.42**

F.42 El bloque está hecho de acero para el cual $\rho = 7850\ \text{kg/m}^3$. Para el punto O, encuentre (a) el tensor de inercia respecto a los ejes que se muestran y (b) los momentos principales de inercia y los ejes principales.

Respuestas a los problemas con numeración par

Capítulo 11

11.2 23.5 lb
11.4 14.75 lb · pie · s^2
11.6 (No hay respuesta)
11.8 (a) $[FL]$; (b) $[FT]$; (c) $[F]$
11.10 (a) $[FLT^2]$; (b) $[ML^2]$
11.12 $[c] = [FTL^{-1}]$, $[k] = [FL^{-1}]$, $[P_0] = [F]$, $[\omega] = [T^{-1}]$
11.14 (a) $[FL]$; (b) $[ML^2T^{-2}]$
11.16 1.327×10^{-10} lb
11.18 (No hay respuesta)
11.20 5.93×10^{-3} N

Capítulo 12

12.2 (a) $v = -gt + v_0$, $a = -g$; (b) $x_{max} = v_0^2/(2g)$, $t = 2v_0/g$; (c) $x_{max} = 120.2$ pies, $t = 5.47$ s
12.4 $x = -40$ pulg, $v = 99$ pulg/s, $a = 42$ pulg/s^2, $s = 310$ pulg
12.6 (a) $v = v_0(1 - e^{-t/t_0})$; (b) $a = (v_0/t_0)e^{-t/t_0}$, $a = (v_0 - v)/t_0$
12.8 $v = 40.6$ mm/s, $a = 61.9$ mm/s^2
12.10 $v = v_0(v_0t - b)[(v_0t - b)^2 - b^2]^{-1/2}$, $a = -v_0^2b^2[(v_0t - b)^2 - b^2]^{-3/2}$
12.12 (a) $\mathbf{v} = -10\mathbf{j}$ m/s, $\mathbf{a} = -4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ m/s^2; (b) $\mathbf{v} = -20\mathbf{i}$ m/s, $\mathbf{a} = -4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ m/s^2
12.14 (a) $v_0\sqrt{1 + (2hx/b^2)^2}$; (b) $2hv_0^2/b^2 \downarrow$
12.16 $v = R\omega^2 t$
12.18 $v = 15.15$ m/s, $a = 189.5$ m/s^2
12.20 (a) $\mathbf{v} = (6t + 4)\mathbf{i} + (-8t + 3)\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$ pies/s, $\mathbf{a} = 6\mathbf{i} - 8\mathbf{j}$ pies/s^2
12.22 (a) $\dot{x} = -2b\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta$; (b) $\ddot{x} = -2b\left(\ddot{\theta}\operatorname{sen}\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta\right)$
12.24 $\dot{x} = -R\omega\operatorname{sen}\theta\left(1 + \cos\theta/\sqrt{9 - \operatorname{sen}^2\theta}\right)$
12.26 (a) 5770 m; (b) 263 m/s; (c) 18.86°
12.28 60.5 m
12.30 150.7 m
12.32 (a) v_0e^{-kx}; (b) $v_0/(v_0kt + 1)$
12.34 $\tan^{-1}(a/g)$
12.36 $0.894g$
12.38 15.57 pies/s^2
12.40 $t = 1.105$ s, $v = 7.91$ pies/s
12.42 (a) 4.89 m/s^2; (b) 3.65 m/s^2
12.44 23.1 pies/s
12.46 1.418 m/s^2
12.48 1.373 m/s
12.50 6.17×10^5 N/m
12.52 $1.082\sqrt{Vq/m}$
12.54 $v_{max} = 4.53$ pies/s en $x = 1.316$ pies
12.56 241 m
12.58 6.56 s
12.60 (a) $v_{max} = 64.4$ pies/s en $x = 29\,600$ pies
12.62 (a) $a = 6.25[(t + 1) + (t - 1)\operatorname{sgn}(1 - t)] - 12.5x$ m/s^2; (b) $x_{max} = 1.554$ m, $v_{max} = 2.0$ m/s
12.64 $2.5\mathbf{i}$ N
12.66 (b) 15.39 lb
12.68 0.524
12.70 62.4 pies
12.72 99.6 m

12.74 (a) $y = -0.01171x^2 + 0.5318x$ pies;
(b) Evita la red y aterriza detrás de la base
12.76 7.17 pies
12.78 (a) $t = (m/c)\ln[1 + (cv_0/mg)\,\text{sen}\,\alpha]$;
(b) $v = v_0 \cos\alpha/[1 + (cv_0/mg)\,\text{sen}\,\alpha]$
12.80 (a) $a_x = 0.5x/(x^2 + y^2)^{3/2}$ m/s^2,
$a_y = 0.5y/(x^2 + y^2)^{3/2}$ m/s^2; Condiciones iniciales:
$t = 0$, $x = 0.3$ m, $y = 0.4$ m, $v_x = 0$,
$v_y = -2$ m/s; (b) $x = 0.360$ m, $v = 1.795$ m/s
12.82 (a) $a_x = -0.06869v_x(v_x^2 + v_y^2)^{0.25}$ pies/s^2,
$a_y = -0.06869v_y(v_x^2 + v_y^2)^{0.25} - 32.2$pies/s^2; Condiciones iniciales: $t = 0$, $x = 0$, $y = 6$ pies, $v_x =$ 120 pies/s, $v_y = 0$; (b) $R = 63.1$ pies, $t = 0.655$ s
12.84 (a) $a_x = -40[1 - (0.5/R)]x$ m/s^2,
$a_y = -40[1 - (0.5/R)]y - 9.81$ m/s^2; Condiciones iniciales: $t = 0$, $x = 0.5$ m, $y = -0.5$ m,
$v_x = v_y = 0$
12.86 (a) $a_x = -0.05vv_x + 1.6v_y$ pies/s^2,
$a_y = 0.05vv_y - 1.6v_x - 32.2$ pies/s^2 donde
$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$; (b) $t = 1.051$ s, $x = 19.38$ pies
12.88 4038 m
12.90 62.4 pies
12.92 $v_0 = 885$ pies/s, $R = 8850$ pies, $h = 1610$ pies
12.94 $t = 16.09$ s, $R = 3070$ m
12.96 171.0 s
12.98 203 m
12.100 (a) 4.00 lb; (b) 0.966 pies/s
12.102 $v_{max} = 97.6$ mm/s, $y_{max} = 63.5$ mm
12.104 32.0 mm/s^2
12.106 17.58 s
12.108 232 pies
12.110 $-4 + (x/16)$ m/s^2
12.112 23.2 m/s
12.114 4230 m
12.116 (a) 1.635 N · s/m; (b) 25.0 s
12.118 2055 pies/s^2
12.120 0.262 pies/s^2 →
12.122 (a) $2mg$; (b) $g\sqrt{m/k}$

Capítulo 13

13.2 57.3 km/h
13.4 112.8 km/h
13.6 9.25 m/s^2
13.8 7.21 pulg/s^2
13.10 (a) 0.64 pies/s^2; (b) 4.0 pies/s^2
13.12 (a) $\mathbf{v}_A = 4\mathbf{j}$ m/s, $\mathbf{v}_B = 8\mathbf{j}$ m/s;
(b) $\mathbf{a}_A = -32\mathbf{i} + 12\mathbf{j}$ m/s^2,
$\mathbf{a}_B = -64\mathbf{i} + 24\mathbf{j}$ m/s^2
13.14 (a) 0.2 m; (b) 22.4 m/s^2
13.16 72.5 m
13.18 5.18 m/s^2
13.20 76.4 s
13.22 7.34 pies/s^2
13.24 $a_{max} = 2Av_0^2$, $x = -B/(2A)$
13.26 $v = 545$ m/s, $a = 101.4$ m/s^2
13.28 (a) $v_R = 3$ pies/s, $v_\theta = 6$ pies/s, $a_R = -9$ pies/s^2,
$a_\theta = 9$ pies/s^2; (b) $v_R = 0$, $v_\theta = 9$ pies/s,
$a_R = -18$ pies/s^2, $a_\theta = 0$
13.30 943 pies/s
13.32 (a) $v_R = -0.255$ m/s, $v_\theta = 0.2$ m/s,
$a_R = -0.4$ m/s^2, $a_\theta = -1.018$ m/s^2;
(b) $v_R = -0.255$ m/s, $v_\theta = 0.333$ m/s,
$a_R = -0.667$ m/s^2, $a_\theta = -1.018$ m/s^2
13.34 $\mathbf{v} = 0.8\mathbf{e}_R + 0.96t^2\mathbf{e}_\theta$ m/s,
$\mathbf{a} = -1.152t^3\mathbf{e}_R + 2.88t\mathbf{e}_\theta$ m/s^2
13.36 $2.54b\omega^2$
13.38 (a) $2b\omega$; (b) $3b\omega^2$; (c) $b\omega$; (d) $b\omega^2$
13.40 $-3(v_0^2/b)\mathbf{e}_R$
13.42 $h = 5460$ pies, $v = 529$ pies/s
13.44 0.944 m/s
13.46 $v_{max} = 3.58$ pulg/s en $\theta = n\pi/4$, $n = 0, 1, 2, \ldots$,
$a_{max} = 5.72$ pulg/s^2 en
$\theta = (\pi/8) + (n\pi/4)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$
13.48 $v = 8.58$ pies/s, $a = 44.2$ pies/s^2
13.50 (a) $h\omega\sqrt{1 + \theta^2\,\text{sen}^2\,\beta}/(2\pi\cos\beta)$;
(b) $a_R = -(h\omega^2/2\pi)\theta\tan\beta$,
$a_\theta = (h\omega^2/\pi)\tan\beta$, $a_z = 0$
13.52 0.217
13.54 8.09 m/s
13.56 (a) 97.0 N; (b) −3.88 m/s^2
13.58 (a) $\ddot{\theta} = -4.905\,\text{sen}\,\theta$ rad/s^2;
(b) $6.26\sqrt{\cos\theta - 0.866}$ m/s
13.60 2.22 rad/s
13.62 0.554 lb
13.64 (a) 3.78 rad/s; (b) 1.892 rad/s
13.66 (a) 1400 N; (b) 560 m/s^2
13.68 (a) $\ddot{R} = \omega^2 R$; (b) $4.12\omega R_0$
13.70 10.70 pies/s
13.72 0.600
13.74 $F_R = -400$ N, $F_\theta = 480$ N
13.76 $F = 4.8\tan\theta$ N
13.78 (a) $7.21\mathbf{e}_R + 8.0\mathbf{e}_\theta$ m/s; (b) 23.1 N
13.80 (a) 0.529 N; (b) 7.10 N
13.82 15.50 pies/s
13.84 $F_R = -1033$ lb, $F_\theta = 675$ lb,
$F_z = 15$ lb
13.86 (b) 120.2°

13.88 (a) Condiciones iniciales: $t = 0$, $z = 6$ pies, $\dot{z} = 0$, $\dot{\theta} = 5/(3\tan\beta)$ rad/s; (c) 2.07 pies
13.90 (a) $\ddot{R} = R\dot{\theta}^2 - 40(R - 0.5) + 9.81 \operatorname{sen}\theta$ m/s^2, $\ddot{\theta} = \left(9.81\cos\theta - 2\dot{R}\dot{\theta}\right)/R$ rad/s^2; Condiciones iniciales: $t = 0$, $R = 0.5$ m, $\dot{R} = \theta = \dot{\theta} = 0$; (c) $R_{max} = 1.282$ m, $\theta = 130.9°$
13.92 5510 lb
13.94 39.2 m/s^2
13.96 0.621
13.98 42.7 N
13.100 99.1 pies/s
13.102 $v = \sqrt{2gR(1 - \cos\theta)}$, $\theta = 48.2°$
13.104 (a) $\sqrt{2}b\omega$; (b) $\sqrt{5}b\omega^2$
13.106 $-160\mathbf{i} - 120\mathbf{j}$ mm/s
13.108 $\sqrt{Rg\tan\beta}$

Capítulo 14

14.2 (a) $F_0b/2$; (b) $F_0b/2$
14.4 (a) $-0.414kR^2$; (b) WR
14.6 $-0.1186\mu kb^2$
14.8 13.88 pies
14.10 33.6 mi/h
14.12 $1.860Ph$
14.14 150.1 mm
14.16 98.1 N
14.18 29.6 N
14.20 1.181 m
14.22 23.0 pies/s
14.24 137.2 pies/s
14.26 $2W$
14.28 617 kN/m
14.30 1.142 lb/pulg
14.32 7.82 pies/s
14.34 4.90 m/s
14.36 8.41 N
14.38 4970 lb
14.40 13.71 pies/s
14.42 (a) $\sqrt{2gR(1 - \cos\theta)}$; (b) 48.2°
14.44 3.59 pies/s
14.46 81.2 pies/s
14.48 7.50×10^{10} J
14.50 4.57×10^{6} m
14.52 1010 pies
14.54 23.4 hp
14.56 73.1%
14.58 F^2t/m
14.60 (a) $47.7 \operatorname{sen} 2\pi t$ W; (b) $P_{max} = 47.7$ W, $t = 0.25$ s
14.62 0.815 m/s
14.64 (a) 4.98 m/s^2; (b) 2.43 m/s^2
14.66 (a) $36[t - (3/4)t^2 + (1/8)t^3]$ W; (b) $P_{max} = 13.86$ W, $t = 0.845$ s
14.68 0.298 lb · s
14.70 $P = 3.98$ lb en 30° ↖
14.72 4.20 s
14.74 147.7 N
14.76 $v_2 = 26.0$ m/s, $\theta_2 = 57.1°$
14.78 66.1 lb
14.80 $1.0\mathbf{i} + 0.463\mathbf{j}$ m/s
14.82 25.9 pies/s
14.84 1.631 s
14.86 59.3 mi/h
14.88 $P_0L^2/(2v_0)$
14.90 $1.2\mathbf{i} - 0.4\mathbf{k}$ N · m · s
14.92 $2mvR\cos^2\theta\mathbf{k}$
14.94 5.44 s
14.96 1.898 s
14.98 4340 m/s
14.100 21.2 N
14.102 (a) 2000 m/s; (b) 9950 km
14.104 (a) 32.0 rad/s; (b) 16.0 rad/s^2
14.106 (a) 14.02 pies/s; (b) 18.01°
14.108 1682 días
14.110 $R_{max} = 251 \times 10^3$ mi, $R_{min} = 225 \times 10^3$ mi
14.112 1.736×10^{10} N · m
14.114 (a) hiperbólica; (b) 1405 mi; (c) 29 300 pies/s
14.116 (b) 17.3°; (c) 152 km
14.118 En A: 592×10^3 lb · s, en B: 358×10^3 lb · s
14.120 82.7°, $v = 7.50 \times 10^3$ m/s
14.122 (a) $\ddot{R} = R\dot{\theta}^2 - (1.4078 \times 10^{16}/R^2)$, $\ddot{\theta} = -2\dot{R}\dot{\theta}/R$, Condiciones iniciales: $t = 0$, $R_0 = 23.46 \times 10^6$ pies, $\theta = 0$, $\dot{R} = 1917.4$ pies/s, $\dot{\theta} = 934.2 \times 10^{-6}$ rad/s; (c) 80.3°
14.124 8.26 m/s
14.126 190.0 lb
14.128 (a) 2.79 pies/s; (b) 52.2×10^{-3} lb · pie/s
14.130 23.9 pies/s
14.132 6.02 s
14.134 $v_B = 24.0$ pies/s, razón de elongación = 13.21 pies/s
14.136 15 970 pies/s
14.138 497 lb/pie
14.140 19.22 pies/s

Capítulo 15

15.2 $a_{B/A} = -0.5$ pies/s^2, $v_{B/A} = -0.5t + 22$ pies/s, $x_{B/A} = -0.25t^2 + 22t + 10\,560$ pies, $x_{B/A}(t = 120 \text{ s}) = 9600$ pies

15.4 $v = 592$ mi/h, $\theta = 5.03°$
15.6 40.9°
15.8 (a) $10.00\mathbf{i} + 51.96\mathbf{j}$ km/h;
(b) $10.00t\mathbf{i} + (51.96t - 3.46)\mathbf{j}$ km; (c) 655 m
15.10 (a) 100 m/s; (b) $160\mathbf{i} + 130.9\mathbf{j}$ m/s
15.12 6.50 pies/s^2
15.14 $-4.48\mathbf{i} + 5.47\mathbf{j}$ mi/h
15.16 1.2 m/s $\longrightarrow$
15.18 48 pulg/s $\uparrow$
15.20 0.45 pies/s $\uparrow$
15.22 2.81 m/s $\uparrow$
15.24 4.94 pies/s $\uparrow$
15.26 $v_B = 0.1$ m/s $\downarrow$, $v_C = 0.5$ m/s $\uparrow$
15.28 (a) (4.33 pies, 3.33 pies); (b) $2.794\mathbf{i} + 0.560\mathbf{j}$ pies/s^2
15.30 12.24 m
15.32 $\mathbf{v}_A = 3.88\mathbf{i} + 10.32\mathbf{j}$ pies/s, $\mathbf{v}_B = -10.86\mathbf{i}$ pies/s
15.34 $x_B = 4390$ m, $y_B = 922$ m
15.36 $a = 3.49$ m/s^2, 2.83 N
15.38 10.4 lb
15.40 $2g/3$
15.42 7.73 pies
15.44 59.2 N
15.46 27.3 N
15.48 $v_A = 0.0960 \operatorname{sen}\theta$ m/s $\longrightarrow$,
$a_A = 0.230\cos\theta$ m/s^2 $\longrightarrow$
15.50 2.55 m/s^2 $\longleftarrow$
15.52 (a) $a_1 = 7.728 - 154.56(x_1 - x_2)$ pies/s^2,
$a_2 = 154.56(x_1 - x_2)$ pies/s^2, Condiciones iniciales:
$t = 0, x_1 = x_2 = v_1 = v_2 = 0$; (b) $v_1 = 7.34$ pulg/s,
$v_2 = 2.05$ pulg/s, $P = 0.712$ lb
15.54 (a) $a_A = (10/3)(v_B - v_A)$ m/s^2,
$a_B = -2000(v_B - v_A)$ m/s^2, Condiciones iniciales:
$t = 0, x_A = x_B = v_A = 0, v_B = 600$ m/s;
(b) $v_B = 81.8$ m/s, $x_A = 0.567$ mm
15.56 (a) $a_A = -2.943 \operatorname{sgn}(v_A - v_B) - 1000x_A$ m/s^2,
$a_B = 1.4715 \operatorname{sgn}(v_A - v_B)$ m/s^2
15.58 4.51 m/s
15.60 7.01 m/s
15.62 5.46 m/s $\longleftarrow$
15.64 $v_A = 1.523$ pies/s $\longleftarrow$,
$v_B = 2.28$ pies/s $\longrightarrow$
15.66 1.190 s
15.68 42.4 pies/s $\uparrow$
15.70 3.84 pies/s
15.72 8.79 pies/s
15.74 6340 lb
15.76 $(8/3)m\omega L^2$ (positivo)
15.78 (a) 15.60 s; (b) 161.4 rev
15.80 El bloque A golpea primero con rapidez de 4.91 pies/s
15.82 1.199 m/s $\downarrow$
15.84 $\mathbf{v}_A = -(b\omega_0/4)(\mathbf{i} + 3\sqrt{3}\mathbf{j})$,
$\mathbf{v}_B = (b\omega_0/4)(-\mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{j})$
15.86 (a) $\pm R_0\sqrt{(k/m) - 2\dot{\theta}_0^2}$; (b) $\dot{\theta}_0 > \sqrt{k/(2m)}$
15.88 (a) 4.50 pies/s; (b) 3.00 pies/s
15.90 $v_{\text{final}} = 3.842$ m/s$\longrightarrow$, energía perdida = 6.20%
15.92 3.79 pies
15.94 (a) 1.485 pies/s; (b) 83.9%
15.96 29.7°
15.98 $v_A = 68.9$ pies/s, $v_B = 17.4$ pies/s
15.100 120 lb
15.102 1.862 pies
15.104 (a) $v\cos\alpha$; (b) $0.5mv^2 \operatorname{sen}^2\alpha$
15.106 (a) $1.532\mathbf{i}$ m/s; (b) $1.532\mathbf{i} - 0.558\mathbf{j}$ m/s
15.108 (No hay respuesta)
15.110 $v_A = (13/64)\, v_0$, $v_B = (15/64)\, v_0$,
$v_C = (9/16)\, v_0$
15.112 v_0
15.114 0.268
15.116 $(\mathbf{v}_A)_2 = 9.75\mathbf{j}$ pies/s, $(\mathbf{v}_B)_2 = 20\mathbf{i} + 15.75\mathbf{j}$ pies/s
15.118 6.93 rad/s
15.120 27.3 pies
15.122 $v_A = 7.29$ m/s, $v_B = 3.95$ m/s
15.124 (a) 8230 pies/s; (b) 5350 pies/s
15.126 $26\,950\mathbf{i} - 911\mathbf{j}$ mi/h
15.128 $6.07\mathbf{i} - 22.7\mathbf{j}$ lb
15.130 29.3×10^3 lb $\longleftarrow$
15.132 $1447\mathbf{i} + 2584\mathbf{j}$ N
15.134 16.14 lb
15.136 $\theta = 46.77°$, $a = 9.22$ m/s^2
15.138 12.98 m/s^2 $\downarrow$
15.140 5.73 lb/pies^2
15.142 (a) $0.0994v(18 - v)$ lb · pie/s; (b) $v = 9$ pies/s,
$P_{\max} = 8.05$ lb · pie/s
15.144 (a) $-4.713t\mathbf{i} + (8.604t - 120)\mathbf{j}$ m; (b) 57.8 m
15.146 4.0 mi/h
15.148 762 pies/s
15.150 5.72 rad/s
15.152 $v = 2500$ pies/s, $\theta = 38.0°$
15.154 $v_0 m_h m_a(1 + e)/(m_h + m_a)$
15.156 $\mathbf{v}_A = 4.10\mathbf{i} - 1.88\mathbf{j}$ m/s, $\mathbf{v}_B = 6.58\mathbf{j}$ m/s
15.158 2.07 pies
15.160 (a) 29.3 mi/h; (b) 3.97%

Capítulo 16

16.2 20 rad/s, 1.230 rev
16.4 (a) $\omega = -8$ rad/s, $\alpha = -8$ rad/s^2; (b) 40 rad
16.6 (a) 9.0 s^{-2}; (b) 19 rad
16.8 48 rad

16.10 (a) $0.1667\omega^{1.5} + 8.0$ rad; (b) $4.0t^2$ rad/s; (c) $1.333t^3 + 8.0$ rad
16.12 164.4 pies/s^2
16.14 (a) 5.0 rad/s^2; (b) 14.32 rev
16.16 $\mathbf{v}_B = -0.3021\mathbf{i} - 0.3625\mathbf{k}$ m/s, $\mathbf{a}_B = -1.605\mathbf{i} + 0.619\mathbf{j} - 0.812\mathbf{k}$ m/s^2
16.18 $\mathbf{v}_B = 16.08\mathbf{i} + 12.86\mathbf{j} + 21.4\mathbf{k}$ pies/s, $\mathbf{a}_B = -625\mathbf{i} + 207\mathbf{j} + 345\mathbf{k}$ pies/s^2
16.20 $\omega = 10.667$ rad/s (negativa), $v_C = 18.67$ pies/s $\longrightarrow$
16.22 $\omega = 5.833$ rad/s (negativa), $v_C = 75.0$ mm/s $\longrightarrow$
16.24 $\omega_0(r_A + r_B)/r_B$
16.26 $\omega_B = 5$ rad/s (positiva), $\omega_{AB} = 2.22$ rad/s (negativa)
16.28 $0.6 \operatorname{sen}^2 \theta$ rad/s
16.30 $\omega_{BD} = \omega_{DE} = 1.714$ rad/s (positiva)
16.32 227 pulg/s $\uparrow$
16.34 $\omega_{BD} = 20.6$ rad/s (positiva), $\omega_{DE} = 16.96$ rad/s (positiva)
16.36 4.57 rad/s (positiva)
16.38 (a) 5.31°; (b) 3.17 m/s
16.40 4.0 rad/s (negativa)
16.42 721 mm/s en 33.7° $\nearrow$
16.44 (a) (4 pies, 3 pies); (b) (0, 36.1 pulg)
16.46 8 rad/s (negativa)
16.48 7.80 rad/s (positiva)
16.50 $\omega = 1.0$ rad/s (positiva), $\mathbf{v}_G = -11.0\mathbf{j}$ pies/s
16.52 $-1.420\mathbf{i}$ m/s
16.54 5.13 rad/s (positiva)
16.56 6.90 rad/s (negativa)
16.58 $v_C = 13.11$ m/s $\longleftarrow$, $v_D = 13.11$ m/s $\uparrow$
16.60 18.47 pulg/s $\uparrow$
16.62 (a) $144\mathbf{i} + 216\mathbf{j}$ pulg/s^2; (b) $144\mathbf{i}$ pulg/s^2
16.64 (a) $20\mathbf{i} + 72\mathbf{j}$ pulg/s^2; (b) $50\mathbf{i}$ pulg/s^2; (c) $125\mathbf{i} - 180\mathbf{j}$ pulg/s^2
16.66 $a_B = 8.823$ pies/s^2 $\swarrow$, $\alpha = 0.991$ rad/s^2 (positiva)
16.68 91.1 pies/s^2 $\longrightarrow$
16.70 154.0 m/s^2 $\uparrow$
16.72 $\alpha_{AD} = 0.674$ rad/s^2 (positiva), $\alpha_{AE} = 0.818$ rad/s^2 (negativa)
16.74 19.45 pulg/s^2 $\longrightarrow$
16.76 $\alpha_{AB} = 3.36$ rad/s^2 (positiva), $\alpha_{BC} = 20.4$ rad/s^2 (positiva)
16.78 $\alpha_{AB} = 3.0$ rad/s^2 (positiva), $a_B = 21.0$ pies/s^2 $\uparrow$
16.80 5.10 m/s^2
16.82 (b) $-1.736\mathbf{i} - 0.768\mathbf{j}$ m/s^2
16.84 (a) 0.2 m/s^2 $\downarrow$; (b) 0.36 m/s^2 $\downarrow$
16.86 $\mathbf{v}_P = -26.0\mathbf{i} + 81.0\mathbf{j}$ pulg/s, $\mathbf{a}_P = -299\mathbf{i} - 167.9\mathbf{j}$ pulg/s^2
16.88 $v_P = -9.60$ pies/s, $\mathbf{a}_P = -28.8\mathbf{i} - 76.8\mathbf{j}$ pies/s^2
16.90 $-65.3\mathbf{i} - 53.0\mathbf{j}$ pies/s^2
16.92 (a) 640 mm/s a 60° $\swarrow$; (b) 7.39 m/s^2 en 60° $\nearrow$
16.94 (a) $-150\mathbf{i} - 48\mathbf{j}$ pies/s^2; (b) $40\mathbf{i} + 83.3\mathbf{j}$ pies/s^2
16.96 (a) $-3.33\mathbf{i}$ m/s^2; (b) $-3.33\mathbf{i}$ m/s^2
16.98 2.88 rad/s (negativa)
16.100 (a) 0.510 m/s $\downarrow$; (b) 1.312 m/s^2 $\downarrow$
16.102 1.045 rad/s (positiva)
16.104 (a) $(v_0/d) \operatorname{sen}^2 \theta$; (b) $2(v_0/d)^2 \operatorname{sen}^3 \theta \cos \theta$
16.106 $2R\alpha_0(\operatorname{sen}\theta + 2\theta \cos\theta) \downarrow$
16.108 0.427 rad/s (positiva)
16.110 4.66 rad/s (positiva), 2.62 rad/s (negativa)
16.112 $11.54\omega^2$ (negativa)
16.114 (a) $v_A \cos\theta / \cos(\alpha - \theta)$; (b) $-(v_A^2/L)[\operatorname{sen}^2 \alpha / \cos^3(\alpha - \theta)]$
16.116 42.0 rad/s^2 (positiva)
16.118 $\mathbf{v}_C = -2.0\mathbf{i} + 3.464\mathbf{j}$ m/s, $\mathbf{a}_C = -5.43\mathbf{i} - 6.60\mathbf{j}$ m/s^2
16.120 $\mathbf{v}_C = -6.685\mathbf{i} - 10.028\mathbf{k}$ pies/s, $\mathbf{a}_C = -16.8\mathbf{i} - 48.4\mathbf{j} + 71.6\mathbf{k}$ pies/s^2
16.122 $\alpha_{AB} = 4.80$ rad/s^2 (positiva), $\alpha_{BC} = 0$
16.124 7.00 rad/s (negativa)
16.126 $\omega_{BCD} = 74.3$ rad/s (positiva), $v_D = 54.1$ m/s
16.128 $\alpha_{AF} = 300$ rad/s^2 (positiva), $a_{F/BD} = 4800$ pulg/s^2 $\longrightarrow$
16.130 (a) 5.21 m/s $\longrightarrow$; (b) 4.42 m/s^2 $\longleftarrow$

Capítulo 17

17.2 7.72 slug · pie^2
17.4 $\bar{z} = 100.8$ pies $\bar{I}_x = 861 \times 10^6$ slugs · pie^2
17.6 $mb^2/6$
17.8 $I_x = 13.98 \times 10^{-3}$ kg · m^2, $I_z = 70.9 \times 10^{-3}$ kg · m^2
17.10 $I_z = 13.03 \times 10^{-3}$ slugs · pie^2, $\bar{I}_z = 3.04 \times 10^{-3}$ slugs · pie^2
17.12 0.1015
17.14 $\bar{x} = 1.548$ m, $\bar{I} = 121.0$ kg · m^2
17.16 (No hay respuesta)
17.18 (a) 9.20 m/s^2; (b) 0.938
17.20 78.1 lb
17.22 $a = 12.08$ pies/s^2, $N_A = 37.5$ lb
17.24 (b) 0.350
17.26 $1.5g \downarrow$
17.28 $mg/7$
17.30 (No hay respuesta)
17.32 $\alpha = 10.13$ rad/s^2 (positiva), $T = 554$ N
17.34 10.61 lb
17.36 $\alpha = 5.80$ rad/s^2, $T = 7.20$ lb
17.38 $\alpha_A = 53.0$ rad/s^2, $\alpha_B = -13.24$ rad/s^2

17.40 $\alpha = 12.42$ rad/s^2 (negativa),
$N = 365$ N $\uparrow$,
$F = 132.5$ N $\longrightarrow$
17.42 (a) 6.5 pulg; (b) 4.26 pulg
17.44 204 N
17.46 3.39 lb
17.48 (b) (i) a la derecha, (ii) a la izquierda
17.50 1.826 m/s^2
17.52 (b) $\alpha = 5.37$ rad/s^2, $\bar{a} = 24.2$ pies/s^2
17.54 (a) $0.283g/R$; (b) 0.322
17.56 6.90 rad/s^2
17.58 $\alpha = 0.768$ rad/s^2, $T = 414$ lb
17.60 (a) 8.0 m/s^2; (b) 0.8 m
17.62 $\alpha_C = 5.13$ rad/s^2 (negativa);
$\alpha_{AB} = 17.58$ rad/s^2 (positiva)
17.64 (a) 9.06 rad/s^2; (b) 14.40 m/s^2 a 84.8° $\swarrow$
17.66 $(454 \operatorname{sen}\theta + 0.1667)\cos\theta$
17.68 (b) $\sqrt{(3g/L)[2 - \cos\theta - 2\sqrt{2}\operatorname{sen}(\theta/2)]}$;
(c) $-\sqrt{3g/L}$
17.70 (a) 14.22 rad/s^2 (positiva); (b) 6.22 rev
17.72 (a) 0.565 rad/s^2; (b) 74.1 s
17.74 (b) $\pm\sqrt{(3g/L)(\cos\theta - \cos\theta_0)}$;
(c) $(mg/2)(5 - 3\cos\theta_0)$ en $\theta = 0$
17.76 (a) $\alpha = 4.15 + 9.22\cos\theta$ rad/s^2; (b) $-711°$
17.78 (b) $\pm\sqrt{(3g/L)(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta - 1)}$;
(c) $\theta_{max} = 90°$, $F = mg$
17.80 (b) $\pm\sqrt{28.6\theta - 21.5\operatorname{sen}\theta}$ rad/s
17.82 (a) $\bar{a} = 7.5 - 100x$ m/s^2,
$\bar{v} = \sqrt{15x - 100x^2}$ m/s;
(b) $\bar{v}_{max} = 0.750$ m/s en $x = 0.075$ m;
(c) 0.382
17.84 (a) $\omega = 3.13\sqrt{0.866 - \cos\theta}$ rad/s,
$\alpha = 4.905 \operatorname{sen}\theta$ rad/s^2;
(b) $183.9(3\cos\theta - 1.732)\operatorname{sen}\theta$ N; (c) 54.7°
17.86 (b) 24.8°
17.88 (b) 2.29 rad/s
17.90 (b) la rotación es en sentido positivo
17.92 (a) 67.5 mm; (b) 111.6 mm; (c) 88.8 mm
17.94 $\bar{v} = 3.59$ pies/s, $\bar{a} = 28.4$ pies/s^2
17.96 0.283 mg
17.98 $\alpha = 0.843$ rad/s^2 (positiva), $a_A = 8.31$ pies/s^2 $\longleftarrow$
17.100 $\alpha = 3.02$ rad/s^2 (negativa), $T = 140.8$ N
17.102 1.264 rad/s
17.104 $\bar{a} = 10.20$ pies/s^2 $\longrightarrow$, $T = 125.0$ lb
17.106 785 N
17.108 (a) $\alpha = [3\cos\theta/(2L)][(2P/m) - g]$,
$\omega = \sqrt{(3\operatorname{sen}\theta/L)[(2P/m) - g]}$;
(b) $(9\operatorname{sen}2\theta/8)(2P - mg)$ $\longrightarrow$

Capítulo 18

18.2 -6.70 lb · pie
18.4 69.7 lb · pie
18.6 Caso (a): 480 W, Caso (b): 120 W
18.8 1.5 rad/s^2
18.10 (a) 52.6 lb · pie; (b) 28.1 lb · pie
18.12 (b) 22.5 hp a 200 rad/s
18.14 (a) $(17/48)mL^2\omega^2$; (b) $(25/96)mL^2\omega^2$
18.16 21.2 lb · pie
18.18 3.10 lb · pie
18.20 87.3 lb · pie
18.22 480 J
18.24 220 lb · pie
18.26 3.45 rad/s
18.28 5.99 N · m/rad
18.30 (a) $2\sqrt{ge/(R^2 + 2e^2)}$; (b) $R/\sqrt{2}$; (c) $1.189\sqrt{g/R}$
18.32 11.09 rad/s
18.34 0.966
18.36 (a) 9.25 pies/s; (b) 19.66 pies/s
18.38 (a) 2.97 m/s; (b) 98.9 mm
18.40 $\sqrt{3P/(mL)}$
18.42 $\omega = 3.67\sqrt{\cos\theta - 0.819}$ rad/s,
$\alpha = -6.74 \operatorname{sen}\theta$ rad/s^2
18.44 (a) 3140 lb · pie; (b) 5.00 rad/s
18.46 2.36 m/s
18.48 $\sqrt{4m_2 g/(3m_1 R)}$
18.50 10.44 pies/s
18.52 196.2 N
18.54 $P_0 R/(r\sqrt{\bar{I}k})$
18.56 5.81 N · m
18.58 (a) $mb^2\omega/6$ (negativa); (b) $2mb^2\omega/3$ (negativa);
(c) $mb^2\omega/3$ (positiva)
18.60 $R/2$
18.62 1022 rad/s
18.64 24.3 rad/s
18.66 19.86 N
18.68 13.33 rad/s
18.70 (a) 9.13 rad/s (negativa); (b) 9.56 rad/s (positiva)
18.72 (a) 3.50 rad/s; (b) 3.50 rad/s
18.74 $v_A = v_0/3 \uparrow$, $v_B = 2v_0/3 \uparrow$
18.76 14.02 rad/s
18.78 35.2 rad/s
18.80 155.8%
18.82 11.44 rad/s
18.84 (a) 5.47 lb · s; (b) 3.79 lb · s
18.86 (a) 2.08 rad/s; (b) 46.4°
18.88 (a) $2.40v_1$; (b) 1.430 m/s
18.90 3.84 rad/s (negativa)
18.92 (a) v_1; (b) 0%

18.94 5.24 rad/s
18.96 310 m/s
18.98 (a) 0.509 rad/s; (b) 4.39°
18.100 2.0ω
18.102 187.2 J
18.104 0
18.106 $t = 0.824$ s, $\omega = 30.0$ rad/s
18.108 8.43 pies/s ↓
18.110 4.20 rad/s
18.112 3.82 rad/s
18.114 60.8°
18.116 44.3 rad/s (negativa)
18.118 2.43 rad/s

Capítulo 19

19.2 1.755 m/s^2
19.4 8.46 rad/s
19.6 (a) 2.22$\mathbf{j}$ rad/s; (b) 2.04$\mathbf{i}$ rad/s^2; (c) $\mathbf{v}_P = 0.205\mathbf{i}$ m/s, $\mathbf{a}_P = -0.188\mathbf{j} - 0.266\mathbf{k}$ m/s^2
19.8 (a) $1.80(\mathbf{j} + \mathbf{k})$ rad/s; (b) 2.37$\mathbf{i}$ rad/s^2
19.10 (a) $36.7\mathbf{i} + 32.0\mathbf{k}$ rad/s; (b) $586\mathbf{j} + 400\mathbf{k}$ rad/s^2
19.12 (a) $(0.658\mathbf{j} - 0.940\mathbf{k})\omega_0$; (b) $4.17\omega_0\mathbf{j}$
19.14 (a) $6.0\mathbf{i} + 3.0\mathbf{j} - 4.0\mathbf{k}$ pies/s; (b) $12.5\mathbf{i} - 16.0\mathbf{j} - 49.0\mathbf{k}$ pies/s^2
19.16 (a) $\boldsymbol{\omega}_{CD} = 7.20\mathbf{j}$ rad/s, $\boldsymbol{\omega}_{BD} = \mathbf{0}$; (b) 34.6$\mathbf{j}$ rad/s^2
19.18 $-0.866\mathbf{i} + 0.750\mathbf{j}$ rad/s^2
19.20 $\boldsymbol{\omega}_A = -2.40\mathbf{j}$ rad/s, $\boldsymbol{\omega}_C = 0.90\mathbf{i} - 2.40\mathbf{j} + 1.20\mathbf{k}$ rad/s
19.22 (a) 30$\mathbf{j}$ rad/s^2; (b) $-600\mathbf{i} - 270\mathbf{j} + 1000\mathbf{k}$ pulg/s^2
19.24 (a) 108$\mathbf{j}$ rad/s^2; (b) $159.6\mathbf{i} - 212.8\mathbf{j} - 59.8\mathbf{k}$ m/s^2
19.26 $\boldsymbol{\omega}_2 = 4.0\mathbf{i} - 3.14\mathbf{j} + 3.14\mathbf{k}$ rad/s, $T_2 = 1.997$ J
19.28 (a) $8.10\mathbf{j} + 1.35\mathbf{k}$ N · m · s; (b) 641 J
19.30 15.57 rad/s
19.32 0.410
19.34 $-3.15\mathbf{j} + 19.43\mathbf{k}$ lb · pie · s
19.36 $2.65\sqrt{g/L}$
19.38 15.64 rad/s
19.40 $(12/7)mb \int \hat{P}\, dt\, (\mathbf{i} - 5\mathbf{j})$
19.42 $1.02\mathbf{j} - 2.45\mathbf{k}$ rad/s
19.44 $0.776\mathbf{j} - 0.631\mathbf{k}$
19.46 $\cos^{-1}[3g/(2L\omega^2)]$
19.48 $\mathbf{C} = -(1/4)mR^2\omega_0^2 \operatorname{sen}\beta \cos\beta\, \mathbf{i}$, $\mathbf{R} = \mathbf{0}$
19.50 $0.5mRL\omega^2$
19.52 $\mathbf{R}_A = -648\mathbf{i}$ N, $\mathbf{R}_B = 648\mathbf{i}$ N
19.54 $\mathbf{R}_A = -1.5\mathbf{j}$ N, $\mathbf{R}_B = 1.5\mathbf{j}$ N
19.56 $\mathbf{C} = -6.91\mathbf{k}$ N · m
19.58 9.01 rad/s
19.60 360 N
19.62 $\mathbf{R}_A = -m\omega_0^2 b(\mathbf{j} + \mathbf{k})$, $\mathbf{C}_A = -(m\omega_0^2 b^2/8)\mathbf{j}$
19.64 22.1 lb
19.66 5.20 lb
19.68 $\dot{\boldsymbol{\psi}} = -4.98\mathbf{k}$ rad/s, $\boldsymbol{\omega} = 0.872\mathbf{j} + 4.980\mathbf{k}$ rad/s
19.70 2.13
19.72 2.31 lb
19.74 (a) Condiciones iniciales: $t = 0$, $\theta = 0.5236$ rad, $\dot{\theta} = 0$, $\phi = 0$, $\dot{\phi} = 200$ rad/s; (b) $\tau = 0.0628$ s, -86.6 rad/s $\leq \dot{\theta} \leq 86.6$ rad/s, 50 rad/s $\leq \dot{\phi} \leq 200$ rad/s
19.76 (No hay respuesta)
19.78 (a) $\ddot{\theta} = (0.75\dot{\phi}^2 \cos\theta - 0.25\dot{\phi}\dot{\psi} + 117.70) \operatorname{sen}\theta$, $\ddot{\phi} = (-1.75\dot{\phi}\cos\theta + 0.25\dot{\psi})\dot{\theta}\csc\theta$, $\ddot{\psi} = (1.75\dot{\phi}\cos\theta - 0.25\dot{\psi})\dot{\theta}\cot\theta + \dot{\theta}\dot{\phi}\operatorname{sen}\theta - 0.5(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi})$; (b) $\omega_z|_{t=0} = 123.8$ rad/s, $\omega_z|_{t=1.0\text{ s}} = 75.1$ rad/s
19.80 $\dot{\phi} = 2Fb/(mR^2\dot{\psi})$
19.82 (a) $\theta = 20°$, $\dot{\psi} = 8.96$ rad/s, $\dot{\phi} = 3.18$ rad/s; (b) $15° \leq \gamma \leq 55°$
19.84 (No hay respuesta)
19.86 0.267 rad/s a 13.08° ↗

Capítulo 20

20.2 (a) 24.5 Hz; (b) $x = 0.012 \operatorname{sen}(153.9t + 0.6228)$ m
20.4 1.858
20.6 0.747
20.8 (a) $\dot{\theta}_{max} = p\theta_0$, $\ddot{\theta}_{max} = p^2\theta_0$; (b) $\dot{\theta}_{max} = p\sqrt{2(1 - \cos\theta_0)}$, $\ddot{\theta}_{max} = p^2 \operatorname{sen}\theta_0$
20.10 $\ddot{x} + 2Tx/(mL) = 0$
20.12 0.875 s
20.14 (b) 0.228 s
20.16 (No hay respuesta)
20.18 (b) 0.0469
20.20 31.0 N · s/m
20.22 −2.89 mm
20.24 0.435 s
20.26 16.99 pies/s
20.28 1.419×10^{-4} N · s/m
20.30 (a) $\ddot{\theta} = -0.2791\dot{\theta}\,|\dot{\theta}| - 21.47 \operatorname{sen}\theta$; (c) 44.1%
20.32 (a) $x = 0.02667(-0.5 \operatorname{sen} 50t + \operatorname{sen} 25t)$ m; (b) 1.333; (c) 34.6 mm
20.34 1.912 pulg
20.36 (a) 2.5 rad/s; (b) 60 mm
20.38 $\omega < 39.3$ rad/s o $\omega > 50.8$ rad/s
20.40 (a) 400 rad/s; (b) 1.847 mm
20.42 (a) $\ddot{\theta} = -9.0 \operatorname{sen}\theta + 12.5 \operatorname{sen} 5t \cos\theta$
20.44 1568 rev/min.

20.46 12.01 N · s/m
20.48 (b) $x_{max} = 0.1315$ pies, $x_{min} = 0.0607$ pies
20.50 (a) $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -c\omega Y \operatorname{sen} \omega t$;
(b) $|X| = 33.5$ mm, $\phi = 24.8°$
20.52 $x(t) = 19.95 \operatorname{sen}(600t + 0.499)$ mm,
$x(t)$ adelanta a $y(t)$ en 28.6°
20.54 $Z_{max} = 1.155Y$, $\omega/p = \sqrt{2}$
20.56 (a) 25.0 N · s/m; (b) 90°
20.58 (a) $10\ddot{x} + 5\dot{x} + 150x = 0.5 \operatorname{sen} \omega t$;
(b) $x(t) = 25.82 \operatorname{sen}(3.873t + \pi/2)$ mm
20.60 (a) $\ddot{x} = 200 \operatorname{sen} 500t - 50\dot{x}\,|\dot{x}| -$
$(250 \times 10^3)x$ m/s^2; (b) 4.4 mm
20.62 $0.276\sqrt{k/m}$ Hz
20.64 (b) $y = \bar{k}$, $p_{max} = \sqrt{g/(2\bar{k})}$
20.66 (a) $m\ddot{\theta}/3 + (c_1 + c_2/4)\dot{\theta} - k\theta = 0$, (b) 0.628
20.68 1.969 Hz
20.70 0.725 Hz
20.72 6.01°
20.74 215 lb · s/pie
20.76 (c) 41°
20.78 (a) 0.600; (b) 1.009 lb · pie · s
20.80 (b) La reducción en amplitud en un ciclo es $0.6q$
El sistema se detiene en $(q = -0.1q_0, \dot{q}/p = 0)$
20.82 $5.13\sqrt{m/k}$
20.84 $0.936\sqrt{g/R}$
20.86 $2\pi(1 - R/L)\sqrt{L/g}$
20.88 0.426 pulg, 18.76 pulg
20.90 $2\pi\sqrt{3m/(5k)}$
20.92 0.612 s
20.94 (a) $\ddot{\theta} + 3(k/m - 2g/L)\theta = 0$; (b) 0.897 s;
(c) 30.0 kg
20.96 $0.1345\sqrt{g/(R - r)}$
20.98 (a) $\ddot{x} + 40x = 0$; (b) 1.007 Hz;
(c) $x(t) = 26.50 \operatorname{sen}(6.325t - 0.8550)$ mm
20.100 $0.7366 \operatorname{sen} 43.96t - 0.5397 \operatorname{sen} 60t$ pulg
20.102 (a) 32.7 rad/s; (b) 88.9 mm
20.104 $x(t) = 2.309 \exp(-17.945t) \operatorname{sen}(31.08t +$
$1.0472)$ pulg
20.106 $2t \exp(-10t)$ m
20.108 (a) 1.291; (b) $(\text{F.M.})_{max} = 1.400$,
$\omega = 12.96$ rad/s
20.110 5.58 kN · s/m
20.112 Subamortiguado
20.114 5.32 mm

Apéndice F

F.2 $0.792mR^2$
F.4 $I_x = I_z = m(b^2 + 2a^2)/12$, $I_y = ma^2/3$
F.6 53.5 kg·m^2
F.8 (a) $(mL^2/12) \operatorname{sen}^2 \beta$; (b) $I_y = (mL^2/12) \cos^2 \beta$,
$I_z = mL^2/12$
F.10 (a) $(m/12)(L^2 + 3R^2)$; (b) $mR^2/2$
F.12 (a) $(m/5)(b^2/4 + 3h^2)$; (b) $mb^2/10$
F.14 0.304 kg · m^2
F.16 $0.0584mR^2$
F.18 6.22 kg · m^2
F.20 $3mR^2/(8\pi)$
F.22 $I_{xy} = 3mbh/10$, $I_{yz} = 3mab/20$, $I_{zx} = 3mah/10$
F.24 $I_{xy} = I_{zx} = 0$, $I_{yz} = mRh/3$
F.26 $I_{xy} = -0.979 \times 10^{-3}$ slugs · pie^2,
$I_{yz} = -0.489 \times 10^{-3}$ slugs · pie^2,
$I_{zx} = 0.979 \times 10^{-3}$ slugs · pie^2
F.28 $I_{xy} = mR^2/(8\pi)$, $I_{zx} = -mR^2/(8\pi)$, $I_{yz} = 0$
F.30 mb^2
F.32 (a) $mb^2/6$
F.34 $mb^2h^2(b^2 + h^2)/6$
F.36 $\boldsymbol{\lambda}_1 = (\mathbf{i} + \mathbf{j})/\sqrt{2}$, $\boldsymbol{\lambda}_2 = (-\mathbf{i} + \mathbf{j})/\sqrt{2}$, $\boldsymbol{\lambda}_3 = \mathbf{k}$;
$\bar{I}_1 = mb^2/6$, $\bar{I}_2 = mb^2/24$, $\bar{I}_3 = 5mb^2/24$
F.38 $\bar{I}_1 = 0$, $\bar{I}_2 = \bar{I}_3 = 3mb^2/2$
F.40 (a) $mb^2 \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$; (b) $I_1 = 1.75mb^2$,
$I_2 = 4.80mb^2$, $I_3 = 3.45mb^2$
F.42 (a) $\begin{bmatrix} 1.308 & -1.963 & -0.981 \\ -1.963 & 6.803 & -0.393 \\ -0.981 & -0.393 & 7.588 \end{bmatrix}$ kg · m^2;
(b) $I_1 = 0.522$ kg · m^2, $I_2 = 7.416$ kg · m^2,
$I_3 = 7.762$ kg · m^2; $\boldsymbol{\lambda}_1 = 0.941\mathbf{i} + 0.303\mathbf{j} +$
$0.148\mathbf{k}$, $\boldsymbol{\lambda}_2 = -0.330\mathbf{i} + 0.919\mathbf{j} + 0.216\mathbf{k}$,
$\boldsymbol{\lambda}_3 = -0.070\mathbf{i} - 0.252\mathbf{j} + 0.965\mathbf{k}$



Índice

D

E

R

S

T

Unidades del SI (Sistema Internacional de Unidades)

Unidades seleccionadas del SI			Prefijos del SI de uso común		
Cantidad	**Nombre**	**Símbolo SI**	**Factor**	**Prefijo**	**Símbolo del SI**
Energía	joule	J(1 J = 1 N · m)	10^{9}	giga	G
Fuerza	newton	N(1 N = 1 kg · m/s^2)	10^{6}	mega	M
Longitud	metro*	m	10^{3}	kilo	k
Masa	kilogramo*	kg	10^{-3}	mili	m
Momento (torca, momento de torsión)	newton metro	N · m	10^{-6}	micro	μ
			10^{-9}	nano	n
Frecuencia de rotación	revolución por segundo	r/s			
	hertz	Hz (1 Hz = 1 r/s)			
Esfuerzo (presión)	pascal	Pa (1 Pa = 1 N/m^2)			
Tiempo	segundo*	s			
Potencia	watt	W (1 W = 1 J/s)			

*Unidad base del SI

Reglas seleccionadas y sugerencias para el uso del SI

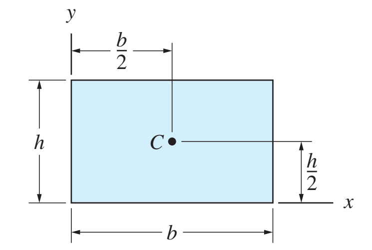
1. Sea cuidadoso con el uso de mayúsculas y minúsculas en los símbolos, unidades y prefijos (por ejemplo, m para metro o mili, M para mega).
2. Los números con cinco o más dígitos deben colocarse en grupos de tres cifras separadas con un espacio pequeño, contándolos de izquierda a derecha del punto decimal (por ejemplo, 61 354.982 03). Para los números con cuatro dígitos esto no es necesario. Se usan los espacios en lugar de las comas para evitar confusiones, muchos países las usan para marcar los decimales.
3. En unidades compuestas formadas por una multiplicación use el punto (por ejemplo, N · m).
4. La división puede indicarse con una diagonal (m/s) o con un exponente negativo con un punto (m · s^{-1}).
5. Evite el uso de prefijos en el denominador (por ejemplo, km/s es preferible a m/ms). La excepción a esta regla es el prefijo k en la unidad base kg (kilogramo).

Tabla de equivalencias de unidades del sistema inglés y del SI (el asterisco indica valores exactos; los otros son aproximaciones).

	Del sistema inglés al SI	Del SI al sistema inglés
1. Longitud	1 pulg = 25.4* mm = 0.0254* m 1 pie = 304.8* mm = 0.3048* m	1 mm = 0.039 370 pulg 1 m = 39.370 pulg = 3.281 pies
2. Área	1 pulg^2 = 645.16* mm^2 1 pie^2 = 0.092 903 04* m^2	1 mm^2 = 0.001 550 pulg^2 1 m^2 = 1550.0 pulg^2 = 10.764 pies^2
3. Volumen	1 pulg^3 = 16 387.064* mm^3 1 pie^3 = 0.028 317 m^3	1 mm^3 = 0.000 061 024 pulg^3 1 m^3 = 61 023.7 pulg^3 = 35.315 pies^3
4. Fuerza	1 lb = 4.448 N 1 lb/pie = 14.594 N/m	1 N = 0.2248 lb 1 N/m = 0.068 522 lb/pie
5. Masa	1 lbm = 0.453 59 kg 1 slug = 14.593 kg	1 kg = 2.205 lbm 1 kg = 0.068 53 slugs
6. Momento de una fuerza	1 lb · pulg = 0.112 985 N · m 1 lb · pie = 1.355 82 N · m	1 N · m = 8.850 75 lb · pulg 1 N · m = 0.737 56 lb · pie
7. Potencia	1 hp (550 lb · pie/s) = 0.7457 kW	1 kW = 1.3410 hp

Momentos de inercia de área

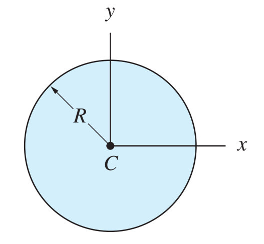
Rectángulo



$\bar{I}_x = \dfrac{bh^3}{12}$ $\quad \bar{I}_y = \dfrac{b^3h}{12}$ $\quad \bar{I}_{xy} = 0$

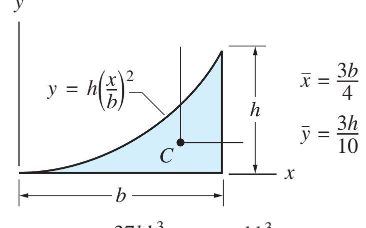
$I_x = \dfrac{bh^3}{3}$ $\quad I_y = \dfrac{b^3h}{3}$ $\quad I_{xy} = \dfrac{b^2h^2}{4}$

Círculo



$I_x = I_y = \dfrac{\pi R^4}{4}$ $\quad I_{xy} = 0$

Media parabólica complementaria

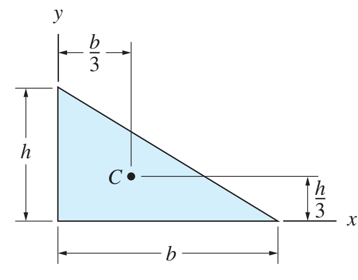


$\bar{I}_x = \dfrac{37bh^3}{2100}$ $\quad I_x = \dfrac{bh^3}{21}$

$\bar{I}_y = \dfrac{b^3h}{80}$ $\quad I_y = \dfrac{b^3h}{5}$

$\bar{I}_{xy} = \dfrac{b^2h^2}{120}$ $\quad I_{xy} = \dfrac{b^2h^2}{12}$

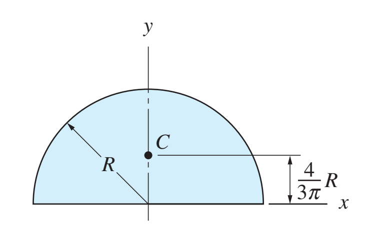
Triángulo rectángulo



$\bar{I}_x = \dfrac{bh^3}{36}$ $\quad \bar{I}_y = \dfrac{b^3h}{36}$ $\quad \bar{I}_{xy} = -\dfrac{b^2h^2}{72}$

$I_x = \dfrac{bh^3}{12}$ $\quad I_y = \dfrac{b^3h}{12}$ $\quad I_{xy} = \dfrac{b^2h^2}{24}$

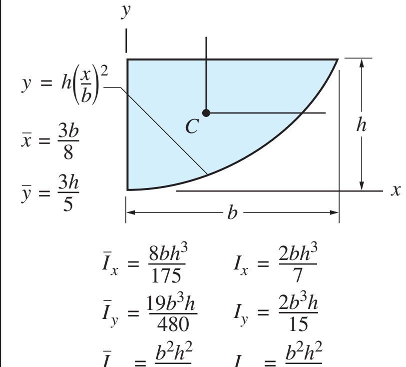
Semicírculo

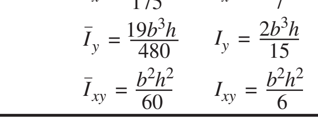


$\bar{I}_x = 0.1098R^4$ $\quad \bar{I}_{xy} = 0$

$I_x = I_y = \dfrac{\pi R^4}{8}$ $\quad I_{xy} = 0$

Media parábola



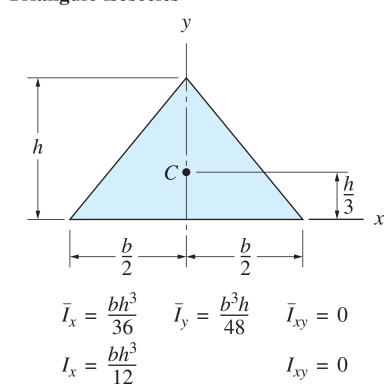


$\bar{I}_x = \dfrac{8bh^3}{175}$ $\quad I_x = \dfrac{2bh^3}{7}$

$\bar{I}_y = \dfrac{19b^3h}{480}$ $\quad I_y = \dfrac{2b^3h}{15}$

$\bar{I}_{xy} = \dfrac{b^2h^2}{60}$ $\quad I_{xy} = \dfrac{b^2h^2}{6}$

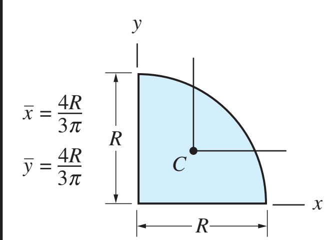
Triángulo isósceles



$\bar{I}_x = \dfrac{bh^3}{36}$ $\quad \bar{I}_y = \dfrac{b^3h}{48}$ $\quad \bar{I}_{xy} = 0$

$I_x = \dfrac{bh^3}{12}$ $\quad I_{xy} = 0$

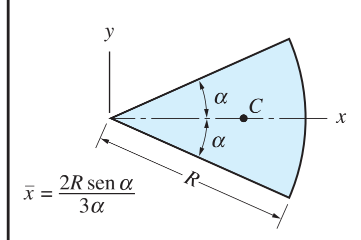
Cuarto de círculo



$\bar{I}_x = \bar{I}_y = 0.054\,88R^4$ $\quad I_x = I_y = \dfrac{\pi R^4}{16}$

$\bar{I}_{xy} = -0.016\,47R^4$ $\quad I_{xy} = \dfrac{R^4}{8}$

Sector circular

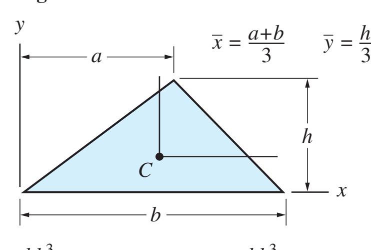


$I_x = \dfrac{R^4}{8}(2\alpha - \operatorname{sen} 2\alpha)$

$I_y = \dfrac{R^4}{8}(2\alpha + \operatorname{sen} 2\alpha)$

$I_{xy} = 0$

Triángulo

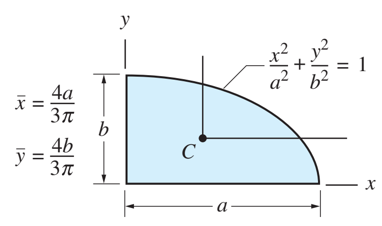


$\bar{I}_x = \dfrac{bh^3}{36}$ $\quad I_x = \dfrac{bh^3}{12}$

$\bar{I}_y = \dfrac{bh}{36}(a^2 - ab + b^2)$ $\quad I_y = \dfrac{bh}{12}(a^2 + ab + b^2)$

$\bar{I}_{xy} = \dfrac{bh^2}{72}(2a - b)$ $\quad I_{xy} = \dfrac{bh^2}{24}(2a + b)$

Cuarto de elipse



$\bar{I}_x = 0.054\,88ab^3$ $\quad I_x = \dfrac{\pi ab^3}{16}$

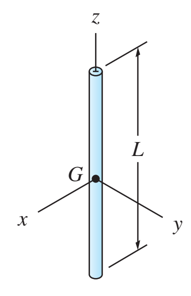
$\bar{I}_y = 0.054\,88a^3b$ $\quad I_y = \dfrac{\pi a^3b}{16}$

$\bar{I}_{xy} = -0.016\,47a^2b^2$ $\quad I_{xy} = \dfrac{a^2b^2}{8}$

Momentos de inercia de masa

Varilla delgada

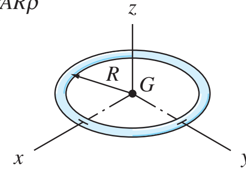
$m = AL\rho$



$\bar{I}_x = \bar{I}_y = \frac{1}{12}mL^2 \qquad \bar{I}_z \approx 0$

Aro delgado

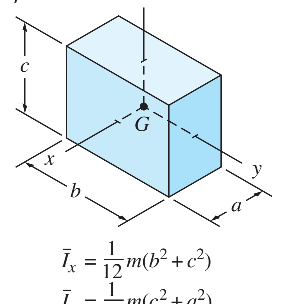
$m = 2\,\pi AR\rho$

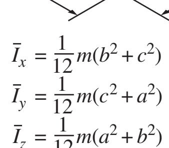


$\bar{I}_x = \bar{I}_y = \frac{1}{2}mR^2 \qquad \bar{I}_z = mR^2$

Prisma rectangular

$m = abc\rho$





$\bar{I}_x = \frac{1}{12}m(b^2+c^2)$

$\bar{I}_y = \frac{1}{12}m(c^2+a^2)$

$\bar{I}_z = \frac{1}{12}m(a^2+b^2)$

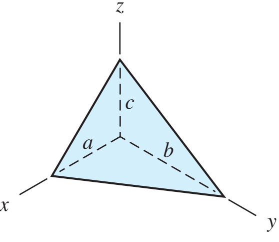
Tetraedro recto

$m = \frac{1}{6}abc\rho$

$\bar{x} = \frac{1}{4}a$

$\bar{y} = \frac{1}{4}b$

$\bar{z} = \frac{1}{4}c$



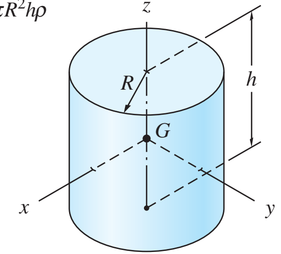
$I_x = \frac{1}{10}m(b^2+c^2) \qquad \bar{I}_x = \frac{3}{8}I_x$

$I_y = \frac{1}{10}m(c^2+a^2) \qquad \bar{I}_y = \frac{3}{8}I_y$

$I_z = \frac{1}{10}m(a^2+b^2) \qquad \bar{I}_z = \frac{3}{8}I_z$

Cilindro

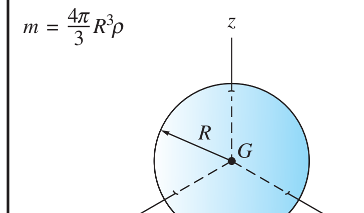
$m = \pi R^2 h\rho$



$\bar{I}_x = \bar{I}_y = \frac{1}{12}m(3R^2+h^2) \qquad \bar{I}_z = \frac{1}{2}mR^2$

Esfera

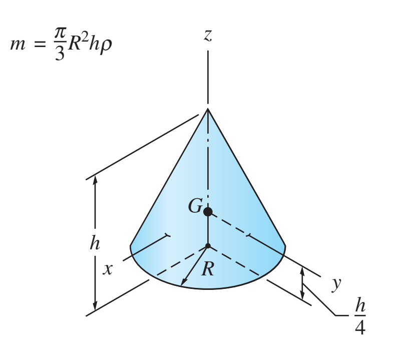
$m = \frac{4\pi}{3}R^3\rho$



$\bar{I}_x = \bar{I}_y = \bar{I}_z = \frac{2}{5}mR^2$

Cono

$m = \frac{\pi}{3}R^2 h\rho$

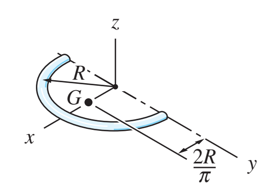


$\bar{I}_x = \bar{I}_y = \frac{3}{80}m(4R^2+h^2)$

$\bar{I}_z = \frac{3}{10}mR^2$

Varilla semicircular

$m = \pi AR\rho$



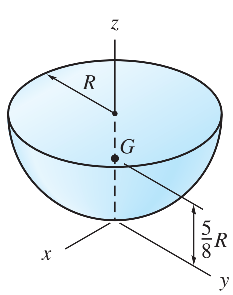
$I_x = I_y = \frac{1}{2}mR^2 \qquad I_z = mR^2$

$\bar{I}_x = I_x \qquad \bar{I}_y = \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\right)mR^2$

$\bar{I}_z = \left(1 - \frac{4}{\pi^2}\right)mR^2$

Hemisferio

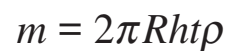
$m = \frac{2\pi}{3}R^3\rho$



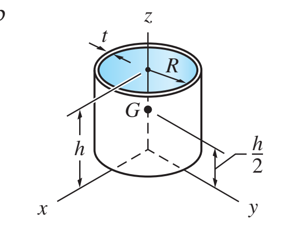
$I_x = I_y = \frac{208}{320}mR^2 \qquad I_z = \bar{I}_z = \frac{2}{5}mR^2$

$\bar{I}_x = \bar{I}_y = \frac{83}{320}mR^2$

Armazón cilíndrico



$m = 2\pi Rht\rho$

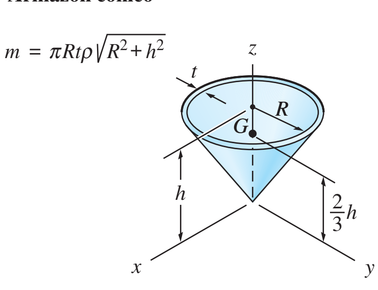


$I_x = I_y = \frac{1}{6}m(3R^2 + 2h^2) \qquad I_z = \bar{I}_z = mR^2$

$\bar{I}_x = \bar{I}_y = \frac{1}{12}m(6R^2+h^2)$

Armazón cónico

$m = \pi Rt\rho\sqrt{R^2+h^2}$

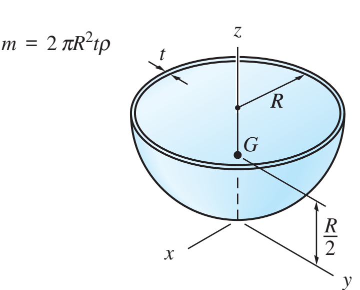


$I_x = I_y = \frac{1}{2}m(R^2 + 2h^2) \qquad I_z = \bar{I}_z = \frac{1}{2}mR^2$

$\bar{I}_x = \bar{I}_y = \frac{1}{12}m(6R^2+h^2)$

Armazón hemisférico

$m = 2\,\pi R^2 t\rho$



$I_x = I_y = \frac{2}{3}mR^2 \qquad I_z = \bar{I}_z = \frac{5}{12}mR^2$

$\bar{I}_x = \bar{I}_y = \frac{5}{12}mR^2$

El conocimiento de la dinámica es básico para muchas áreas de la ingeniería, entre las que se encuentran la mecánica, la aeroespacial y la civil, así como para ciencias como la medicina y la biología.

Ingeniería mecánica: dinámica ofrece al estudiante la oportunidad de dominar los principios de la dinámica por medio del razonamiento, la práctica, el estudio y el análisis más que por la memorización. Para ello, se ha incluido en esta obra un gran número de problemas de ejemplo, que muestran de manera sencilla los fundamentos de la mecánica, y otros de práctica, aplicables a diseños de ingeniería.

En esta tercera edición se han hecho mejoras significativas, entre ellas, la reorganización o reescritura de varios apartados a fin de que el alumno comprenda los temas con mayor facilidad, la introducción de la sección "Repaso de ecuaciones" que le ayudará en la resolución de problemas, el uso de dos colores para mejorar la lectura general del texto y las ilustraciones y, lo más novedoso, la inclusión de problemas de ejemplo que requieren soluciones numéricas con MATLAB©, un programa matemático conocido en el área de ingeniería.



http://latinoamerica.cengage.com


ISBN-13: 978-607481871-0
ISBN-10: 607481871-1